# Transformada de Fourier

## Sistemas Amostrados

Fernando Passold

# Série de Fourier

## Na forma exponencial

Forma tradicional (trigonométrica) da Série de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right]$$

Onde:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, \cos(n\omega_0 t)\, dt, \qquad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, \sin(n\omega_0 t)\, dt$$

Mas lembrando das Relações de Euler:

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2} \left[ e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t} \right], \text{ e:}$$

$$\sin(n\omega_0 t) = \frac{1}{j2} \left[ e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t} \right]$$

E também de:

$e^{jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) + j \sin(w\omega_0 t)$, e:

$e^{-jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) - j \sin(w\omega_0 t)$

Substituindo na eq. Original da Série:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{2} \left[ e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t} \right] + \frac{b_n}{j2} \left[ e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t} \right] \right\}$$

Multiplicando por $j$ o último termo da relação anterior e ordenando os temos, obtemos:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_n - jb_n}{2} \right) e^{jn\omega_0 t} + \left( \frac{a_n + jb_n}{2} \right) e^{-jn\omega_0 t} \right]$$

Definindo $c_n$ da seguinte forma:

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

E aplicando na eq. Anterior...

# Série de Fourier

## Na forma exponencial

Forma tradicional (trigonométrica) da Série de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, \cos(n\omega_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, \sin(n\omega_0 t)\, dt$$

Adaptamos usando Euler, para:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{2} \left[ e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t} \right] + \frac{b_n}{j2} \left[ e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t} \right] \right\}$$

transformando obtemos:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_n - jb_n}{2} \right) e^{jn\omega_0 t} + \left( \frac{a_n + jb_n}{2} \right) e^{-jn\omega_0 t} \right]$$

Euler:

$$e^{a+jb} = e^a \left[ \cos(b) + j \sin(b) \right]$$

Se $a = 0$, teremos:

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

Fazendo:

$$c_n = \frac{1}{2} \left( a_n - jb_n \right) \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

E aplicando na eq. Anterior, temos agora:

$$c_n = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{2}{T} \right) \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, \cos(n\omega_0 t)\, dt - j \left( \frac{2}{T} \right) \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, \sin(n\omega_0 t)\, dt \right\}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \left[ \cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t) \right]$$

Obtemos finalmente:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

e finalmente, obtemos a forma exponencial da Série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

# Série de Fourier

## Na forma exponencial

Forma tradicional da Série de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, \cos(n\omega_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, \sin(n\omega_0 t)\, dt$$

Adaptamos usando Euler, para:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{2} \left[ e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t} \right] + \frac{b_n}{j2} \left[ e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t} \right] \right\}$$

transformando obtemos:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_n - jb_n}{2} \right) e^{jn\omega_0 t} + \left( \frac{a_n + jb_n}{2} \right) e^{-jn\omega_0 t} \right]$$

Fazendo:

$$c_n = \frac{1}{2} \left( a_n - jb_n \right) \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

E aplicando na eq. Anterior, temos agora:

$$c_n = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{2}{T} \right) \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, \cos(n\omega_0 t)\, dt - j \left( \frac{2}{T} \right) \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, \sin(n\omega_0 t)\, dt \right\}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \left[ \cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t) \right]$$

Obtemos finalmente:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

e finalmente, podemos afirmar que:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

Que corresponde ao formato exponencial da Série de Fourier.

# Série de Fourier

## Outra dedução...

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(n\,\omega_0\,t + \theta_n\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\,\omega_0\,t + \theta_n + \frac{\pi}{2}\right)$$

Onde: $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e $\theta_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

Ou usando relações de Euler:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\, e^{j\,n\,\omega_0\,t}$$

Onde: $F_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-j\,n\,\omega_0\,t}\, dt$

Podemos separar os temos de $F_n$ nos coeficientes ($a_n s$ e $b_n s$) usando a relação:

$e^{-j\,\omega_0\,t} \Rightarrow \cos(n\,\omega_o\,t) + j\,\sin(n\,\omega_0\,t)$, e então:

$$a_n = 2\,\mathfrak{Re}\{F_n\}$$

$$b_n = -\,2\,\mathfrak{Im}\{F_n\}$$

Os coeficientes $a_n$, $b_n$ e $F_n$ representam o grau de similaridade entre $f(t)$ e cada um dos componentes nas frequências $n\,\omega_0$.

$$F_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left(a_n - jb_n\right) \qquad F_{-n} = \frac{1}{2}\left(a_n + jb_n\right)$$

$$a_0 = F_n + F_{-n}$$

$$b_n = j\left(F_n - F_{-n}\right)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2\,|F_n|$$

# Série de Fourier

## Resumo

Formato trigonométrico:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right]$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(n\,\omega_0\,t + \theta_n\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\,\omega_0\,t + \theta_n + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, \cos(n\omega_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, \sin(n\omega_0 t)\, dt$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{e} \quad \theta_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Formato exponencial:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-j\,n\,\omega_0\,t}\, dt$$

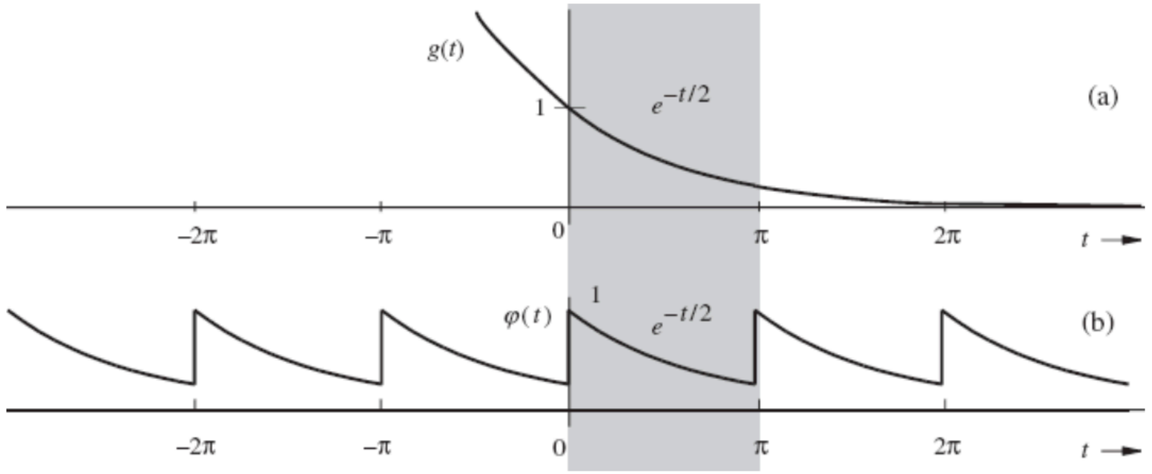
Relação entre série exponencial e trigonométrica:

$$F_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2\,|\,F_n\,|$$

# Série de Fourier Exponencial
## Exemplo

Lathi, Exemplo 2.3 (fig. 2.13, p. 55)




Encontre a série exponencial de Fourier para a onda mostrada acima.

Neste caso: $T = \pi, \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T = 2.$

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\, e^{j2nt}$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_T \varphi(t) e^{-2jnt}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t/2}\, e^{-j2nt}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\left(\frac{1}{2}+j2n\right)t}$$

$$= \frac{-1}{\pi\left(\frac{1}{2}+j2n\right)} e^{-\left(\frac{1}{2}+j2n\right)t}\Big|_0^{\pi}$$

$$F_n = \frac{0{,}504}{1+j4n}$$

$$\varphi(t) = 0{,}504 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+j4n} e^{j2nt}$$

$$\varphi(t) = 0{,}504 \left[1 + \frac{1}{1+j4}e^{j2t} + \frac{1}{1+j8}e^{j4t} + \frac{1}{1+j12}e^{j6t} + \ldots \right.$$
$$\left. \frac{1}{1-j4}e^{-j2t} + \frac{1}{1-j8}e^{-j4t} + \frac{1}{1-j12}e^{-j6t} + \ldots\right]$$

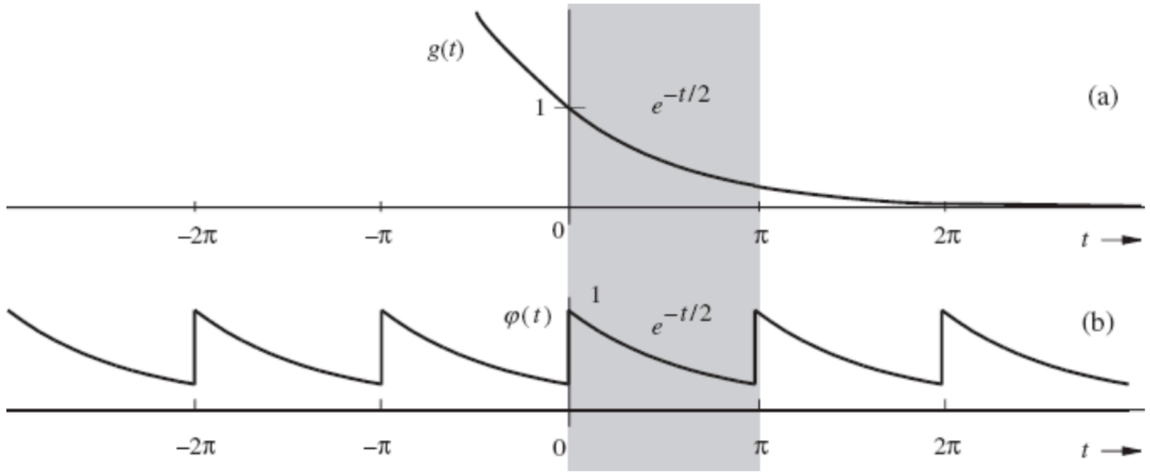
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Note que o termos $F_n$ são complexos; $F_n$ e $F_{-n}$ são complexos conjugados.

# Série de Fourier Exponencial
## Exemplo

Lathi, Exemplo 2.3 (fig. 2.13, p. 55)




$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\, e^{j2nt}$$

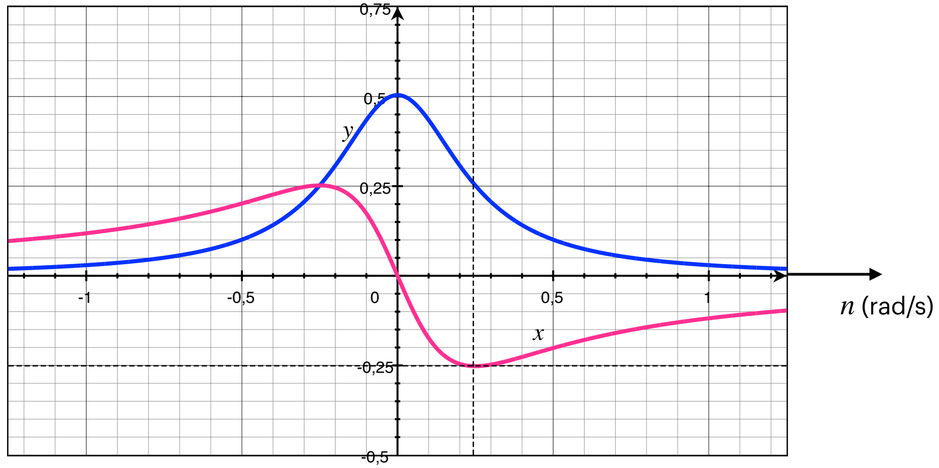
$$F_n = \frac{0{,}504}{1 + j4n}$$

$$\varphi(t) = 0{,}504 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + j4n}\, e^{j2nt}$$

$$\varphi(t) = 0{,}504 \left[1 + \frac{1}{1+j4}e^{j2t} + \frac{1}{1+j8}e^{j4t} + \frac{1}{1+j12}e^{j6t} + \ldots \right.$$
$$\left. \frac{1}{1-j4}e^{-j2t} + \frac{1}{1-j8}e^{-j4t} + \frac{1}{1-j12}e^{-j6t} + \ldots \right]$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-j\,n\,\omega_0\, t}\, dt$$




$$F_n = \frac{0{,}504}{1 + j4n} \cdot \frac{(1 - j4n)}{(1 - j4n)} = \frac{0{,}504(1 - j4n)}{1 + (4n)^2} = \frac{0{,}504(1 - j4n)}{1 + 16n^2}$$

$$\mathfrak{Re}\{F_n\} = \frac{0{,}504}{1 + 16n^2}$$

$$\mathfrak{Im}\{F_n\} = \frac{0{,}504 \cdot 4n}{1 + 16n^2}$$

Note que o termos $F_n$ são complexos; $F_n$ e $F_{-n}$ são complexos conjugados.

# Série de Fourier Exponencial
## Exemplo

Lathi, Exemplo 2.3 (fig. 2.13, p. 55)

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\, e^{j2nt}$$

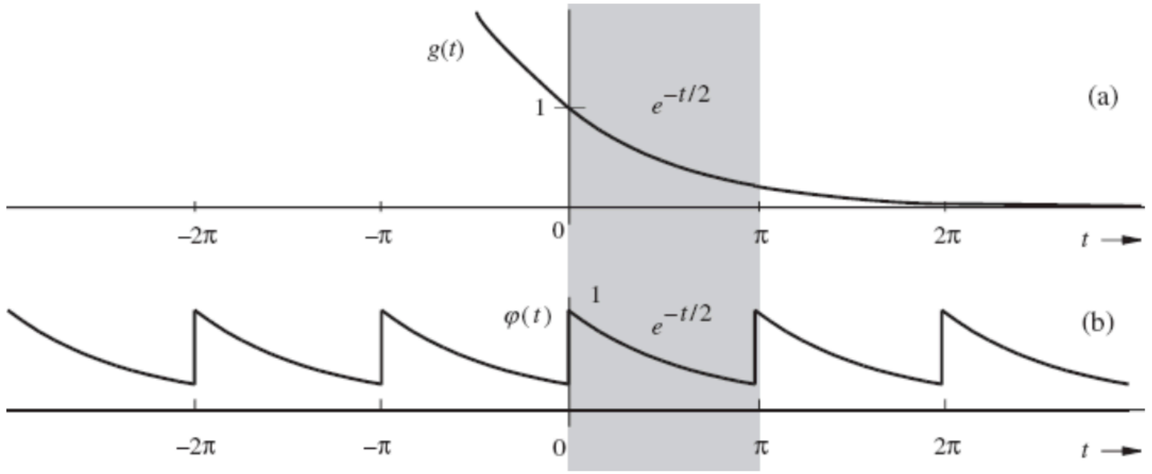
$$F_n = \frac{0{,}504}{1 + j4n}$$

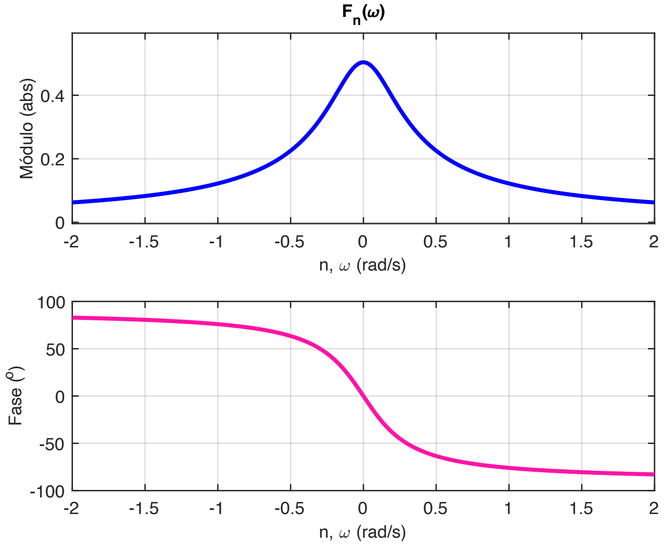
$$\varphi(t) = 0{,}504 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + j4n}\, e^{j2nt}$$

$$\varphi(t) = 0{,}504 \left[1 + \frac{1}{1+j4}e^{j2t} + \frac{1}{1+j8}e^{j4t} + \frac{1}{1+j12}e^{j6t} + \ldots \right.$$
$$\left. \frac{1}{1-j4}e^{-j2t} + \frac{1}{1-j8}e^{-j4t} + \frac{1}{1-j12}e^{-j6t} + \ldots \right]$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-j\,n\,\omega_0\, t}\, dt$$




```
>> n=-2:0.01:2;
>> F=0.504./(1+j*4.*n);
>> F_mag=abs(F);
>> F_fase=rad2deg(angle(F));
>> % [n' F_mag' f_fase']
>> subplot(211); plot(n,F_mag)
>> grid
>> xlabel('n, \omega (rad/s)')
>> ylabel('Módulo (abs)')
>> title('F_n(\omega)')
>> subplot(212); plot(n,F_fase)
>> grid
>> ylabel('Fase (^o)')
>> xlabel('n, \omega (rad/s)')
```

Note que o termos $F_n$ são complexos; $F_n$ e $F_{-n}$ são complexos conjugados.

Note: Série de Fourier ⇛ Sinais periódicos

# Transformada de Fourier

## Equações

- Transformação do tempo contínuo, $x(t)$ ➠ variável complexa domínio frequência, $X(j\omega)$:

$$X(j\omega) \equiv \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$$

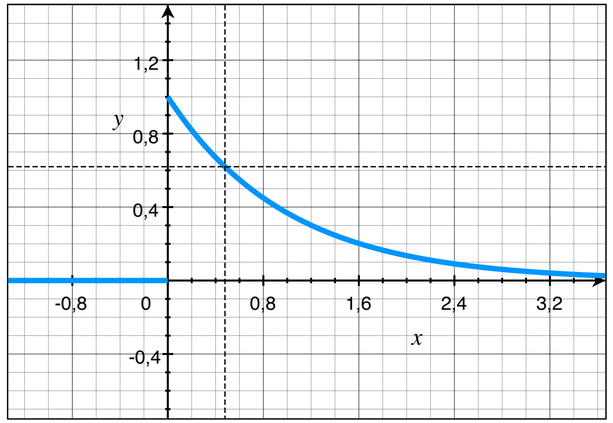
Ref.: Transformadas de Laplace e de Fourier (44:12), Professor Possani, 44.683 visualizações, 11 de abr. de 2022

# Transformada de Fourier

## Equações

- Transformação do tempo contínuo, $x(t)$ ➠ variável complexa domínio frequência, $X(j\omega)$:

$$X(j\omega) \equiv \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$




Ex_1: Seja: $f(t) = e^{-at}, \forall t \geq 0$, determine $X(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$

Resp.:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-t(a+j\omega)}\, dt$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_0^{M} e^{-t(a+j\omega)}\, dt = \lim_{M\to\infty} -\frac{e^{-t(a+j\omega)}}{(a+j\omega)}\Bigg|_0^{M}$$

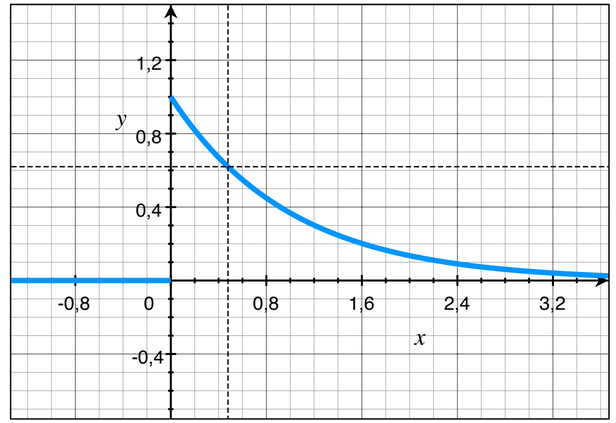
$$= \lim_{M\to\infty} -\frac{e^{-M(a+j\omega)}}{a+j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{1}{a+j\omega}$$

Ref.: Transformadas de Laplace e de Fourier (44:12), Professor Possani, 44.683 visualizações, 11 de abr. de 2022

# Transformada de Fourier
## Equações

- Transformação do tempo contínuo, $x(t)$ ➠ variável complexa domínio frequência, $X(j\omega)$:

$$X(j\omega) \equiv \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$




Ex_1: Seja: $f(t) = e^{-at}, \forall t \geq 0$, determine $X(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$

Resp.:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-t(a+j\omega)}\, dt$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_0^{M} e^{-t(a+j\omega)}\, dt = \lim_{M\to\infty} -\frac{e^{-t(a+j\omega)}}{(a+j\omega)}\Bigg|_0^{M}$$

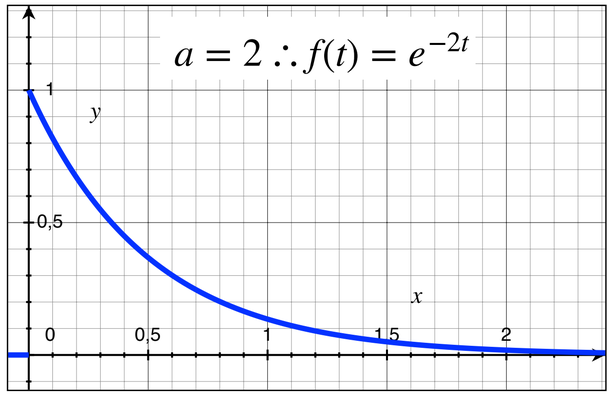
$$= \lim_{M\to\infty} -\frac{e^{-M(a+j\omega)}}{a+j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{1}{a+j\omega}$$

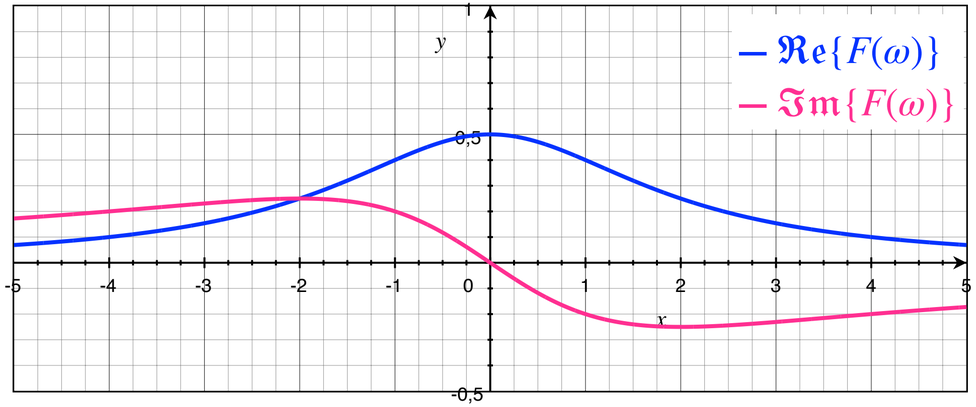
Se $a = 1$, isto é: $f(t) = e^{\ \ t}$, podemos escrever:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{1+j\Omega} \cdot \frac{(1-j\Omega)}{(1-j\Omega)} = \frac{1-j\Omega}{1+v^2}$$

Ref.: Transformadas de Laplace e de Fourier (44:12), Professor Possani, 44.683 visualizações, 11 de abr. de 2022

# Transformada de Fourier




Ex_1: Seja: $f(t) = e^{-at}, \forall t \geq 0$, determine $X(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$

Resp.:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-t(a+j\omega)}\, dt$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_0^{M} e^{-t(a+j\omega)}\, dt = \lim_{M\to\infty} -\frac{e^{-t(a+j\omega)}}{(a+j\omega)}\Big|_0^{M}$$

$$= \lim_{M\to\infty} -\frac{e^{-M(a+j\omega)}}{a+j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{1}{a+j\omega}$$

Se $a = 2$, isto é: $f(t) = e^{-2t}$, obtemos:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{2+j\omega} \cdot \frac{(2-j\omega)}{(2-j\omega)} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}$$

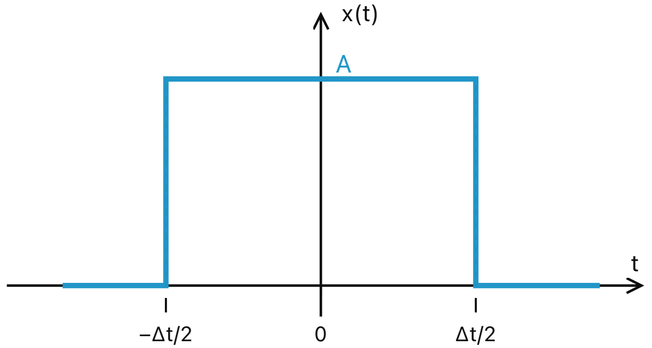
$$\Re e\{F(\omega)\} = \frac{a}{a^2+\omega^2} = \frac{2}{4+\omega^2}$$

$$\Im m\{F(\omega)\} = \frac{-\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{-\omega}{4+\omega^2}$$

Ref.: Transformadas de Laplace e de Fourier (44:12), Professor Possani, 44.683 visualizações, 11 de abr. de 2022

# Transformada de Fourier

## Função Pulso Retangular




Seja: $x(t) = \begin{cases} A, & -\dfrac{\Delta t}{2} \le t \le \dfrac{\Delta t}{2} \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

Esta função é par (pode ser refletida em torno no eixo Y em $t = 0$).

Aplicando: $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt,$

$$X(\omega) = \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} A\, e^{-j\omega t}\, dt$$

A integral da exponencial é: $\int e^{-j\omega t}\, dt = \dfrac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}$

Aplicando os limites: $X(\omega) = A \left[ \dfrac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2}$

Obtemos: $X(\omega) = \dfrac{A}{-j\omega} \left[ e^{-j\omega \Delta t/2} - e^{+j\omega \Delta t/2} \right]$

Lembrando de Euler: $e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin(\theta)$

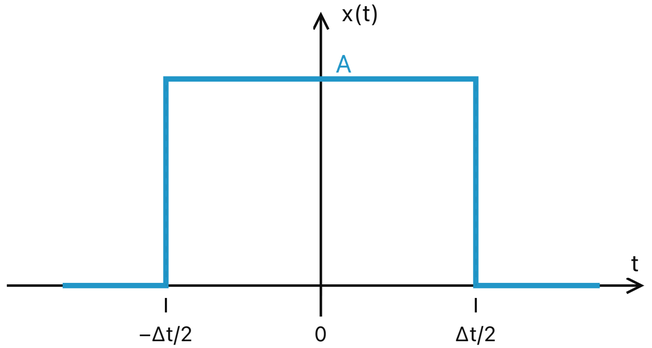
Teremos: $X(\omega) = \dfrac{A}{-j\omega} \left[ -2j \sin\left( \dfrac{\omega \Delta t}{2} \right) \right]$

Simplificando resulta: $X(\omega) = \dfrac{2A}{\omega} \sin\left( \dfrac{\omega \Delta t}{2} \right)$

Ou: $\boxed{X(\omega) = A \Delta t\, \dfrac{\sin(\omega \Delta t/2)}{\omega \Delta t/2}}$

# Transformada de Fourier

## Função Pulso Retangular




Resumindo:

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\frac{\Delta t}{2} \leq t \leq \frac{\Delta t}{2} \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Sua transformada resultou em:

$$X(\omega) = A\Delta t \, \frac{\sin(\omega \Delta t/2)}{\omega \Delta t/2}$$

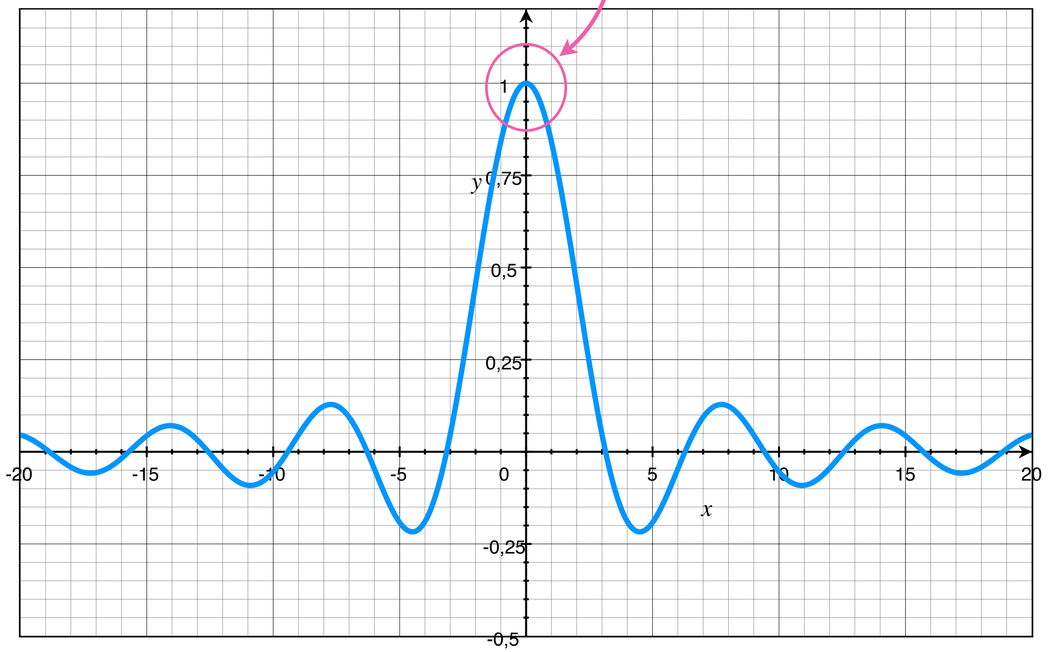
Note que:

$sinc(u) = \frac{\sin(u)}{u}$ é a "famosa" função Sync que rede um gráfico particularmente interessante:

Em $\omega = 0$, a expressão aparentemente resulta numa indeterminação $0/0$, mas usando limite:

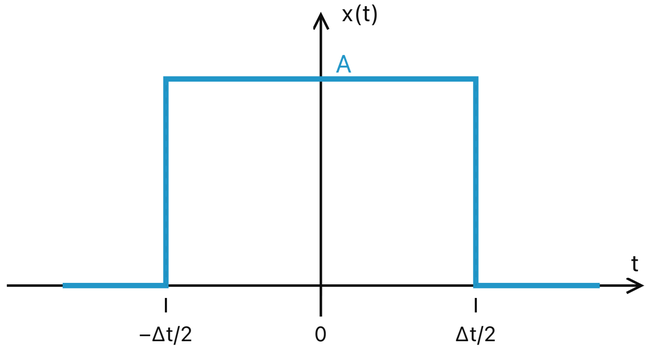
$$\lim_{\omega \to 0} X(\omega) = A\Delta t$$

(Note: isto corresponde à área do pulso retangular)



# Transformada de Fourier

## Função Pulso Retangular




Resumindo:

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\dfrac{\Delta t}{2} \leq t \leq \dfrac{\Delta t}{2} \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Sua transformada resultou em:

$$X(\omega) = A\Delta t \, \frac{\sin(\omega \Delta t/2)}{\omega \Delta t/2}$$

Note que:

$sinc(u) = \dfrac{\sin(u)}{u}$ é a “famosa” função Sync.

Decompondo $X(\omega)$ na parte real e na parte imaginária, vamos obter:

Usando identidade de Euler: $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$

Teremos então:

$$X(\omega) = A \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \left[\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\right] dt$$

Separando as parcelas:

$$X(\omega) = A \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \cos(\omega t) dt - jA \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \sin(\omega t) dt$$

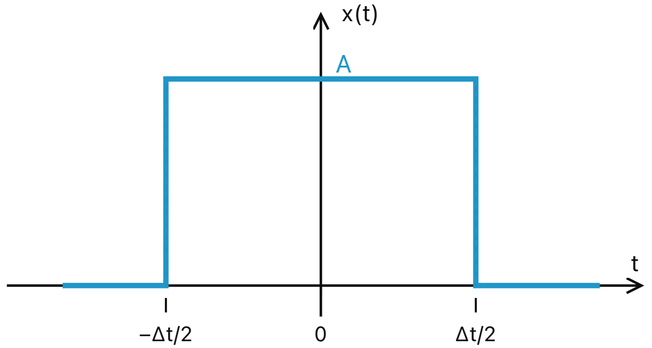
Note que:

- O cosseno é uma função par.
- O seno é uma função ímpar.
- Os limites de integração são simétricos.

Consequentemente, a integral da parte imaginária é nula.

# Transformada de Fourier

## Função Pulso Retangular




Resumindo:

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\dfrac{\Delta t}{2} \leq t \leq \dfrac{\Delta t}{2} \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Sua transformada resultou em:

$$X(\omega) = A\Delta t \, \frac{\sin(\omega \Delta t/2)}{\omega \Delta t/2}$$

Usando identidade de Euler:

$$X(\omega) = A \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \cos(\omega t) dt - jA \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \sin(\omega t) dt$$

$\sin(\omega t)$ → 0

Parte Imaginária é nula: $\mathrm{Im}\{X(\omega)\} = 0$

Parte Real: $\mathrm{Re}\{X(\omega)\} = A \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \cos(\omega t) dt,$

Integrando: $\mathrm{Re}\{X(\omega)\} = A \left[ \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2}$

E finalmente: $\mathrm{Re}\{X(\omega)\} = \dfrac{2A}{\omega} \sin\left( \dfrac{\omega \Delta t}{2} \right)$

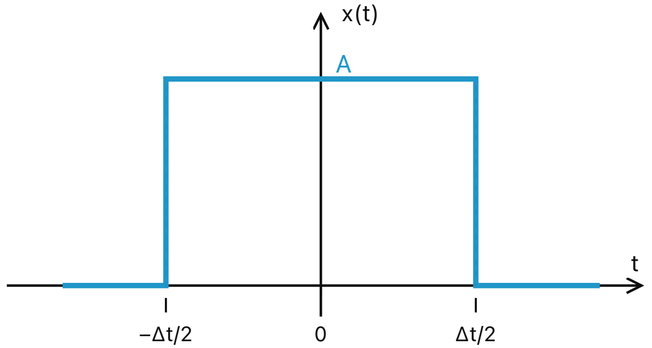
Ou: $X(\omega) = \mathrm{Re}\{X(\omega)\} + j0$

(Pulso centrado na origem).

E como ficam a Magnitude e a Fase?

# Transformada de Fourier

## Função Pulso Retangular




Resumindo:

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\frac{\Delta t}{2} \leq t \leq \frac{\Delta t}{2} \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Sua transformada resultou em:

$$X(\omega) = A\Delta t \, \frac{\sin(\omega \Delta t/2)}{\omega \Delta t/2}$$

$$\mathrm{Im}\{X(\omega)\} = 0$$

$$\mathrm{Re}\{X(\omega)\} = A \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \cos(\omega t) dt,$$

E como ficam a Magnitude e a Fase?

Para variável complexa:

$$X(\omega) = X_R(\omega) + jX_I(\omega)$$

Magnitude: $|X(\omega)| = \sqrt{X_R^2(\omega) + X_I^2(\omega)}$

Neste caso, $\mathrm{Im}\{X(\omega)\} = 0$, então:

$$|X(\omega)| = \left| \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \right|, \text{ ou:}$$

$$|X(\omega)| = |A| \, \Delta t \left| \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \right|$$

Para $A > 0$, a magnitude começa em $A\Delta t$, apresenta zeros e oscila com amplitude decrescente.

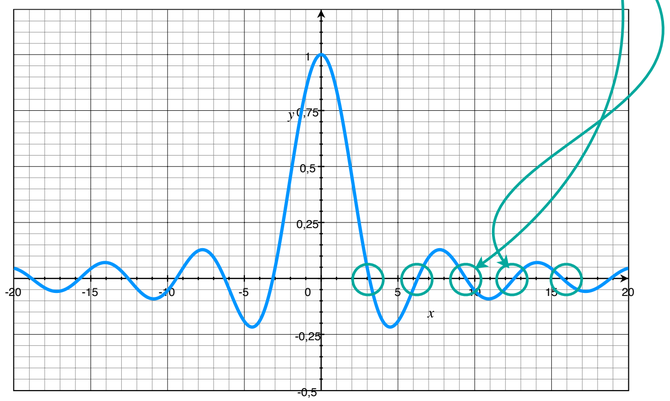
Valores nulos em:

$$\sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\omega \Delta t}{2} = k\pi$$

$$\omega_k = \frac{2k\pi}{\Delta t}$$

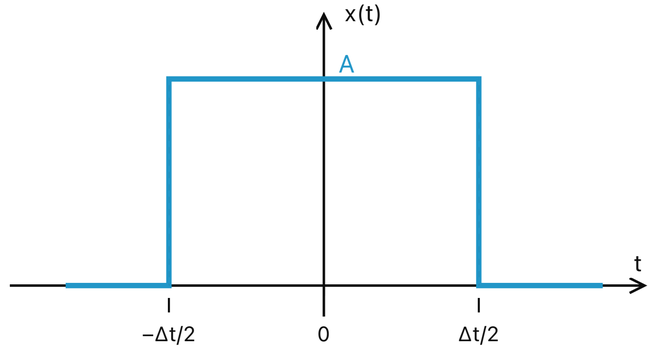
$$k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$




Note:
quanto menor a duração do pulso, mais espalhado será seu espectro

# Transformada de Fourier

## Função Pulso Retangular




Resumindo:

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\dfrac{\Delta t}{2} \leq t \leq \dfrac{\Delta t}{2} \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Sua transformada resultou em:

$$X(\omega) = A\Delta t \, \frac{\sin(\omega \Delta t/2)}{\omega \Delta t/2}$$

$$\mathrm{Im}\{X(\omega)\} = 0$$

$$\mathrm{Re}\{X(\omega)\} = A \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \cos(\omega t) dt,$$

E como ficam a Magnitude e a Fase?

Fase (Ângulo) da transformada:

$$\phi(\omega) = \angle\big(X(\omega)\big) = \mathrm{atan2}\left(\mathrm{Im}\{X(\omega)\}, \mathrm{Re}\{X(\omega)\}\right)$$

Como a parte imaginária é zero:

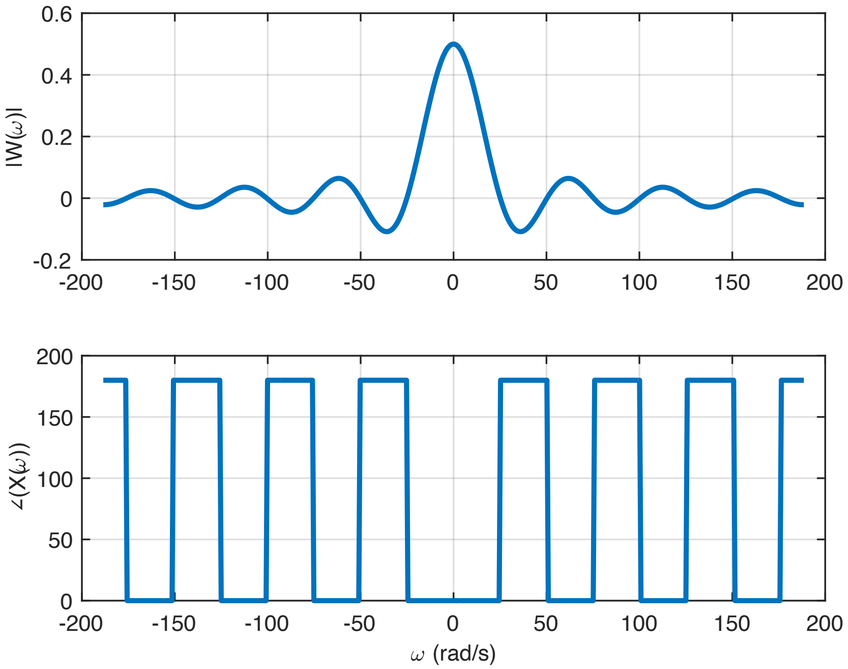
$$\phi(\omega) = \mathrm{atan2}\left(0, \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)\right)$$

Considerando $A > 0$:

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0, & X(\omega) > 0 \\ \pi, & X(\omega) < 0 \end{cases}$$

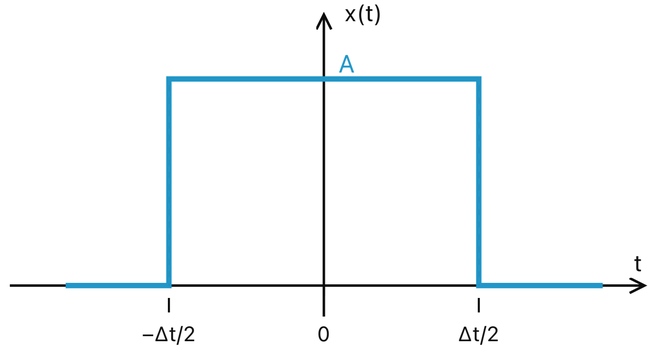
Nos pontos em que $X(\omega) = 0$, a fase é indefinida.

E alterna entre 0 e $\pi$ (ou 0° e 180°) conforme o sinal da transformada.



# Transformada de Fourier

## Função Pulso Retangular




Resumindo:

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\frac{\Delta t}{2} \leq t \leq \frac{\Delta t}{2} \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Sua transformada resultou em:

$$X(\omega) = A\Delta t \, \frac{\sin(\omega \Delta t/2)}{\omega \Delta t/2}$$

$$\mathrm{Im}\{X(\omega)\} = 0$$

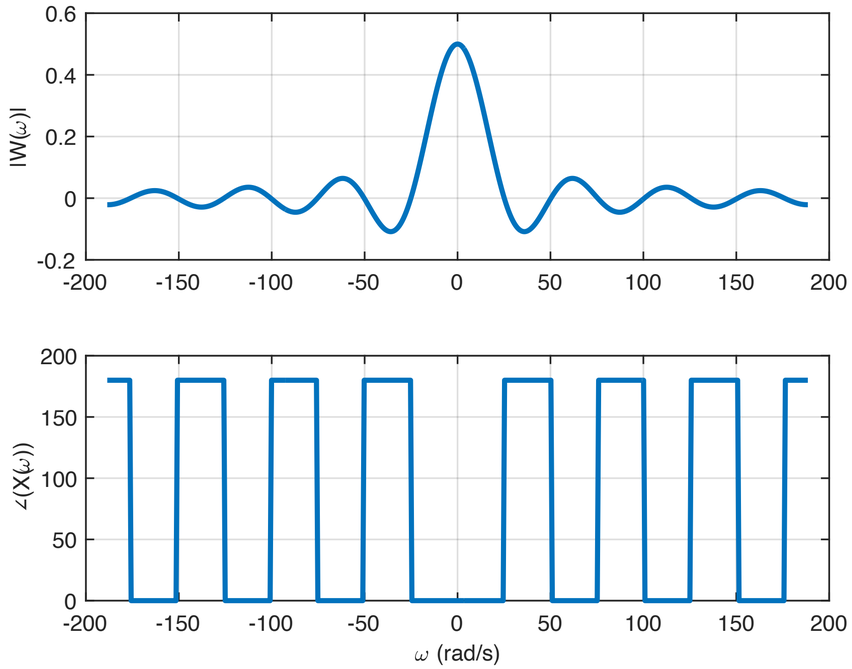
$$\mathrm{Re}\{X(\omega)\} = A \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \cos(\omega t) dt,$$

$$|X(\omega)| = \left| \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \right|$$

$$\phi(\omega) = \mathrm{atan2}\left(0, \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)\right)$$

Considerando $A > 0$.

```
Matlab/Octave:
>> A=2;
>> Delta=1/4; % Delta = 0.25
>> f=30;
>> w=linspace(-2*pi*f, 2*pi*f, 500); % 500 pts
>> w(1)
ans =
       -188.5
>> w(end)
ans =
        188.5
>> Mag=((2*A)./w).*sin(w.*(Delta/2));
>> Fase=atan2(0,((2*A)./w).*sin(w.*(Delta/2)));
>> subplot(211); plot(w,Mag)
>> grid
>> ylabel('|W(\omega)|')
>> FaseDeg=rad2deg(Fase);
>> subplot(212); plot(w,FaseDeg)
>> ylabel('\angle(X(\omega))')
>> xlabel('\omega (rad/s)')
>> grid
```



# Transformada de Fourier

## Função Pulso Retangular

Resumindo:

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\frac{\Delta t}{2} \leq t \leq \frac{\Delta t}{2} \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Sua transformada resultou em:

$$X(\omega) = A\Delta t \, \frac{\sin(\omega \Delta t/2)}{\omega \Delta t/2}$$

$$\mathrm{Im}\{X(\omega)\} = 0$$

$$\mathrm{Re}\{X(\omega)\} = A \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \cos(\omega t) dt,$$

$$|X(\omega)| = \left| \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \right|$$

$$\phi(\omega) = \mathrm{atan2}\left(0, \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)\right)$$

Considerando $A > 0$.

E se o pulso não estiver centrado na origem?

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \Delta t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sua transformada resulta:

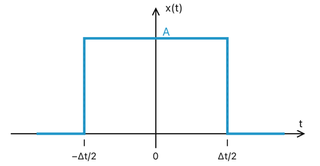
$$X(\omega) = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) e^{-j\omega \Delta t/2}$$

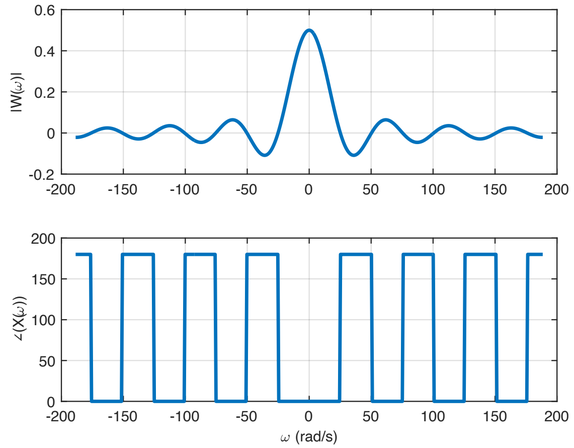
$$\mathrm{Re}\{X(\omega)\} = \frac{A}{\omega} \sin(\omega \Delta t)$$

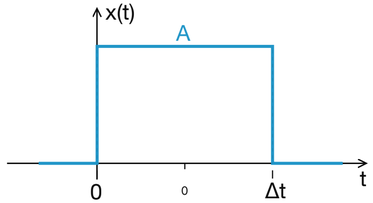
$$\mathrm{Im}\{X(\omega)\} = -\frac{2A}{\omega} \sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)$$

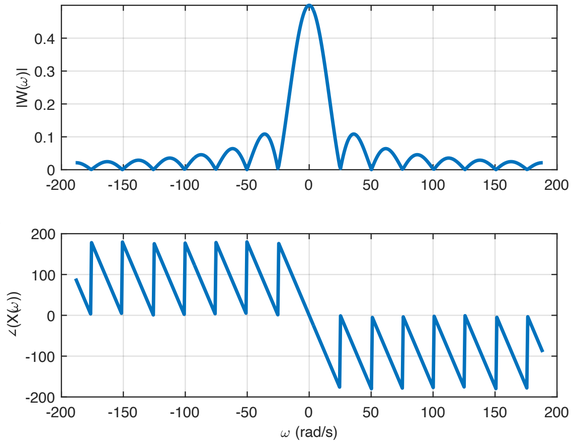
$$|X(\omega)| = \left| \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \right|$$

$$\phi(\omega) = -\frac{\omega \Delta t}{2} + \begin{cases} 0, & \frac{\sin(\omega \Delta t/2)}{\omega} > 0 \\ \pi, & \frac{\sin(\omega \Delta t/2)}{\omega} < 0 \end{cases}$$




Conclusões:

Deslocar um sinal no tempo não muda seu espectro em magnitude, mas modifica sua fase.

# Transformada de Fourier

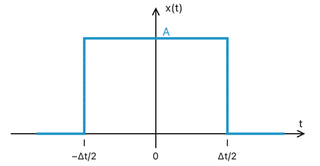
## Função Pulso Retangular

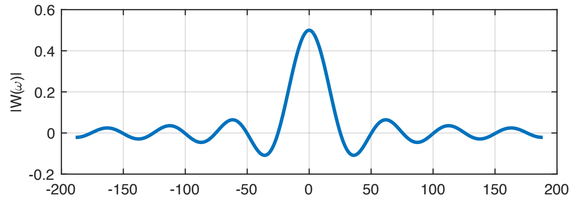
Resumindo:

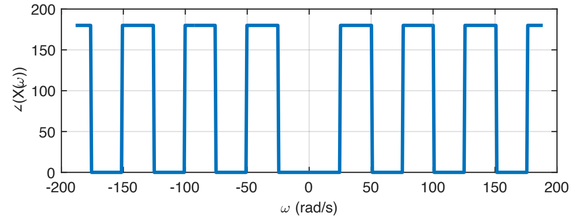
E se o pulso não estiver centrado na origem?

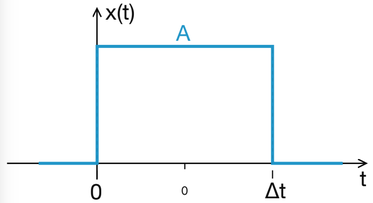
Note:

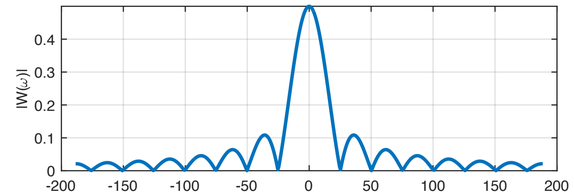
1. Um pulso retangular no domínio do tempo possui um espectro do tipo sinc no domínio da frequência.
2. Quanto menor a largura do pulso, maior a largura do seu espectro.
3. Um pulso simétrico em relação à origem possui transformada real e par.
4. O deslocamento temporal modifica a fase, mas não altera a magnitude do espectro.

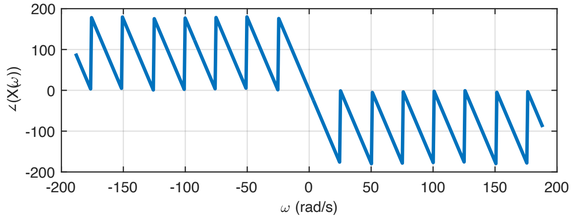



$$\phi(\omega) = \text{atan2}\left(0, \frac{2A}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\right)$$

$$\phi(\omega) = -\frac{\omega\Delta t}{2} + \begin{cases} 0, & \dfrac{\sin(\omega\Delta t/2)}{\omega} > 0 \\ \pi, & \dfrac{\sin(\omega\Delta t/2)}{\omega} < 0 \end{cases}$$

Considerando $A > 0$.

# Transformada de Fourier Discreta

## Equações

- Neste caso, sinal de entrada: $x[n]$, amostrado (discreteado no tempo).
- Saída: sinal $X(\Omega)$, função contínua e periódica em $2\pi$.

$$X(e^{j\omega}) \equiv \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$x[n] \equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

Como $X(e^{j\omega})$ é periódica com período $2\pi$ ($X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi k)})$, para $k \in \mathbb{Z}$), ela pode ser calcula em qualquer faixa de $\omega \in [0,2\pi]$, por exemplo: $\omega \in [-\pi, \pi)$:

$$x[n] \equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

# Transformada de Fourier Discreta

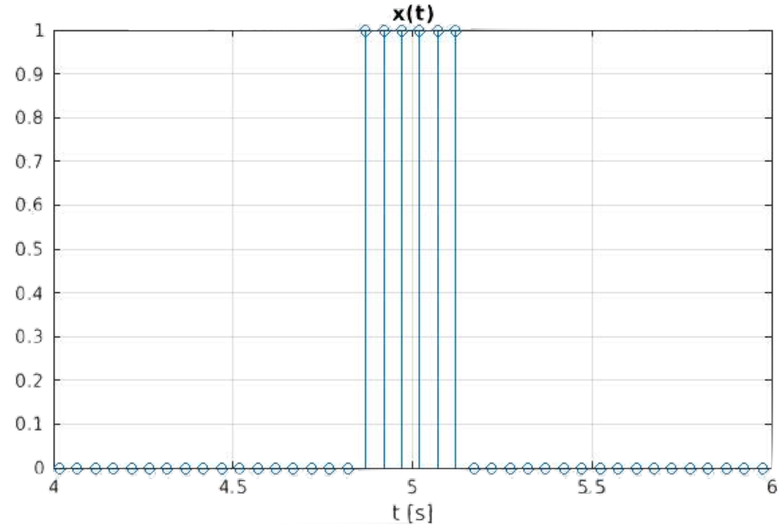
## Equações

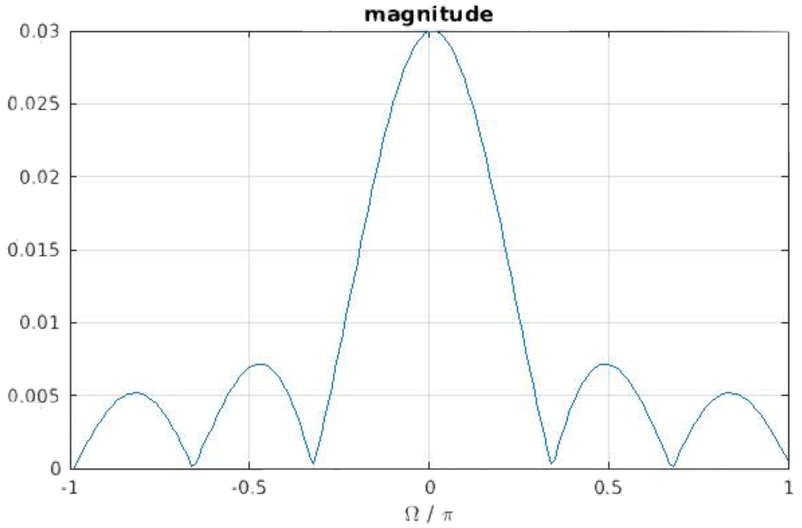
- Neste caso, sinal de entrada: $x[n]$, amostrado (discretizado no tempo).
- Saída: sinal $X(\Omega)$, função contínua e periódica em $2\pi$.

$$X(e^{j\omega}) \equiv \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$x[n] \equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

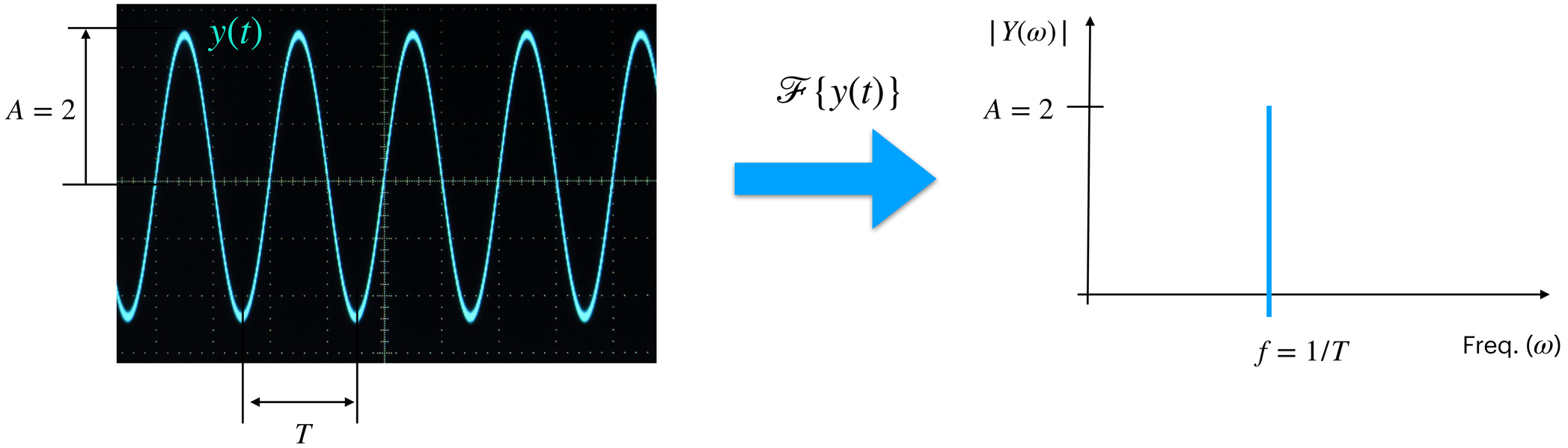
$$x[n] \equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$



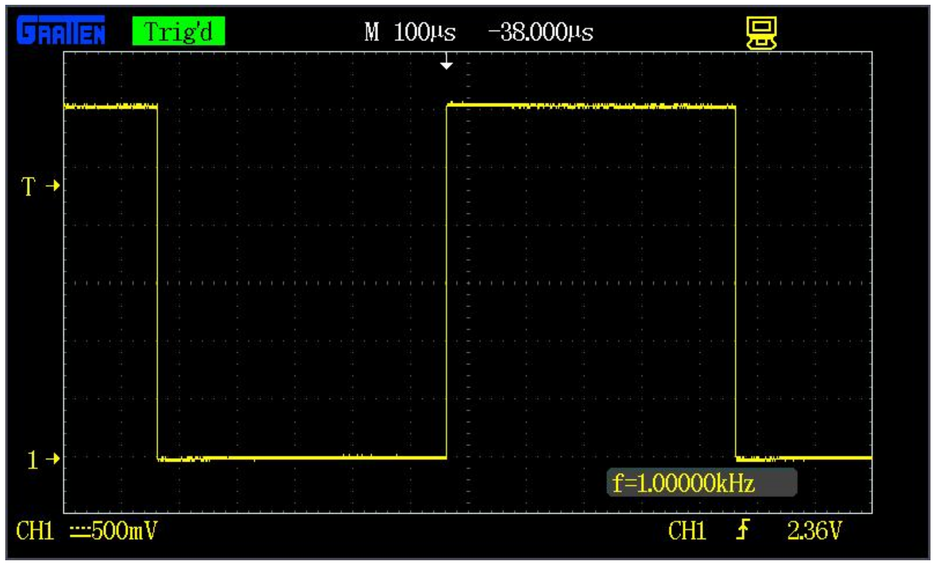
# Transformada de Fourier
## Aplicações

- Observando um sinal elétrico no osciloscópio é possível conhecer as frequências (harmônicas) presentes no mesmo

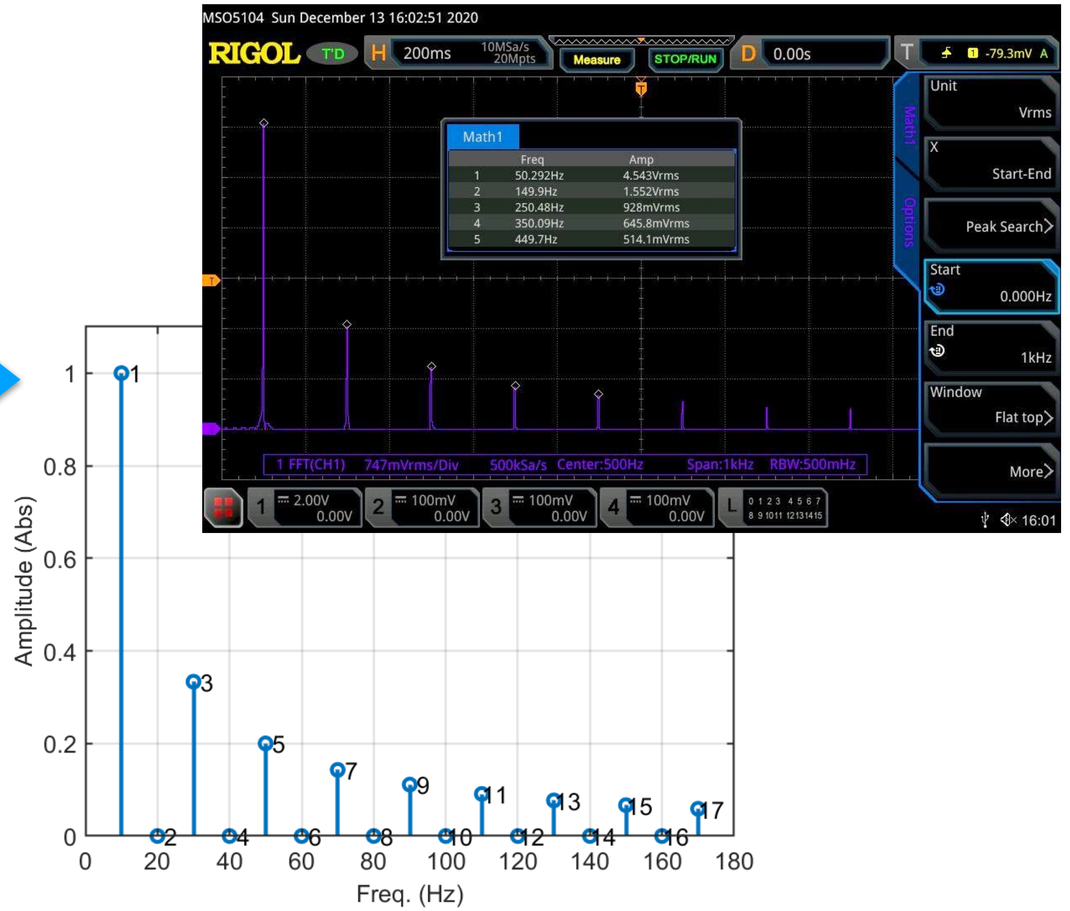


# Transformada de Fourier
## Aplicações

- Observando um sinal elétrico no osciloscópio é possível conhecer as frequências (harmônicas) presentes no mesmo

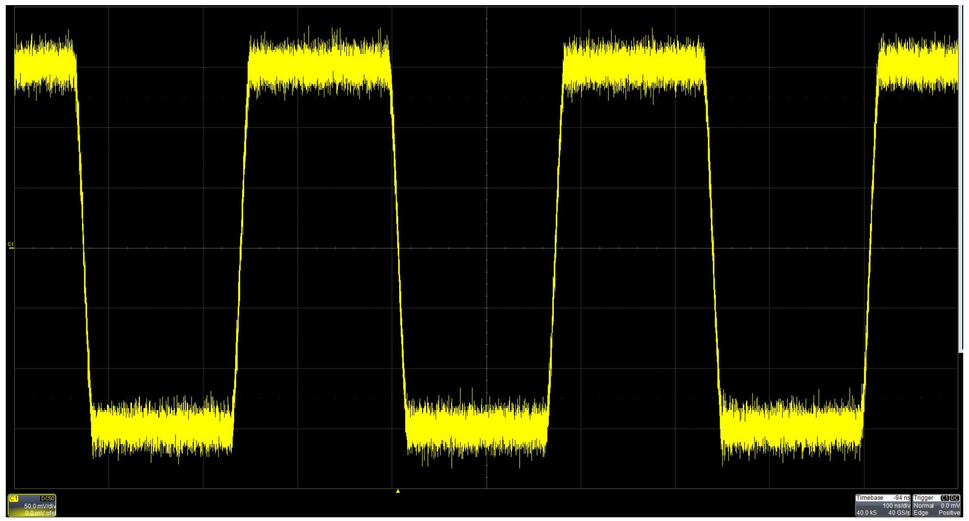



$$\mathcal{F}\{y(t)\}$$



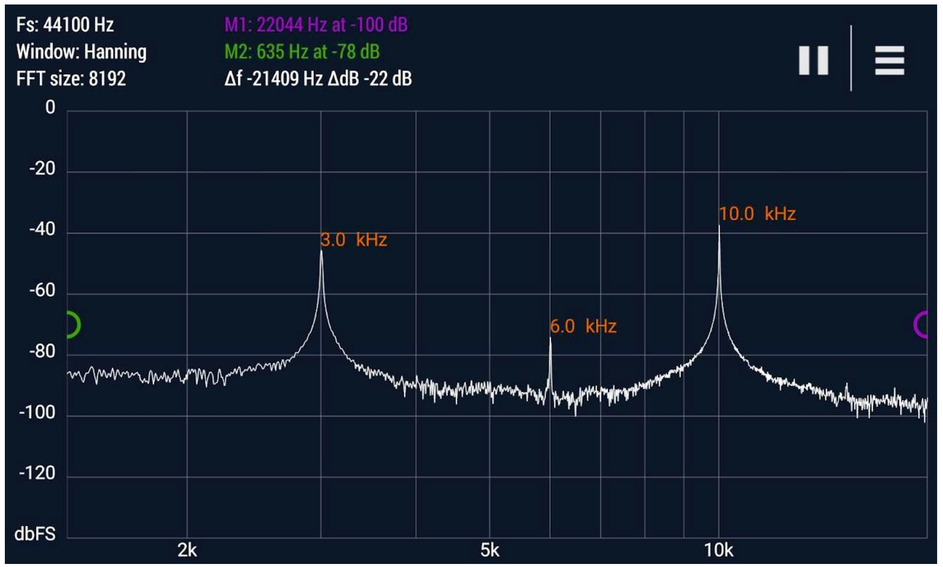
# Transformada de Fourier
## Aplicações

- Observando um sinal elétrico no osciloscópio é possível conhecer as frequências (harmônicas) presentes no mesmo



Onda quadrada + ruído

$$\mathcal{F}\{y(t)\}$$



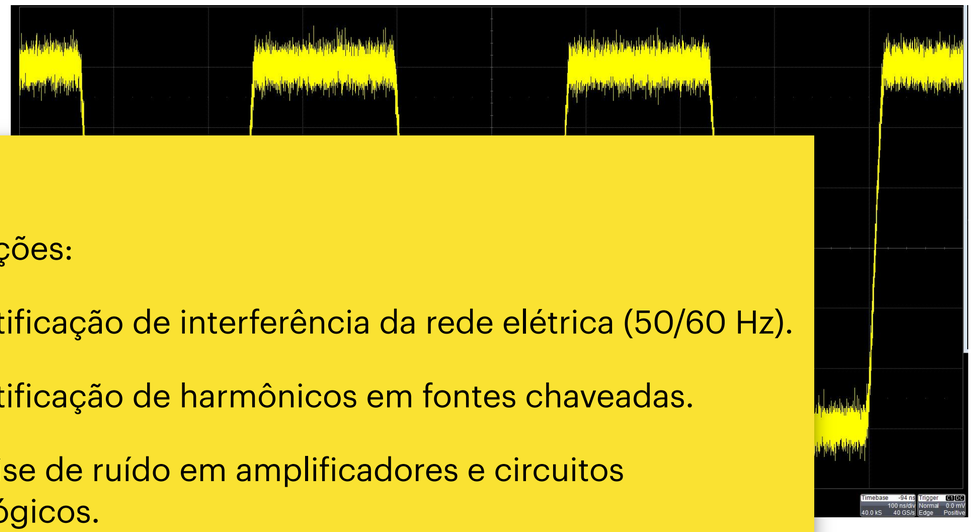

Descobrir onde estão os ruídos...

Descobrir se existe interferência de 60Hz?

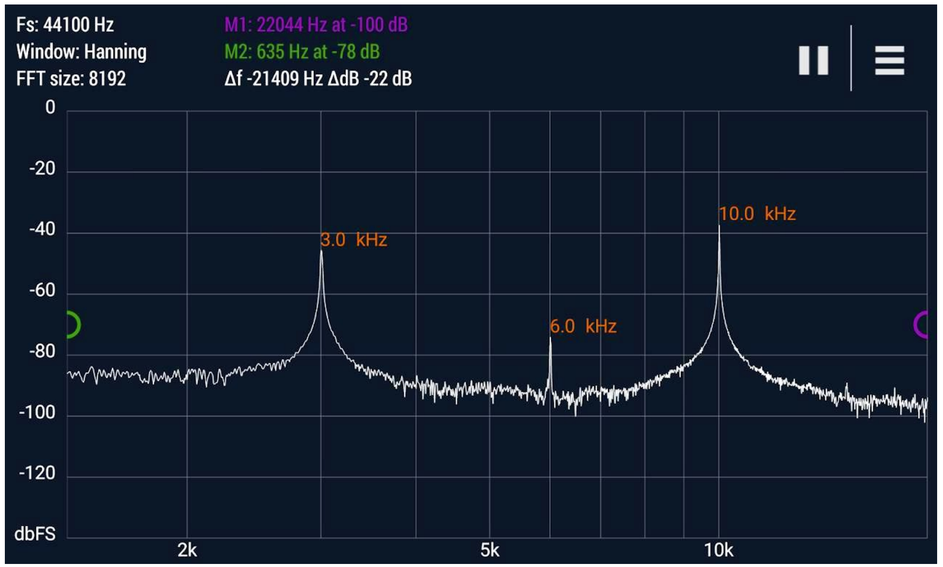
Descobrir interferência (fonte chaveada) em > 150 KHz?

# Transformada de Fourier
## Aplicações

- Observando um sinal elétrico no osciloscópio é possível conhecer as frequências (harmônicas) presentes no mesmo



$\mathcal{F}\{y(t)\}$




Aplicações:

- Identificação de interferência da rede elétrica (50/60 Hz).
- Identificação de harmônicos em fontes chaveadas.
- Análise de ruído em amplificadores e circuitos analógicos.
- Medição de distorção harmônica (THD).
- Caracterização de sensores e condicionadores de sinais.
- Análise espectral de sinais biomédicos, como ECG e EEG.

Descobrir onde estão os ruídos...

Descobrir se existe interferência de 60Hz?

Descobrir interferência (fonte chaveada) em > 150 KHz?

# Revisão com Conteúdo Anterior

| Já visto | Acréscimo |
|---|---|
| Série de Fourier | Representação espectral de sinais periódicos e não periódicos. |
| Convolução contínua | Relação entre convolução e multiplicação no domínio da frequência. |
| Convolução discreta | Análise de sistemas discretos por suas respostas em frequência |
| Sinais no tempo | Espectro de amplitude e fase |
| Sistemas LTI | Resposta em frequência. |

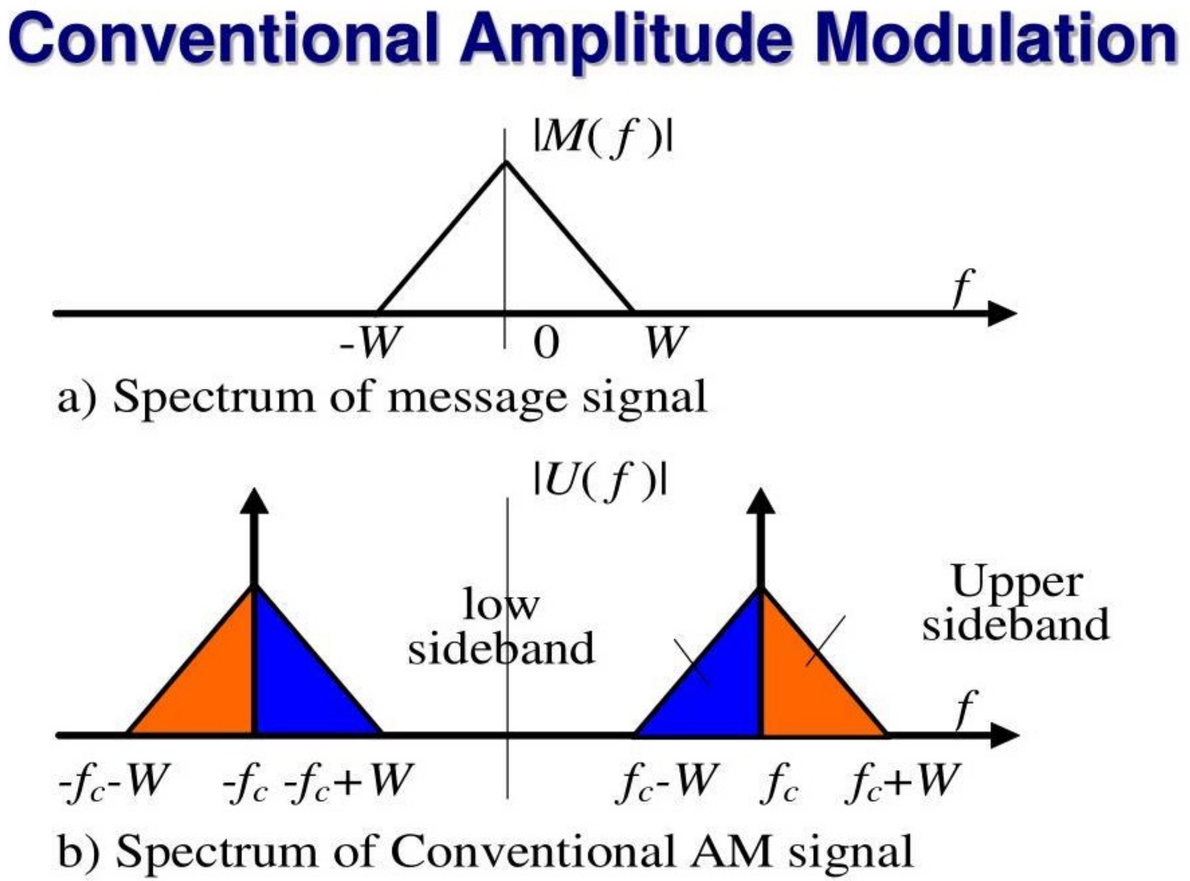
Note:

A transição da Série para a Transformada de Fourier é particularmente interessante: quando o período de um sinal cresce indefinidamente, o espaçamento entre as frequências harmônicas diminui, e o espectro discreto tende a se tornar contínuo.

# Transformada de Fourier

## Aplicações em Telecom

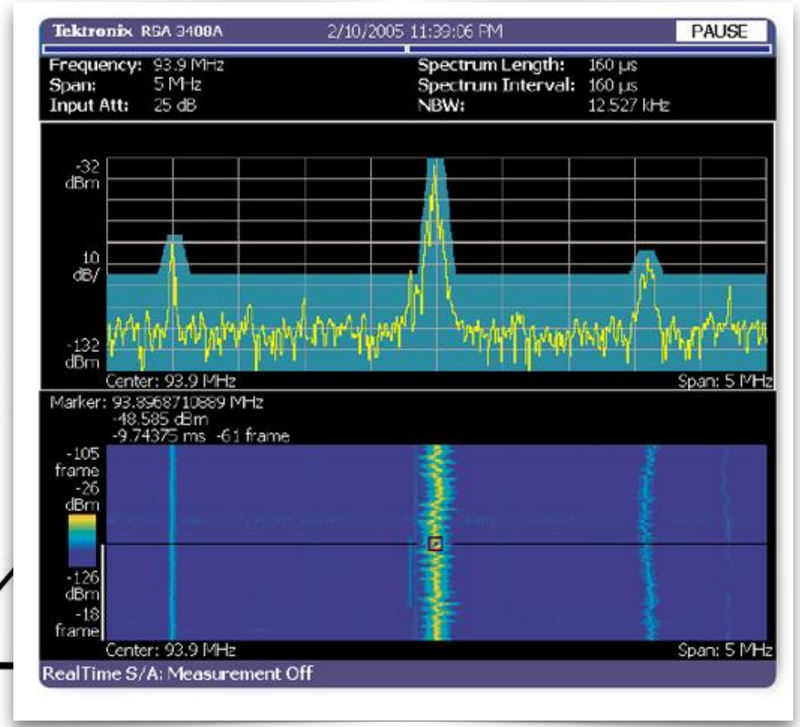
- Modulação de Sinais ("portadora")
  - Análise de largura de banda de sinais.
  - Modulação AM e FM.
  - Identificação de portadoras e bandas laterais.
  - Multiplexação por divisão de frequência.
  - OFDM, empregado em Wi-Fi e sistemas celulares 4G/ 5G.
  - Análise de interferências entre canais de comunicação.



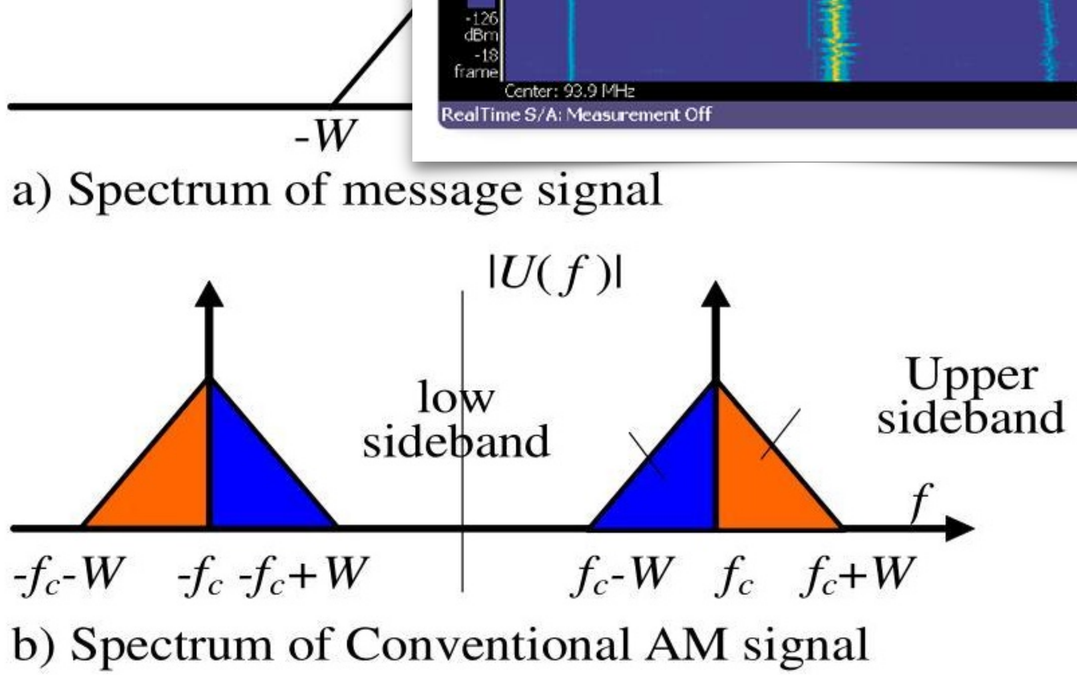
# Transformada de Fourier

## Aplicações em Telecom

- Modulação de Sinais (“portadora”)
  - Análise de largura de banda de sinais.
  - Modulação AM e FM.
  - Identificação de portadoras e bandas laterais.
  - Multiplexação por divisão de frequência.
  - OFDM, empregado em Wi-Fi e sistemas celulares 4G/5G.
  - Análise de interferências entre canais de comunicação.



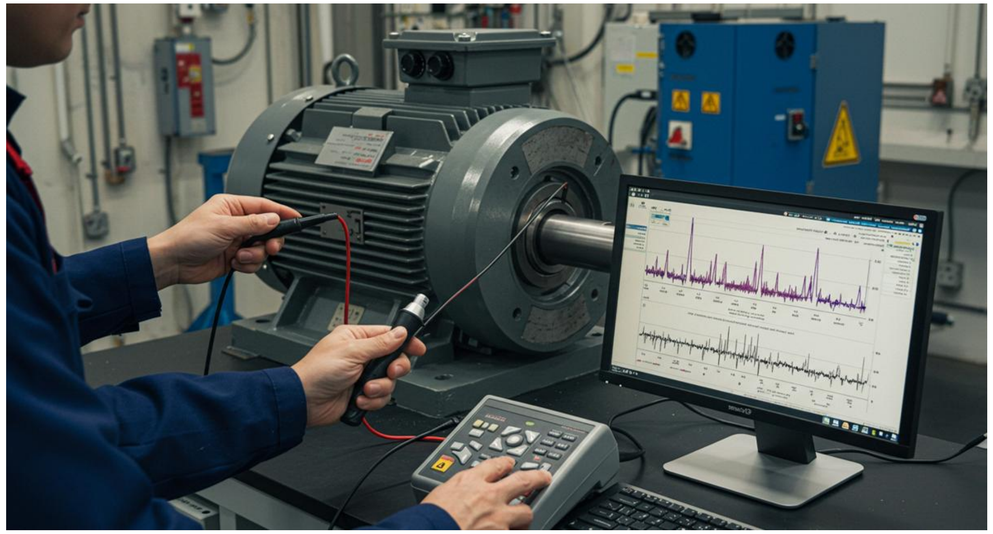

**Conventional**



# Transformada de Fourier

## Aplicações em Automação

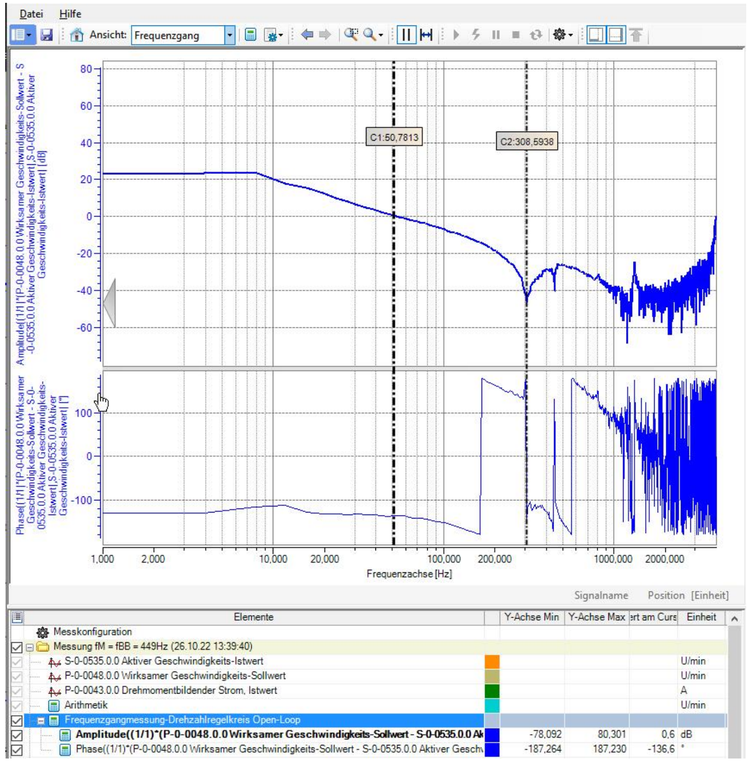
- Monitoramento vibrações (Diagnóstico de máquinas e manutenção preditiva.)



O sinal adquirido é submetido à FFT.

O espectro pode revelar:

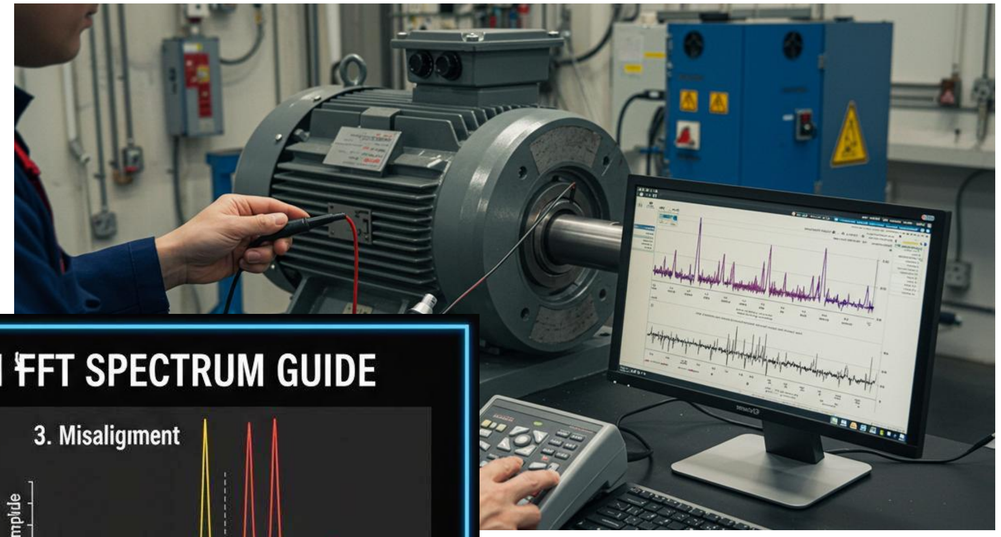
- Frequência de rotação do eixo.
- Harmônicos da rotação.
- Frequências características de defeitos em rolamentos.
- Desbalanceamento mecânico.
- Problemas de alinhamento.
- Ressonâncias estruturais.

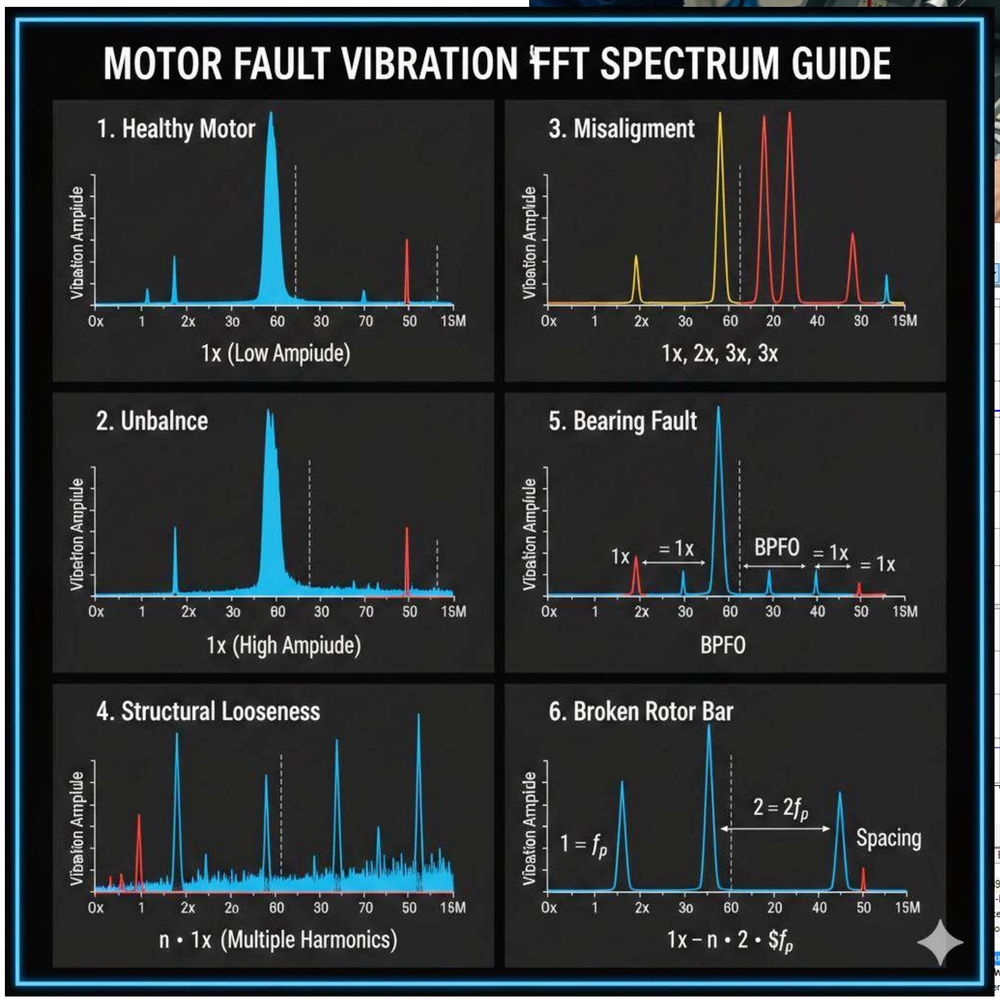


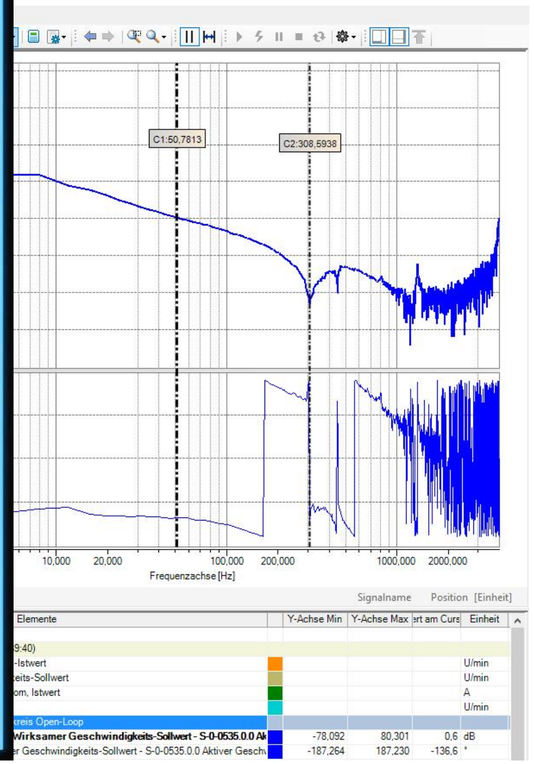
# Transformada de Fourier

## Aplicações em Automação

- Monitoramento vibrações (Diagnóstico de máquinas e manutenção preditiva.)





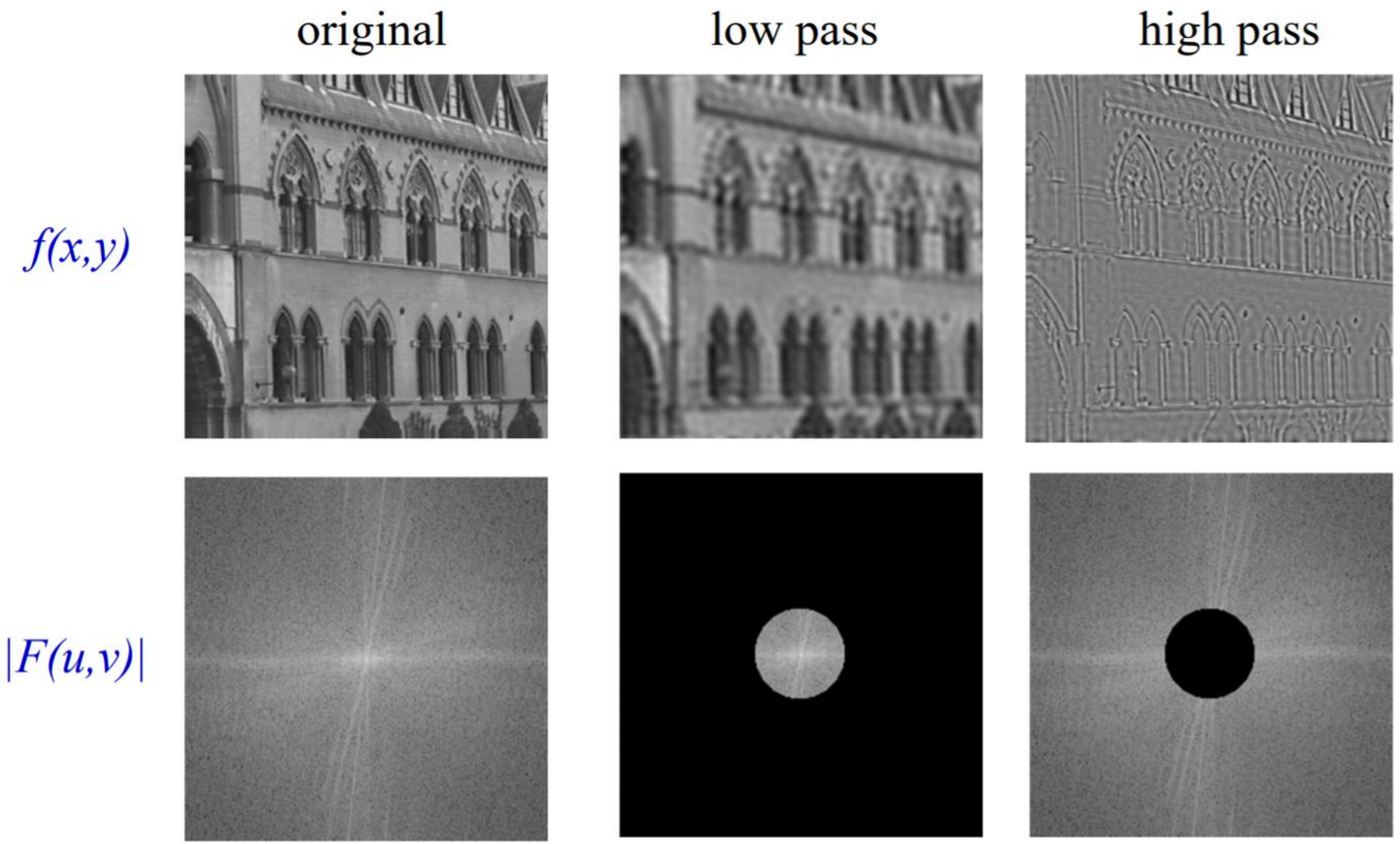

O sinal adquirido é submetido à FFT.

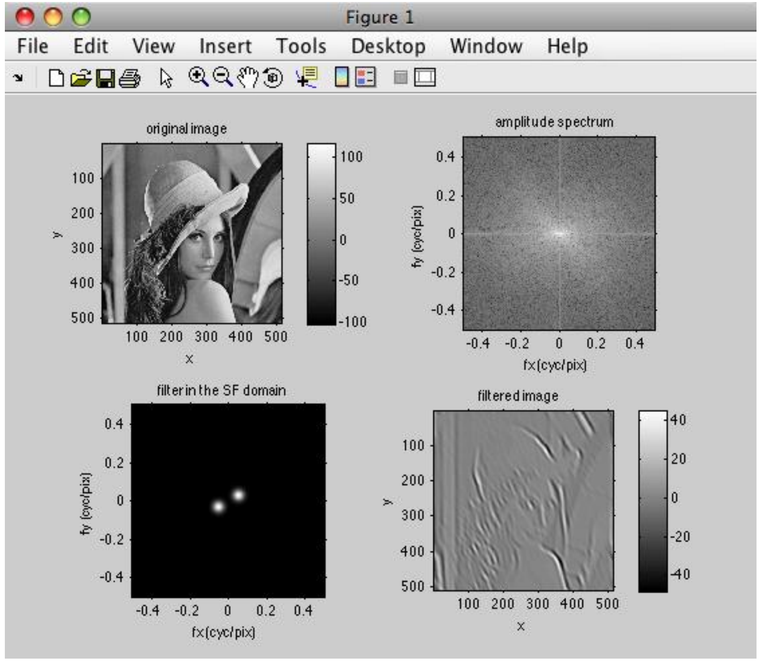
O espectro pode revelar:

- Frequência de rotação do eixo.
- Harmônicos da rotação.
- Frequências características de defeitos em rolamentos.
- Desbalanceamento mecânico.
- Problemas de alinhamento.
- Ressonâncias estruturais.

# Transformada de Fourier

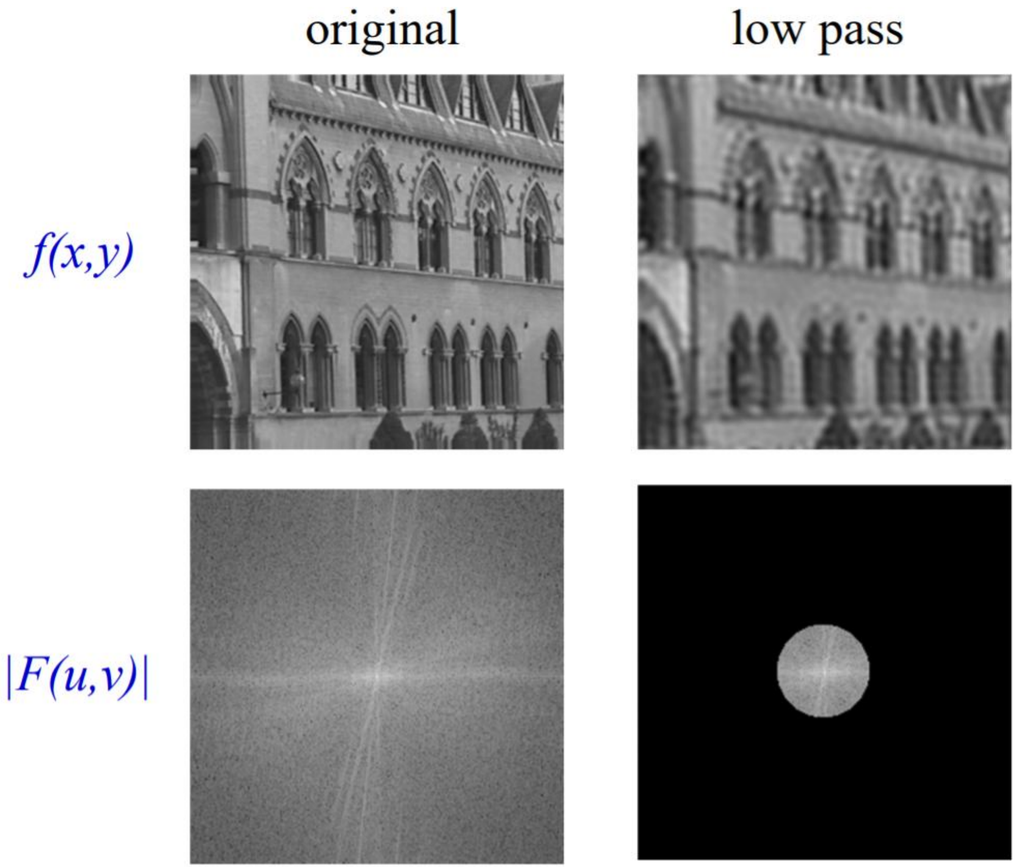
## Aplicações em Processamento de Imagens

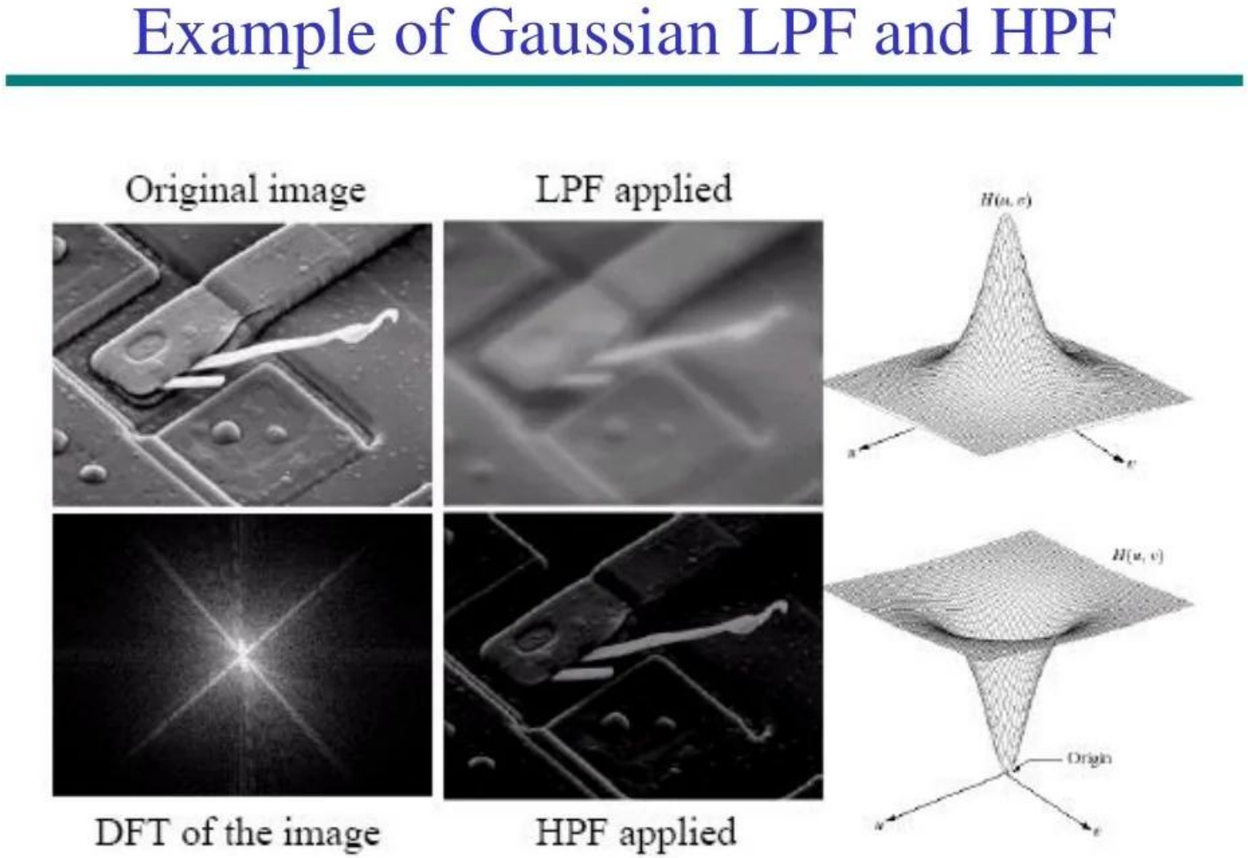


# Transformada de Fourier

## Aplicações em Processamento de Imagens



# Transformada de Fourier

## Aplicações em Processamento de Imagens

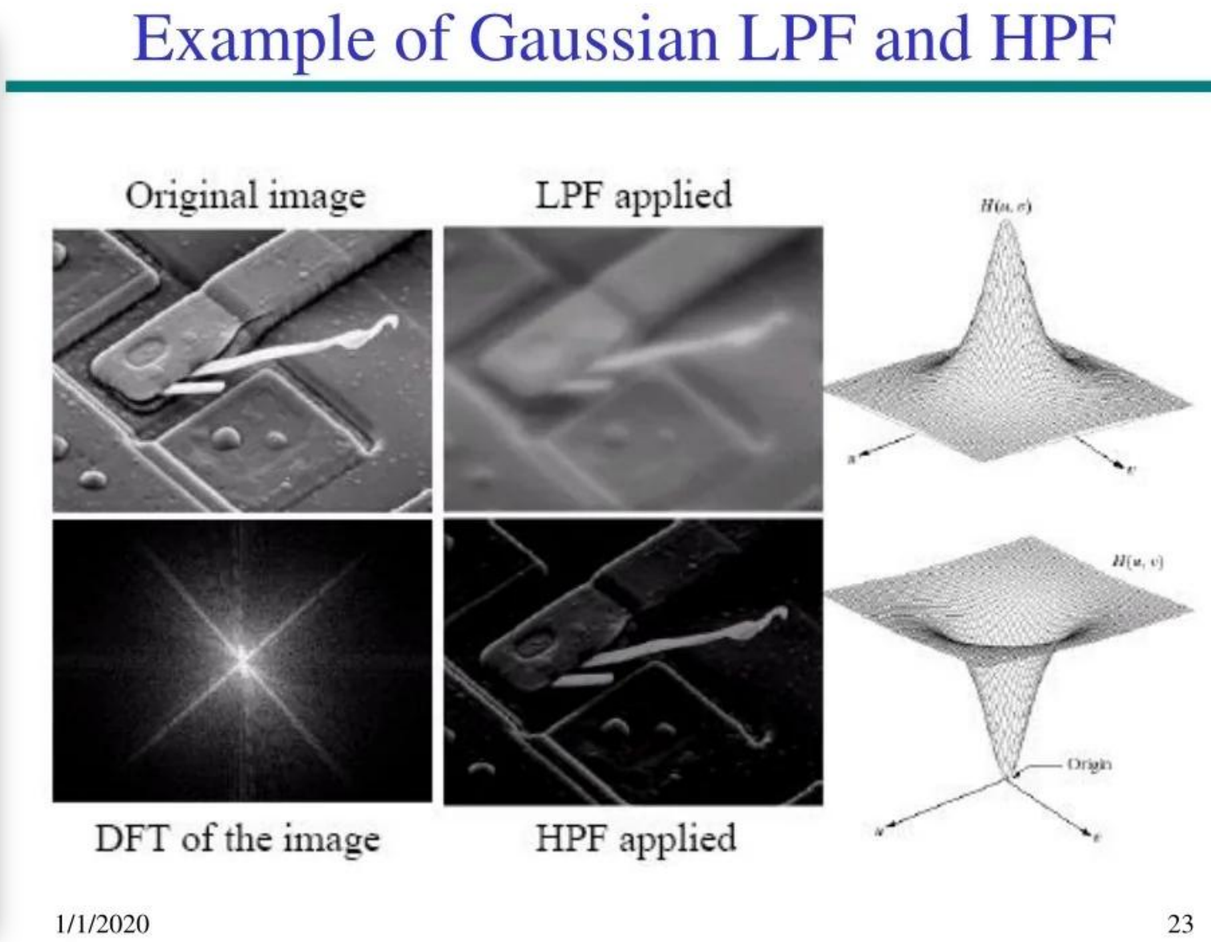
Aplicações:

A Transformada de Fourier bidimensional permite identificar componentes espaciais:

- Baixas frequências espaciais: variações lentas de intensidade, grandes regiões e iluminação.
- Altas frequências espaciais: bordas, detalhes e texturas.

Aplicações:

- Remoção de padrões periódicos indesejados em imagens.
- Filtragem de ruído.
- Realce de bordas.
- Compressão e processamento de imagens.
- Reconstrução de imagens médicas.



# Transformada de Fourier

## Problema Proposto

Um circuito eletrônico está recebendo um sinal contaminado por interferência elétrica.
Como identificar a origem do problema?

Imagine que temos algo como:

$$x(t) = \sin(2\pi 100t) + 0{,}4\sin(2\pi 60t) + n(t)$$

Onde:

- 100 Hz: sinal útil.
- 60 Hz: interferência elétrica.
- $n(t)$: ruído aleatório (*noise*).

O sinal medido no osciloscópio pode parecer relativamente complicado.

No entanto, o espectro mostrará dois picos importantes: 60 Hz e 100 Hz.

Idéia ➠ Simular o sinal e obter espectros usando Octave/Matlab

# Sugestões

- YouTube, Prof. UFMG, Luis Antonio Aguirre, Transformada de Fourier (ELT007, ELT060, ELT088): https://youtu.be/vDSN2sLF3gM (16:38, 19.515 visualizações,  19 de set. de 2017). Apresenta-se a transformada (direta e inversa) de Fourier por analogia com a série para o caso de sinais com período tendendo a infinito (portanto, aperiódicos). Ilustra-se o uso da transformada de Fourier com dois exemplos.

- YouTube, Prof. UFMG, Luis Antonio Aguirre, Transformada Fourier: Existência (ELT007, ELT060, ELT088): https://youtu.be/9i3c1YkrDkI (12:37, 8.704 visualizações, 6 de out. de 2017). Discute-se sob que a integral de Fourier converge para sinais de energia. Sinais periódicos são sinais de potência para os quais a integral de Fourier não converge. Contudo, mostra-se que para tais sinais (usamos como exemplo as funções cos wt e sen wt) é possível  encontrar uma representação no domínio de frequência, ou seja, é possível encontrar o "par sinal e transformada de Fourier" para tais sinais.

- YouTube, Prof. UFMG, Luis Antonio Aguirre, Transformada de Fourier: Propriedades 1 (ELT007, ELT060, ELT088): https://youtu.be/EvnxPJKNOO4 (10:11, 12.934 visualizações,  3 de out. de 2017). As propriedades de linearidade (princípio de superposição) e de deslocamento no tempo para o caso da Transformada de Fourier são ilustradas por meio de um exemplo.

- YouTube, Prof. UFMG, Luis Antonio Aguirre, Transformada de Fourier: Propriedades 2 (ELT007, ELT060, ELT088): https://youtu.be/AmeZHZRZTUw (11:32, 8.869 visualizações  3 de out. de 2017). A convolução entre dois sinais no tempo corresponde ao produto de suas respectivas Transformadas de Fourier. Essa propriedade é utilizada para encontrar a saída de um sistema LIT a partir de sua resposta ao impulso e da entrada, sem usar a convolução. Nesse exemplo fazemos a decomposição em frações parciais para o caso de raízes reais e diferentes. Mostra-se como resolver o problema no caso de raízes iguais utilizando uma outra propriedade da Transformada de Fourier.