

DFT e FFT

Sistemas Amostrados

Fernando Passold

DFT: Discrete Fourier Transform

Introdução

$$X(j\omega) \equiv \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Expressão:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\, k\, n/N}$$

Transformação matemática: recebe uma sequência de amostras de um sinal e produz outra sequência que representa suas componentes espectrais.

Onde:

$x[n]$: amostras do sinal no domínio do tempo;

$X[k]$: componentes espectrais;

N: número de amostras;

k: índice da componente de frequência.

"Problema":

Se sabemos que um sinal é composto por várias senóides, como podemos descobrir quais frequências estão presentes nele sem precisar realizar uma quantidade enorme de operações matemáticas?

Cálculo dos Coeficientes de Fourier

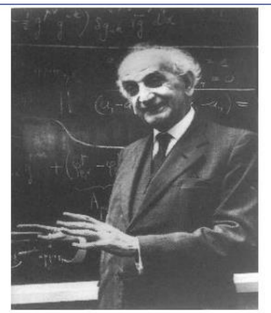
Existe maneira eficiente de calculá-los?

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

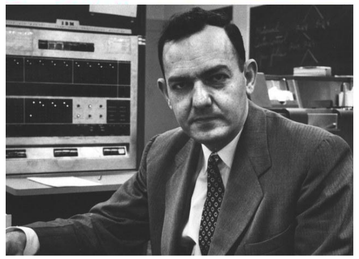
- Carl Friedrich Gauss (1777–1855)
  - Em torno de 1805, Gauss desenvolveu métodos equivalentes àquilo que hoje reconhecemos como algoritmos rápidos para calcular somas trigonométricas, no contexto de problemas de interpolação e astronomia. Seu trabalho não teve a divulgação que teria uma publicação moderna.
- Danielson e Lanczos (1942)
  - Publicaram um método de decomposição que permitia calcular coeficientes de Fourier com menos operações, explorando a simetria e a periodicidade das funções trigonométricas.
- James Cooley e John Tukey (1965)
  - Publicaram o algoritmo que ficou conhecido como Cooley–Tukey FFT, tornando a computação eficiente da DFT muito mais conhecida e influente.







Some Improvements in Practical Fourier Analysis and their Application to X-ray Scattering from Liquids (1942).

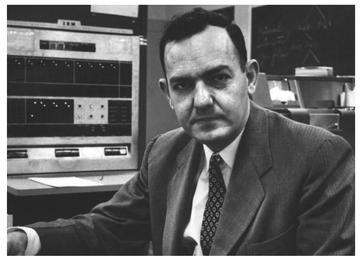


Cálculo dos Coeficientes de Fourier

Existe maneira eficiente de calculá-los?

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

- James Cooley e John Tukey (1965)
  - Publicaram o algoritmo que ficou conhecido como Cooley–Tukey FFT, tornando a computação eficiente da DFT muito mais conhecida e influente.
  - Artigo de 1965: havia grande interesse em processamento de sinais, análise espectral, radar e aplicações científicas.
    - **Cooley, J. W.; Tukey, J. W. (1965)**. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. Mathematics of Computation, vol. 19, pp. 297–301.
  - Ideia central: reduzir o custo computacional de calcular os coeficientes de Fourier, que se tornava proibitivo para sequências grandes.



Fato histórico:

a FFT não nasceu exclusivamente para processamento de áudio ou telecomunicações. Uma motivação importante para seu desenvolvimento e divulgação nos anos 1960 foi a necessidade de realizar análises espectrais de dados sísmicos, inclusive para investigar a possibilidade de detectar explosões nucleares subterrâneas sem inspeções presenciais. Richard Garwin, John Tukey e James Cooley tiveram participação nessa história. Também havia aplicações em física, como cálculos envolvendo orientações de spins nucleares.

FFT

A ideia por trás: “*Divide-to-conquer*”..

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Suponha apenas 8 amostras de um sinal:

$x[0], x[1], x[2], \ldots, x[7]$

Para calcular a DFT de 8 pontos diretamente, precisamos calcular 8 somatórios, cada um contendo 8 termos.

São 64 multiplicações complexas e aproximadamente 64 somas complexas, considerando a implementação direta.

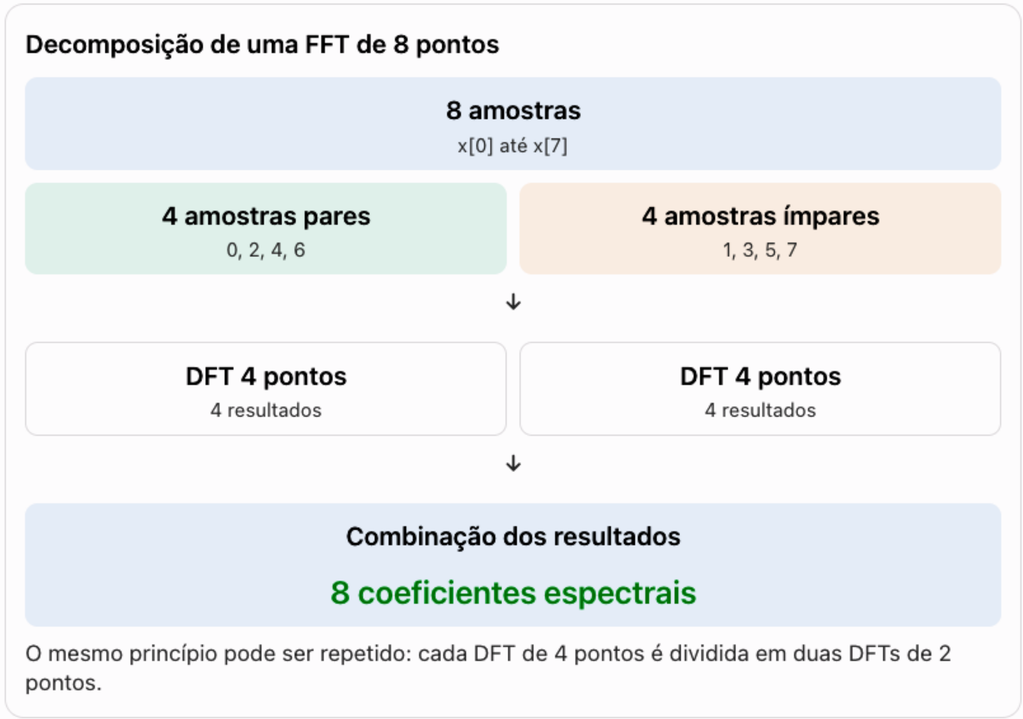
Mas... note uma coisa: podemos separar as amostras em duas sequências:

- Sequência par:
  $x[0], x[2], x[4], x[6]$
- Sequência ímpar:
  $x[1], x[3], x[5], x[7]$

Agora calculamos duas DFTs menores, cada uma com apenas 4 pontos.

Depois combinamos os resultados.

A “mágica” ➠ possibilidade de reutilizar cálculos e explorar as propriedades das exponenciais complexas.



FFT

Origem

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Propriedades das exponenciais complexas...

A expressão matemática que sintetiza essa ideia é:

$$\begin{aligned} X[n] &= X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n] \\ X[n+N/2] &= X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n] \end{aligned}$$

Onde: $W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\,n\,k}{N}}$

$X_E[k] =$ DFT das amostras pares e $X_O[k] =$ FTT amostras ímpares.

Essas duas expressões são o coração da **FFT radix-2**, conhecida também como algoritmo de Cooley–Tukey.

A operação de combinação é frequentemente chamada de ***Butterfly*** (borboleta), por causa do formato do diagrama utilizado para representar as operações.

FFT

Origem

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Propriedades das exponenciais complexas...

A expressão matemática que sintetiza essa ideia é:

$$\begin{aligned} X[n] &= X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n] \\ X[n+N/2] &= X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n] \end{aligned}$$

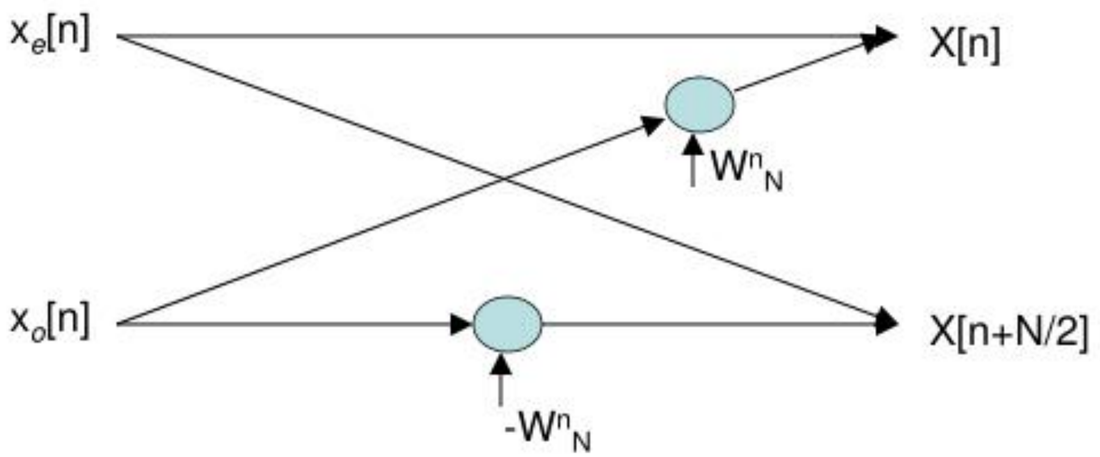
Onde: $W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\,n\,k}{N}}$

$X_E[k]$ = DFT das amostras pares e $X_O[k]$ = FTT amostras ím

Essas duas expressões são o coração da **FFT radix-2**, conhec

A operação de combinação é frequentemente chamada de *B*
diagrama utilizado para representar as operações.

Operações simples, repetidas algumas vezes:

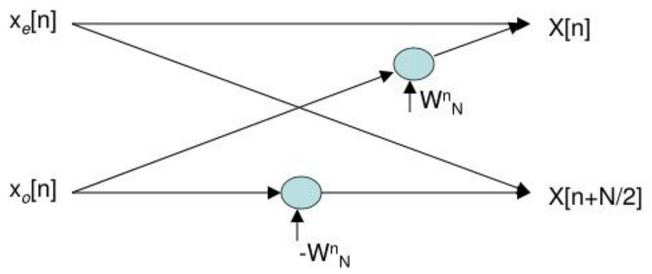


$$W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\,n\,k}{N}}$$

FFT

Origem

Operações simples, repetidas algumas vezes:



$$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi\, n\, k}{N}}$$

Propriedades das expone

A expressão matemática que sintetiza essa ideia é:

$$X[n] = X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n]$$
$$X[n+N/2] = X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n]$$

Onde: $W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi\, n\, k}{N}}$

$X_E[k]$ = DFT das amostras pares e $X_O[k]$ = FTT amostras ímpares

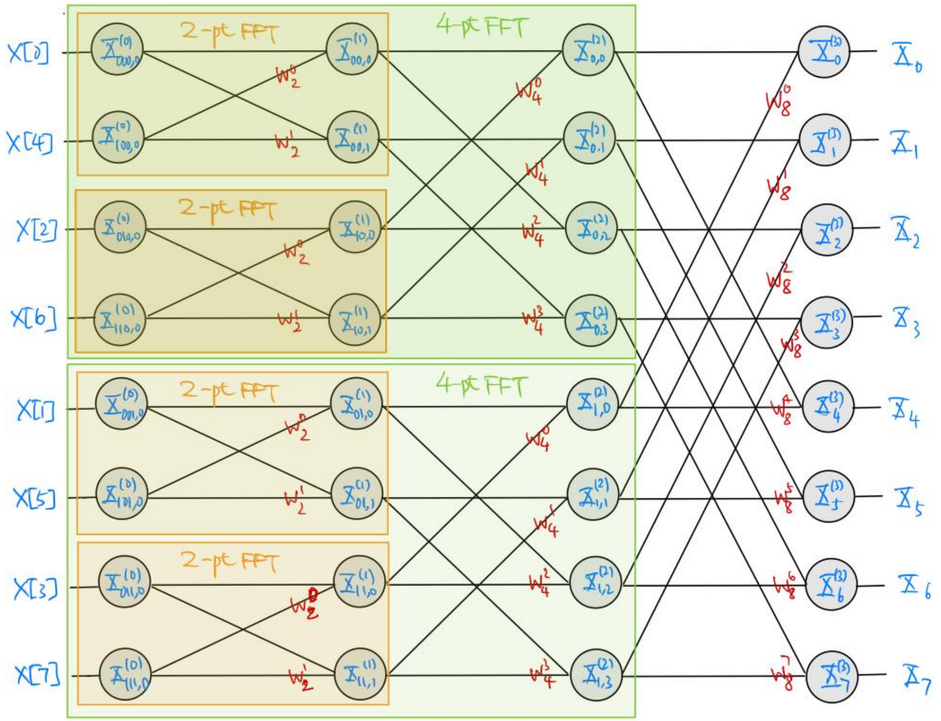
Essas duas expressões são o coração da **FFT radix-2**, conhecida ta

A operação de combinação é frequentemente chamada de ***B***
diagrama utilizado para representar as operações.

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Visualização algoritmo Butterfly:



Fonte: 5.3. Fast Fourier Transform, Tan F. Wong, 2023.
URL: https://tanfwong.github.io/dsp_notes/ch5/fft.html

FFT

Exemplo: Aplicando o algoritmo Radix-2

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left(\frac{2\pi n}{8}\right) + 0{,}5\,\sin\left(\frac{4\pi n}{8}\right)$$

Se escolhemos apenas 8 amostras, teremos:

$$x[0], x[1], \ldots, x[7]$$

Dividindo as amostras:

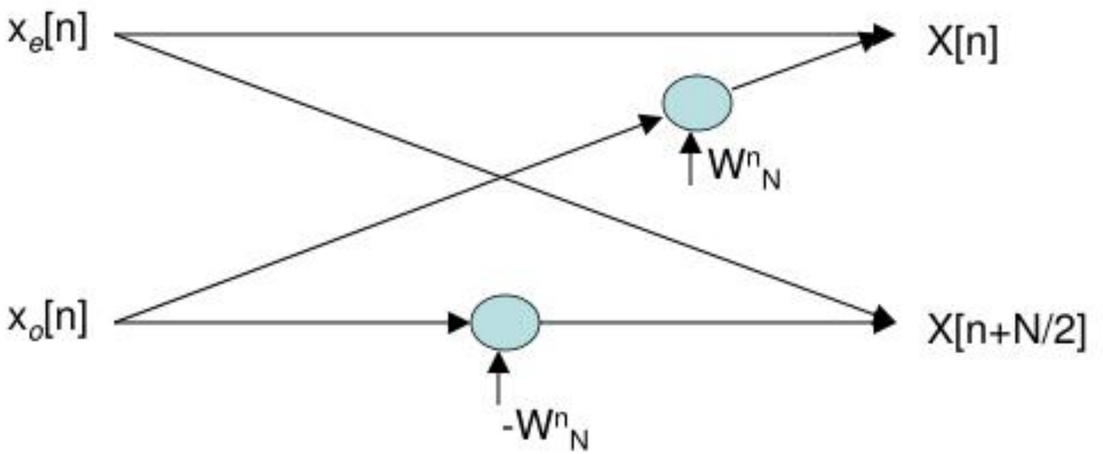
Pares: $X_E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

Ímpares: $X_O[k] = [0, -0.20711, -1, -1.2071]$

Calculando:

$$\begin{aligned} X[n] &= X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n] \\ X[n+N/2] &= X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n] \end{aligned}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



$$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi\,n\,k}{N}}$$

FFT

Exempl

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left($$

Se escolhem

$$x[0], x[1], \ldots$$

Dividindo as

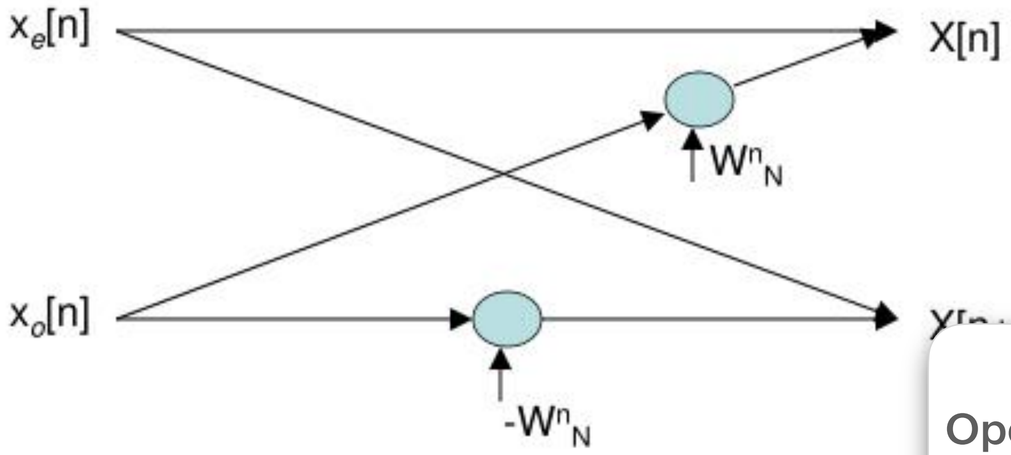
Pares: $X_E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

Ímpares: $X_O[k] = [0, -0.20711, -1, -1.2071]$

Calculando:

$$\begin{aligned} X[n] &= X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n] \\ X[n+N/2] &= X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n] \end{aligned}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



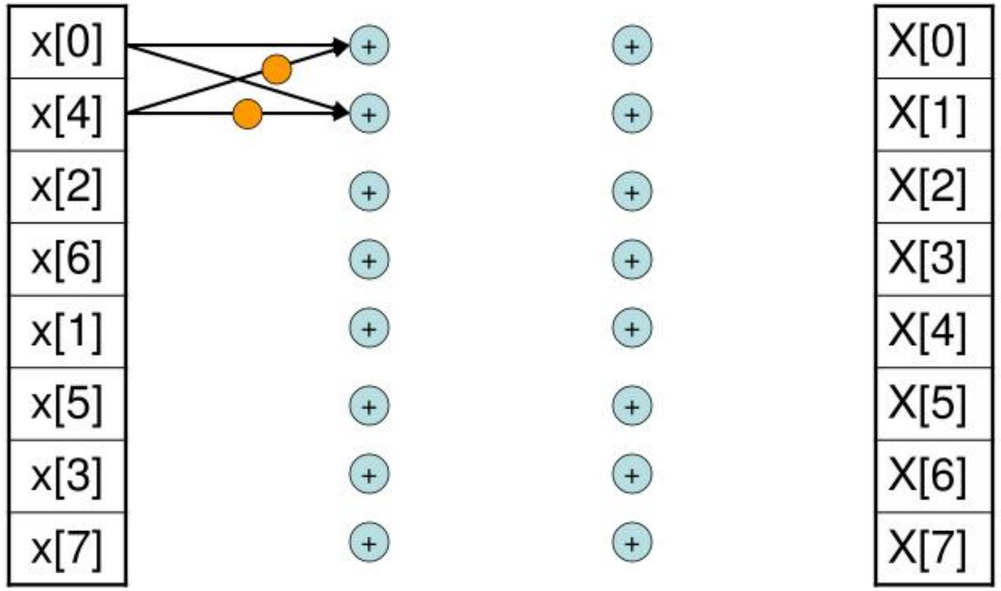
$$W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\,n\,k}{N}}$$

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

⇐ Neste caso: $W_8^k = e^{-j\frac{2\pi}{8}k}$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



● = multiplicação pelo fator W.

FFT

Exempl

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left($$

Se escolhem

$$x[0], x[1], \ldots$$

Dividindo as

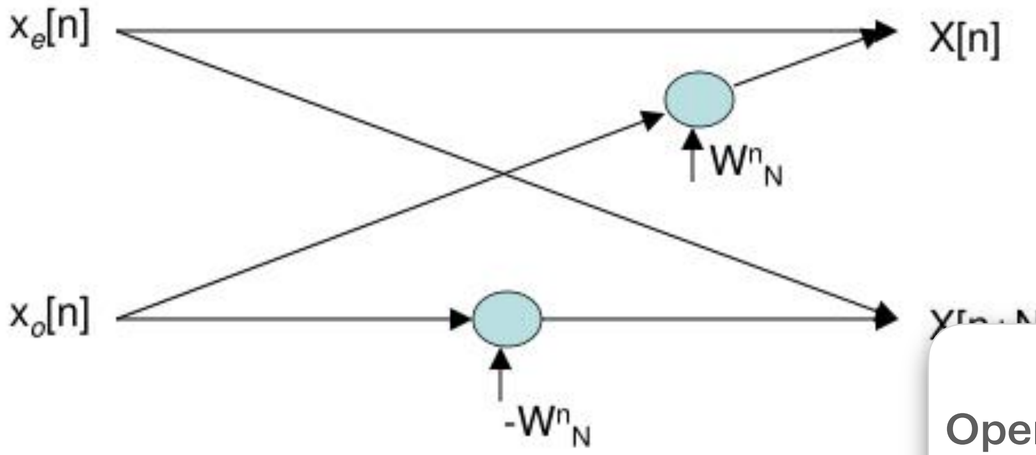
Pares: $X_E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

Ímpares: $X_O[k] = [0, -0.20711, -1, -1.2071]$

Calculando:

$$\begin{aligned} X[n] &= X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n] \\ X[n+N/2] &= X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n] \end{aligned}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



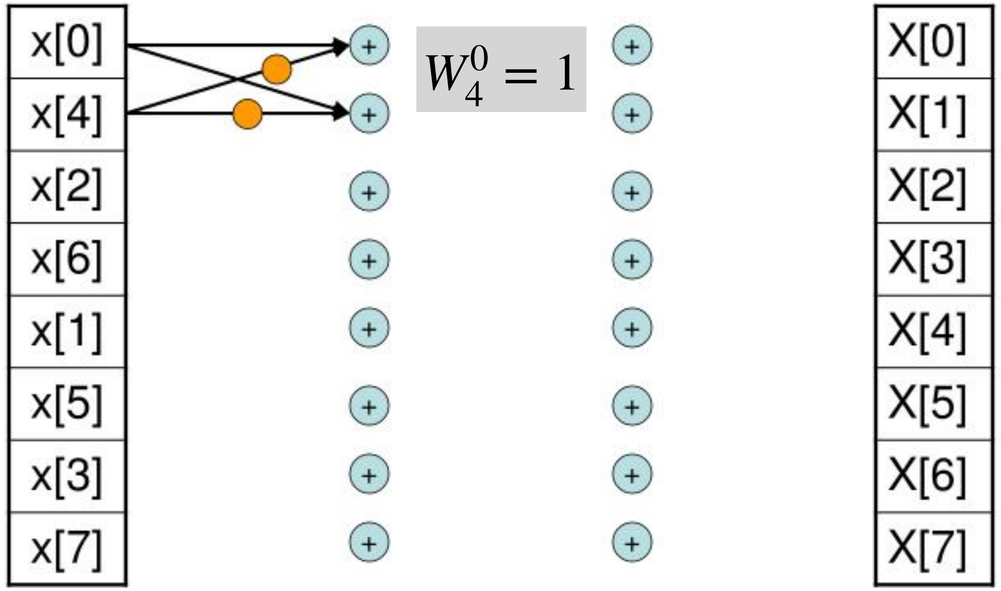
$$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

⇐ Neste caso: $W_8^k = e^{-j\frac{2\pi}{8}k}$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



● = multiplicação pelo fator W.

FFT

Exempl

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left($$

Se escolhem

$$x[0], x[1], \ldots$$

Dividindo as

Pares: $E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

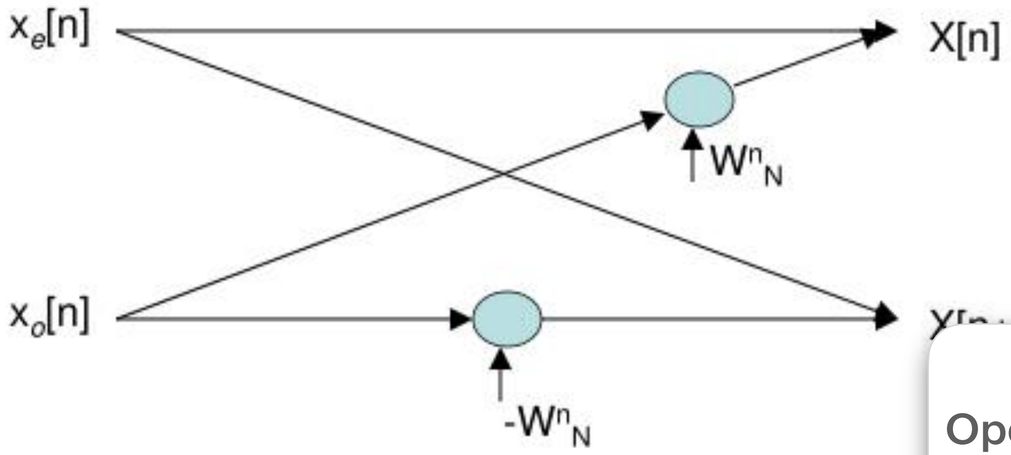
Ímpares: $O[k] = [0, -0.20711, -1, -1.2071]$

Calculando:

$$X[n] = X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n]$$

$$X[n+N/2] = X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n]$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:

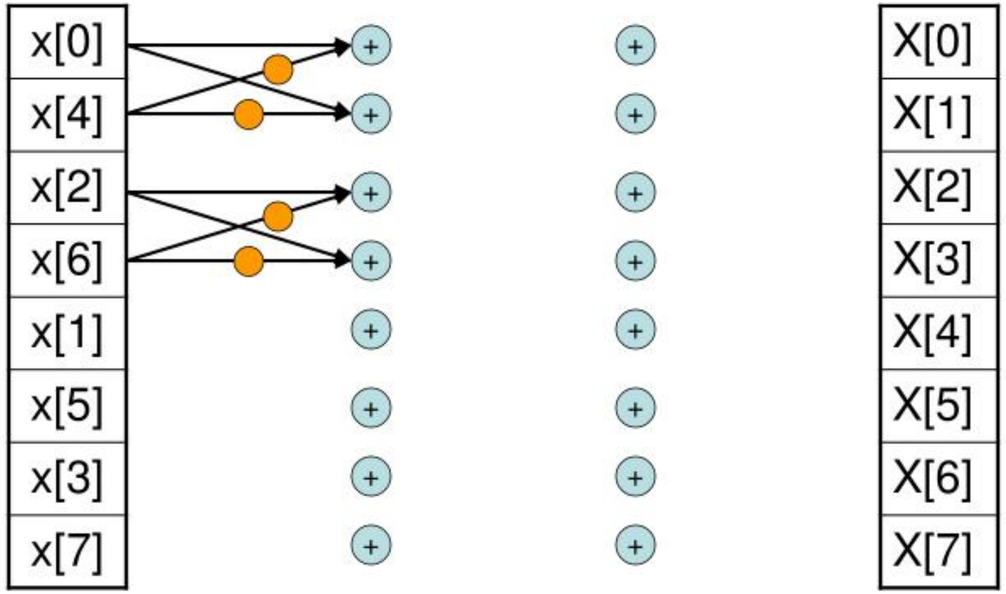


$$W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\, n\, k}{N}}$$

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



● = multiplicação pelo fator W.

FFT

Exempl y

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left($$

Se escolhem

$$x[0], x[1], \ldots$$

Dividindo as

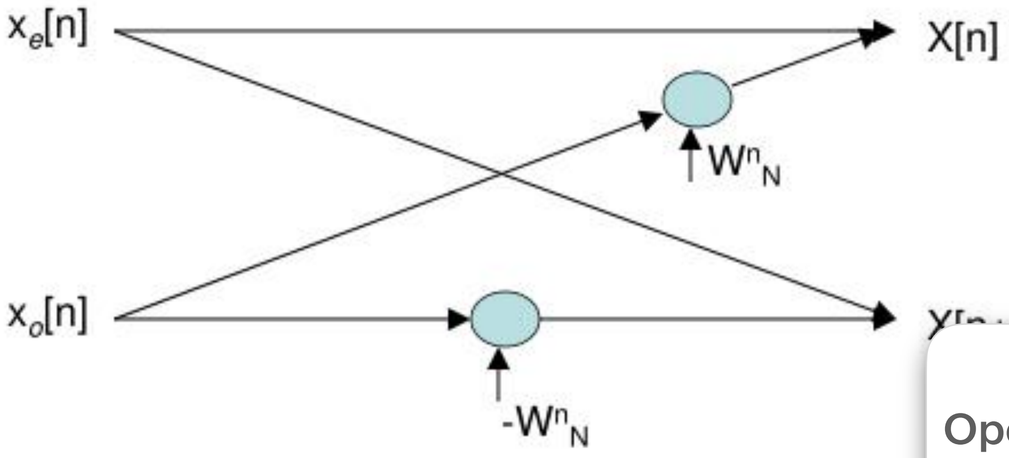
Pares: $E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

Ímpares: $O[k] = [0, -0.20711, -1, -1.2071]$

Calculando:

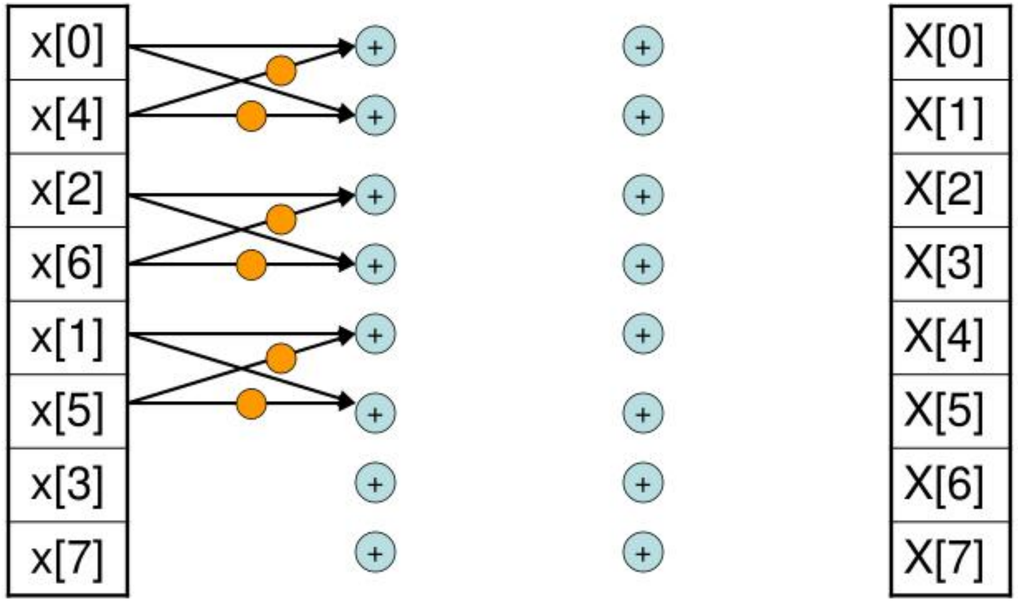
$$\begin{aligned} X[n] &= X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n] \\ X[n+N/2] &= X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n] \end{aligned}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



$$W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\,n\,k}{N}}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



● = multiplicação pelo fator W.

FFT

Exempl

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left($$

Se escolhem

$$x[0], x[1], \ldots$$

Dividindo as

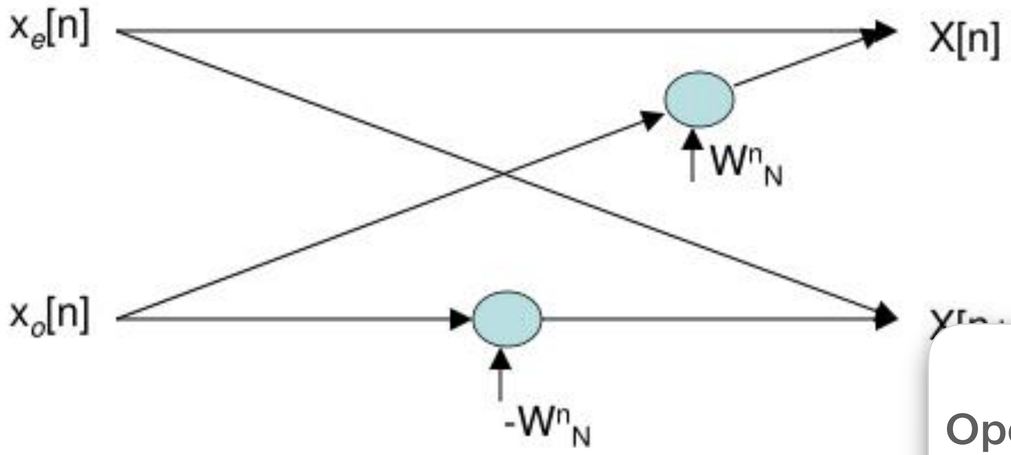
Pares: $E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

Ímpares: $O[k] = [0, -0.20711, -1, -1.2071]$

Calculando:

$$\begin{aligned} X[n] &= X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n] \\ X[n+N/2] &= X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n] \end{aligned}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:

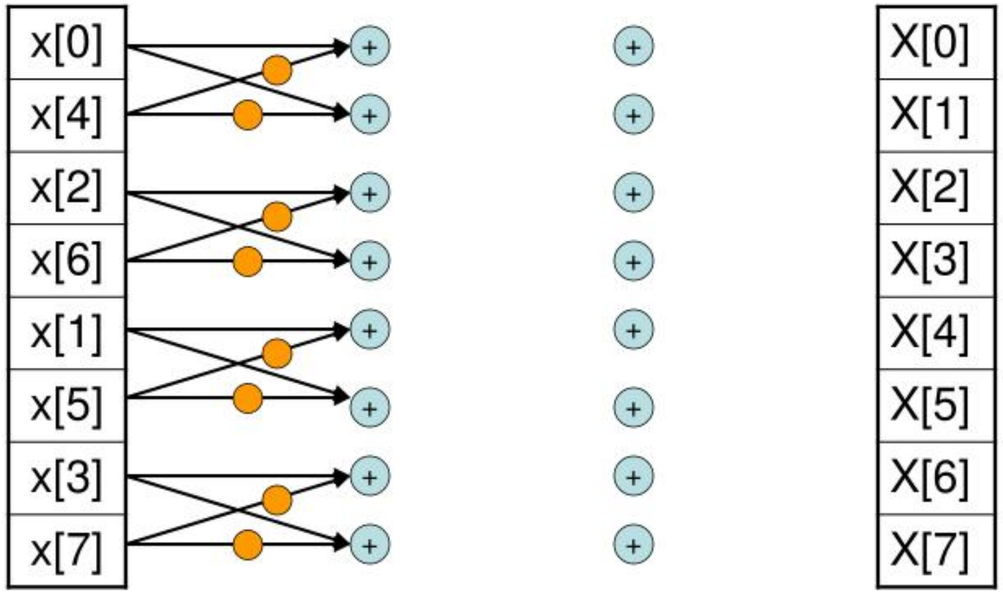


$$W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\, n\, k}{N}}$$

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



● = multiplicação pelo fator W.

FFT

Exempl y

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left($$

Se escolhem

$$x[0], x[1], \ldots$$

Dividindo as

Pares: $E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

Ímpares: $O[k] = [0, -0.20711, -1, -1.2071]$

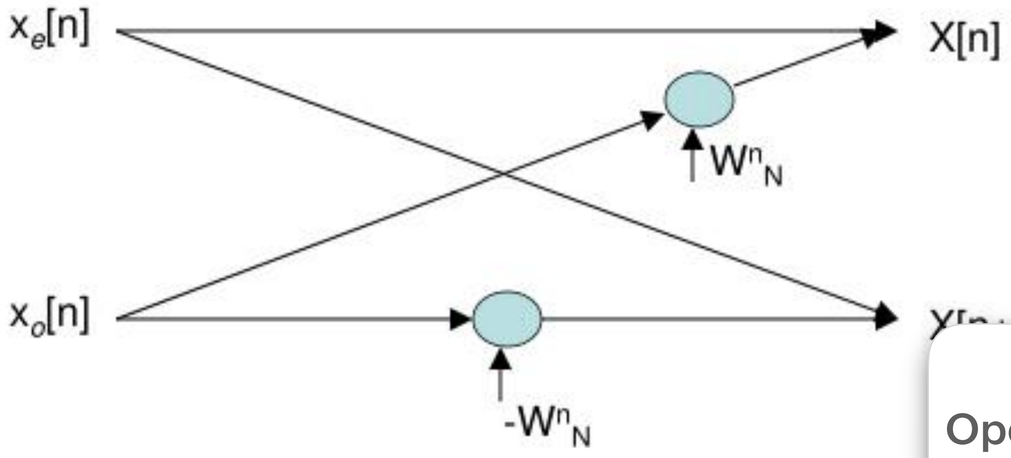
Calculando:

$$\begin{aligned} X[n] &= X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n] \\ X[n+N/2] &= X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n] \end{aligned}$$

Expressão da DFT:

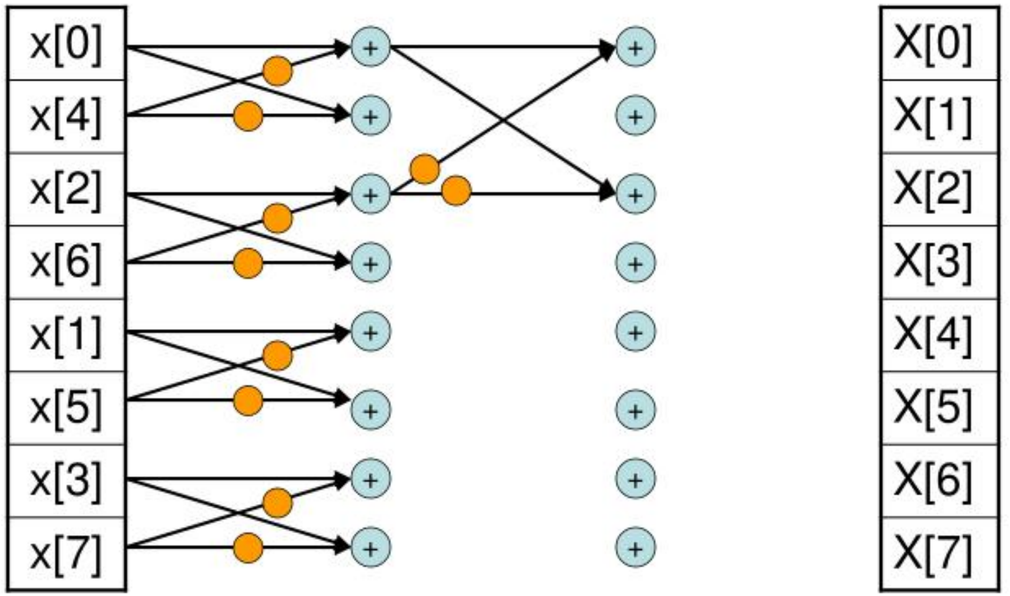
$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



$$W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\,n\,k}{N}}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



● = multiplicação pelo fator W.

FFT

Exempl y

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left($$

Se escolhem

$$x[0], x[1], \ldots$$

Dividindo as

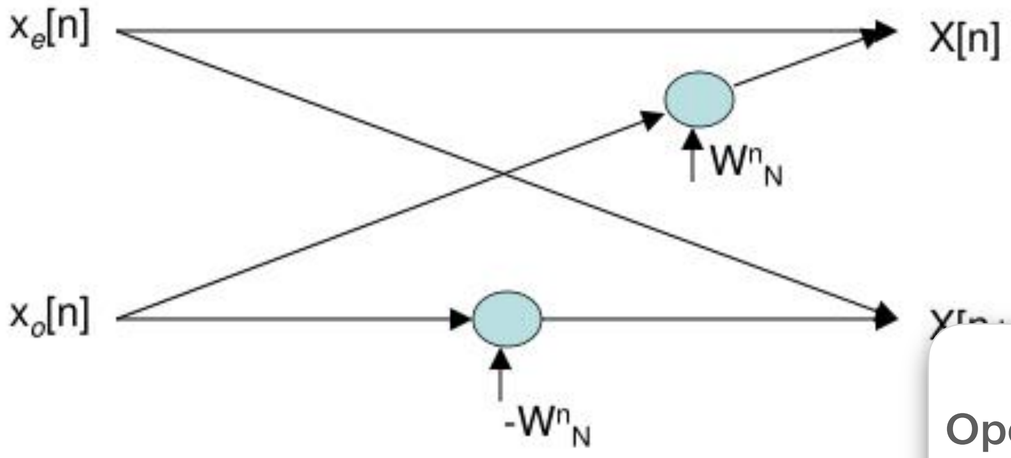
Pares: $E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

Ímpares: $O[k] = [0, -0.20711, -1, -1.2071]$

Calculando:

$$\begin{aligned} X[n] &= X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n] \\ X[n+N/2] &= X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n] \end{aligned}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:

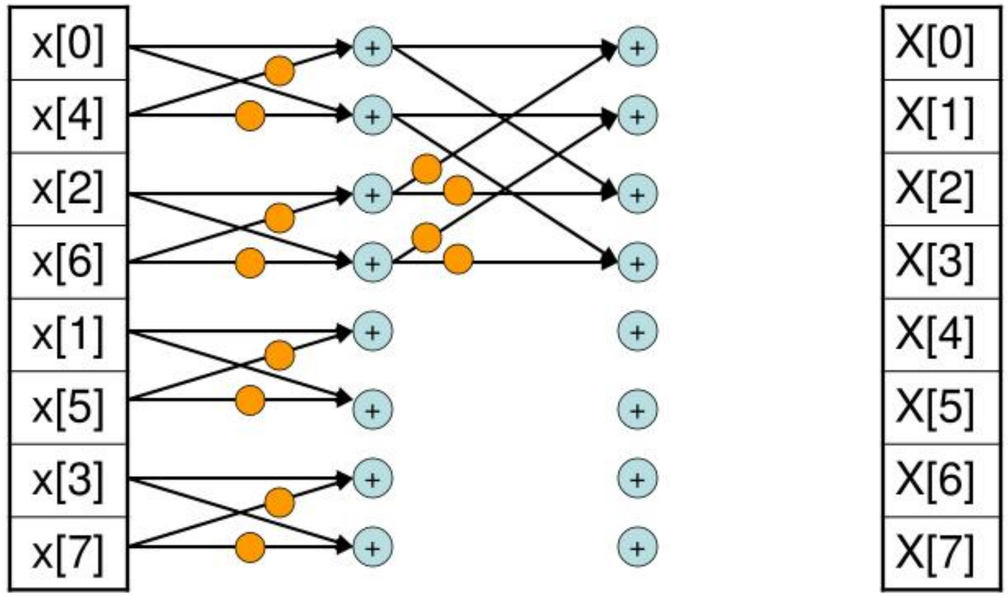


$$W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\, n\, k}{N}}$$

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



● = multiplicação pelo fator W.

FFT

Exempl y

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left($$

Se escolhem

$$x[0], x[1], \ldots$$

Dividindo as

Pares: $E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

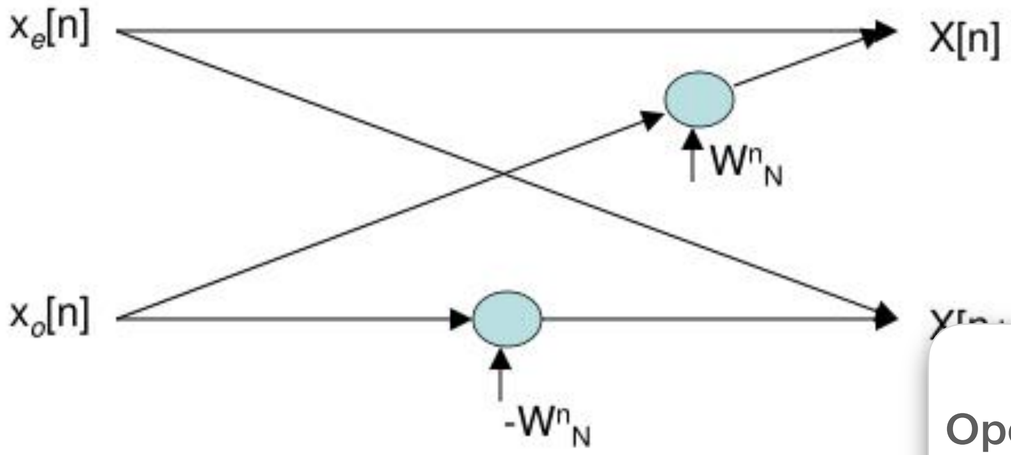
Ímpares: $O[k] = [0, -0.20711, -1, -1.2071]$

Calculando:

$$X[n] = X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n]$$

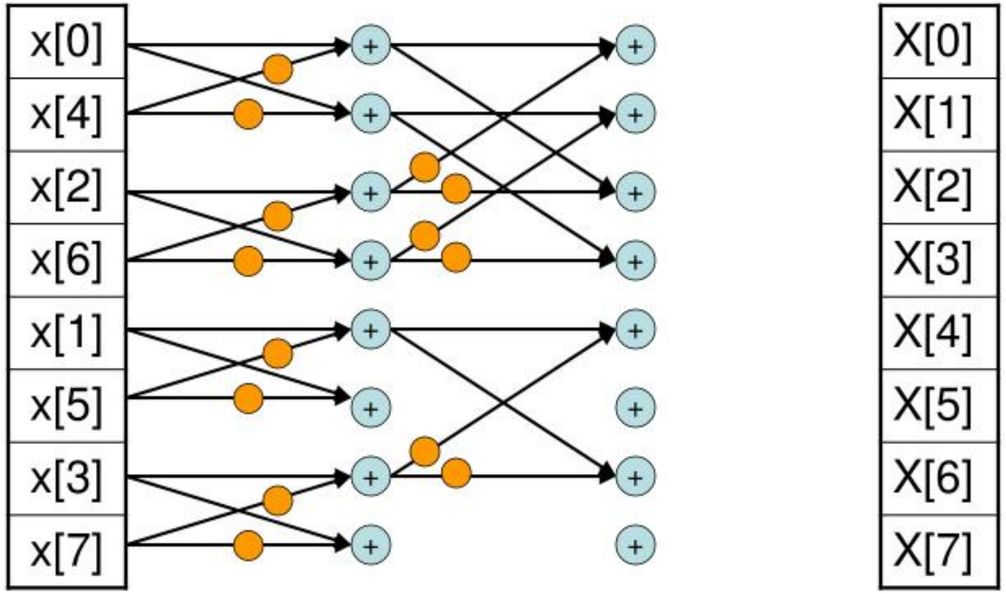
$$X[n+N/2] = X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n]$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



$$W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\,n\,k}{N}}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



● = multiplicação pelo fator W.

FFT

Exempl y

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left($$

Se escolhem

$$x[0], x[1], \ldots$$

Dividindo as

Pares: $E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

Ímpares: $O[k] = [0, -0.20711, -1, -1.2071]$

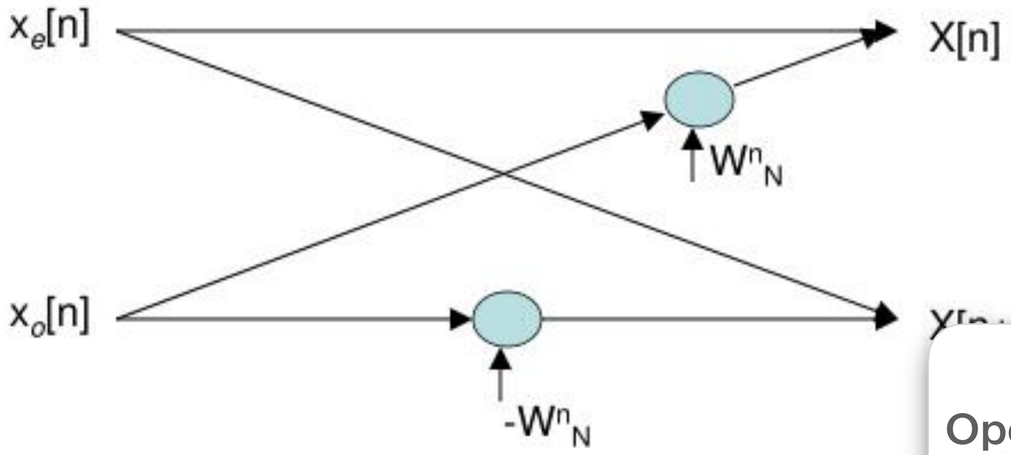
Calculando:

$$\begin{aligned} X[n] &= X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n] \\ X[n+N/2] &= X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n] \end{aligned}$$

Expressão da DFT:

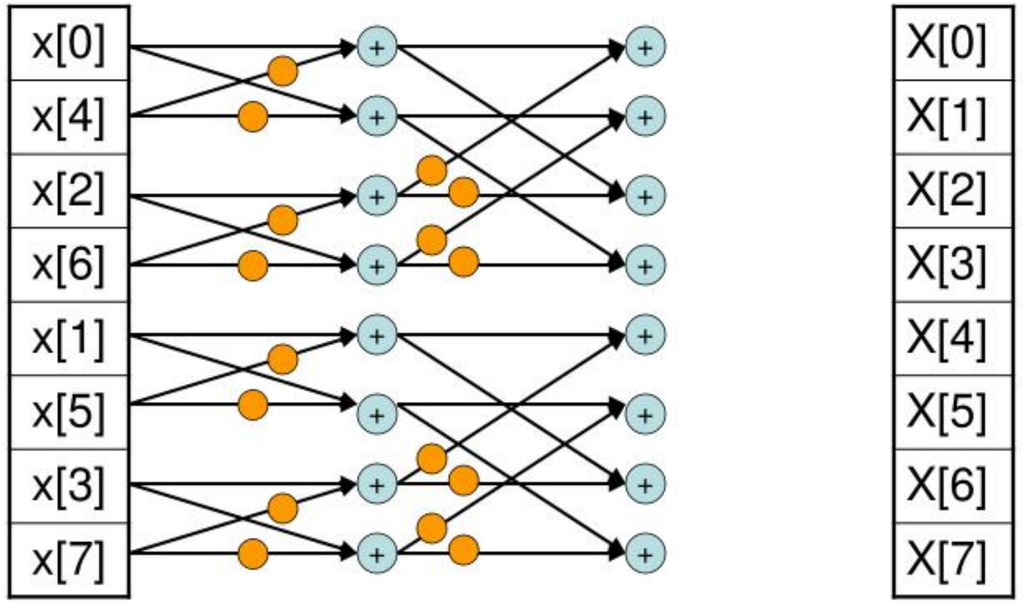
$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



$$W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\,n\,k}{N}}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



● = multiplicação pelo fator W.

FFT

Exempl y

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left($$

Se escolhem

$$x[0], x[1], \ldots$$

Dividindo as

Pares: $E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

Ímpares: $O[k] = [0, -0.20711, -1, -1.2071]$

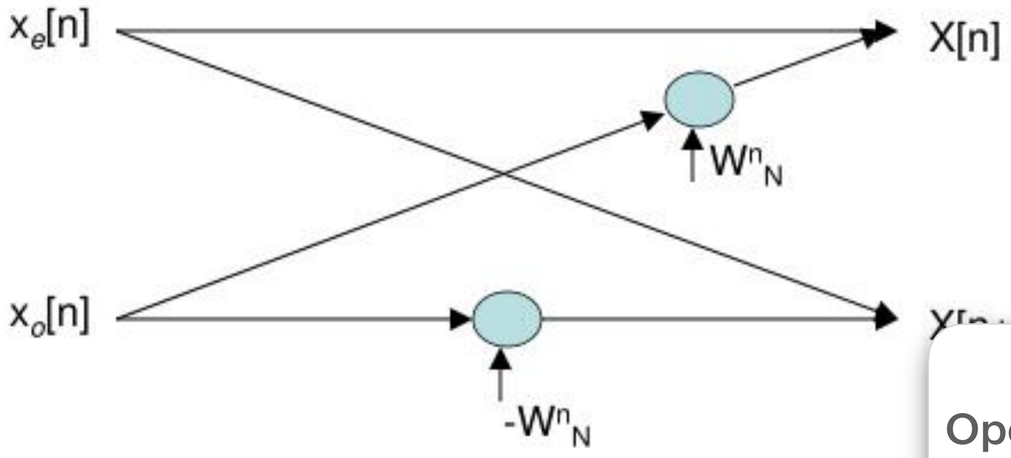
Calculando:

$$\begin{aligned} X[n] &= X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n] \\ X[n+N/2] &= X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n] \end{aligned}$$

Expressão da DFT:

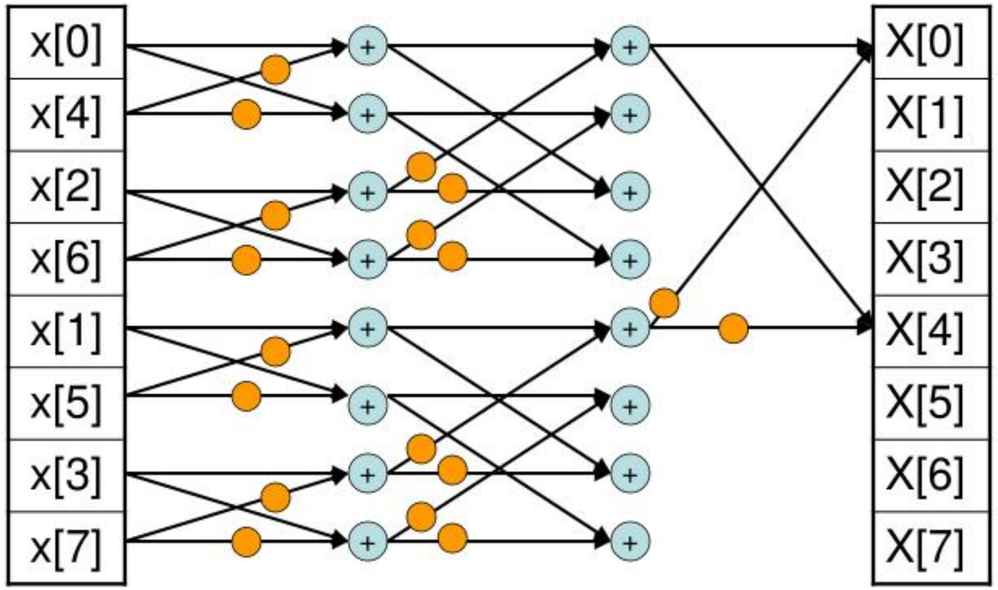
$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



$$W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\,n\,k}{N}}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



● = multiplicação pelo fator W.

FFT

Exempl y

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left($$

Se escolhem

$$x[0], x[1], \ldots$$

Dividindo as

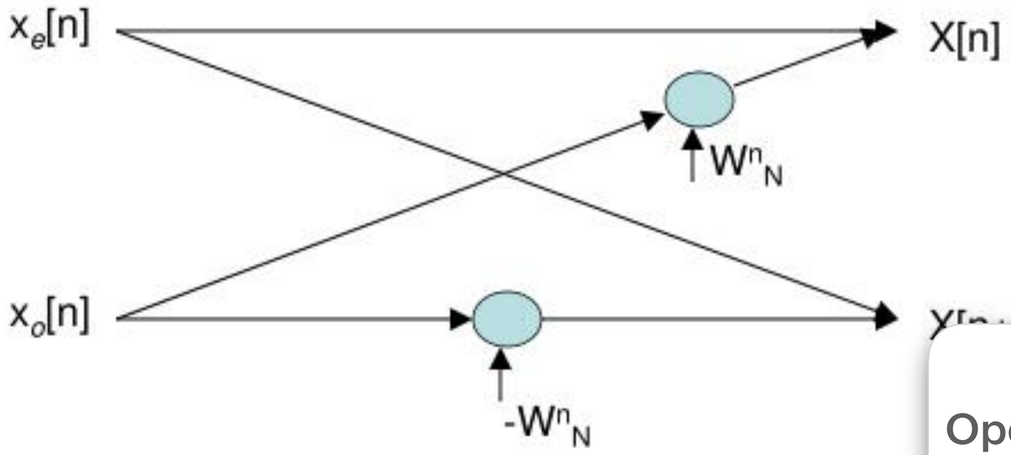
Pares: $E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

Ímpares: $O[k] = [0, -0.20711, -1, -1.2071]$

Calculando:

$$\begin{aligned} X[n] &= X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n] \\ X[n+N/2] &= X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n] \end{aligned}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:

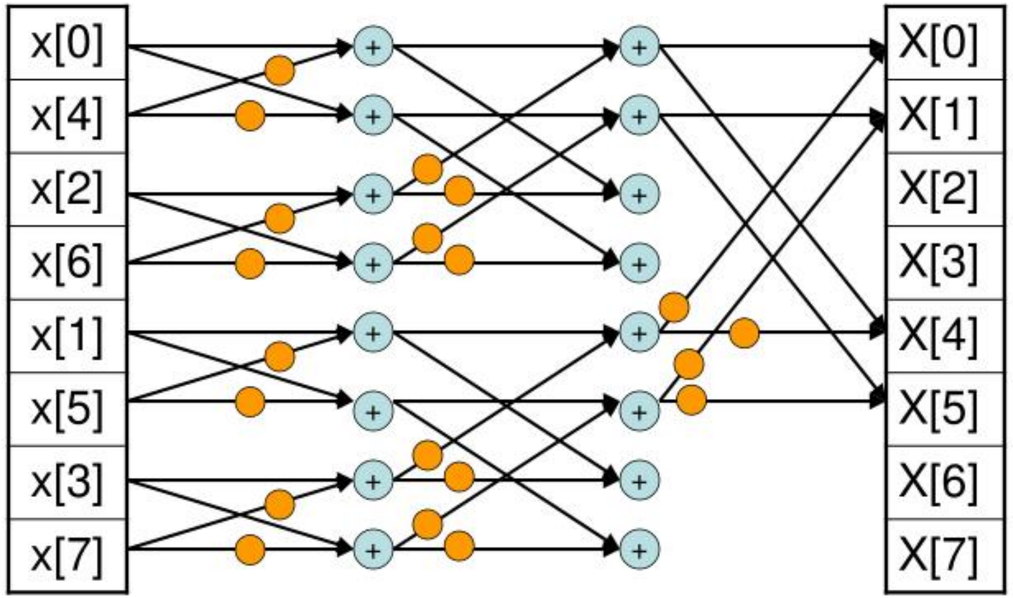


$$W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\, n\, k}{N}}$$

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



● = multiplicação pelo fator W.

FFT

Exempl y

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left($$

Se escolhem

$$x[0], x[1], \ldots$$

Dividindo as

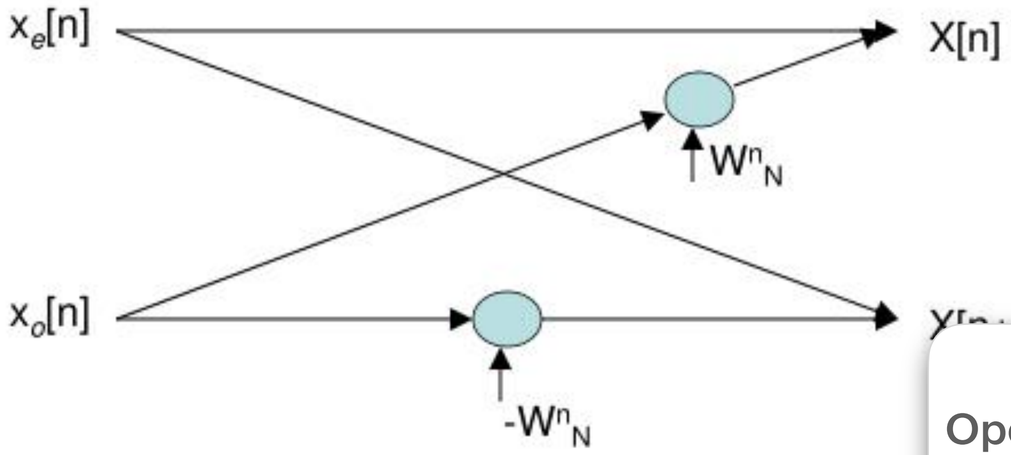
Pares: $E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

Ímpares: $O[k] = [0, -0.20711, -1, -1.2071]$

Calculando:

$$\begin{aligned} X[n] &= X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n] \\ X[n+N/2] &= X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n] \end{aligned}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:

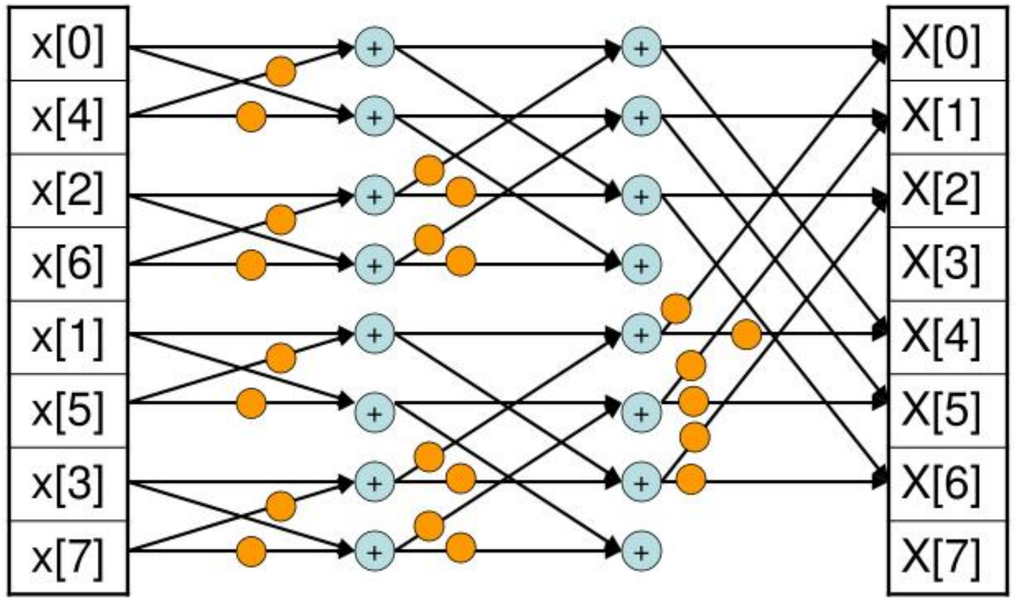


$$W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\, n\, k}{N}}$$

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



● = multiplicação pelo fator W.

FFT

Exempl y

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left($$

Se escolhem

$$x[0], x[1], \ldots$$

Dividindo as

Pares: $E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

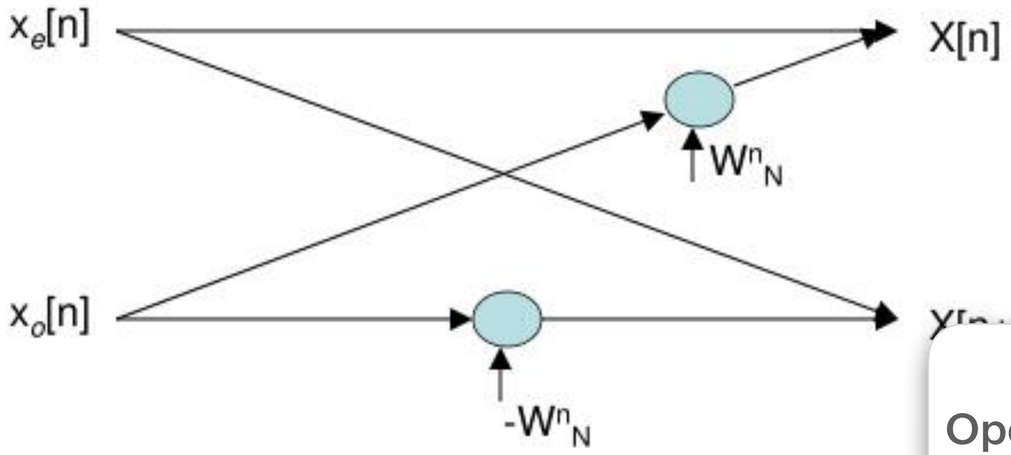
Ímpares: $O[k] = [0, -0.20711, -1, -1.2071]$

Calculando:

$$X[n] = X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n]$$

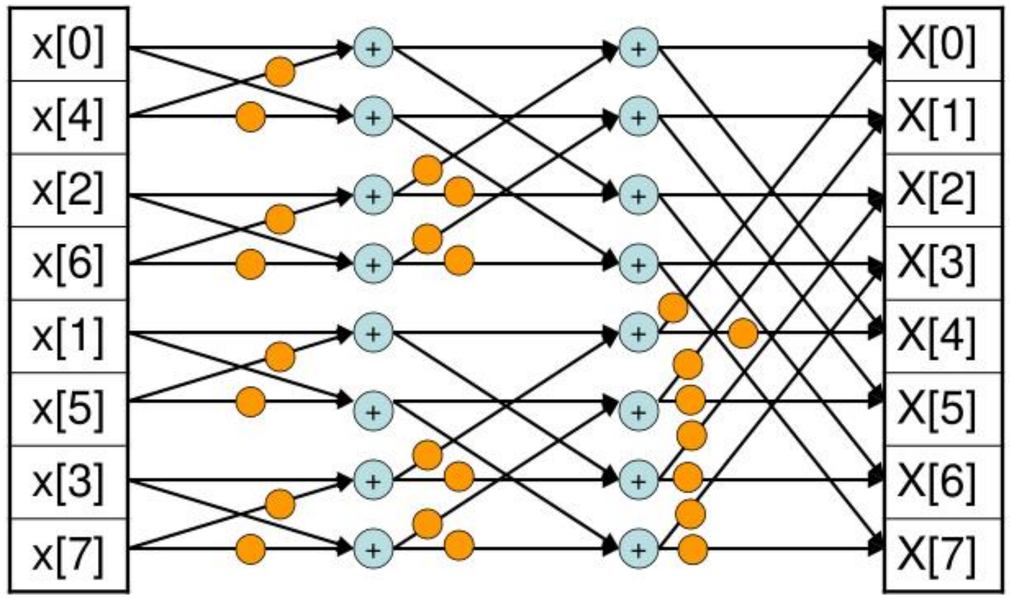
$$X[n+N/2] = X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n]$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



$$W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\,n\,k}{N}}$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



● = multiplicação pelo fator W.

FFT

Exemplo: Aplicando o algoritmo Radix-2

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left(\frac{2\pi n}{8}\right) + 0{,}5\sin\left(\frac{4\pi n}{8}\right)$$

Se escolhemos apenas 8 amostras, teremos:

$$x[0], x[1], \ldots, x[7]$$

Dividindo as amostras:

Pares: $E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

Ímpares: $O[k] = [0,\ -0.20711,\ -1,\ -1.2071]$

Calculando:

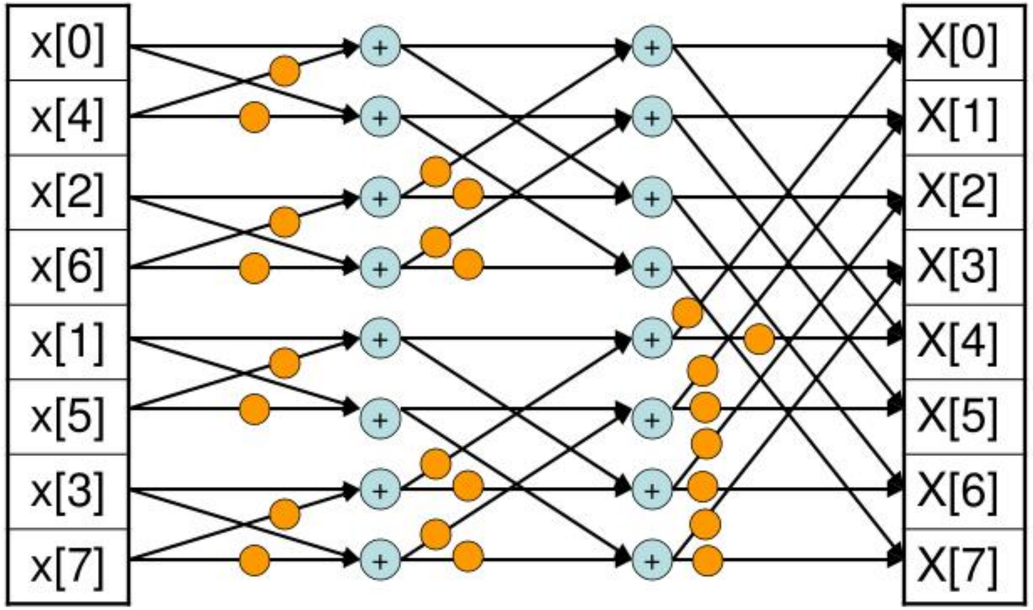
$$X[n] = X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n]$$

$$X[n+N/2] = X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n]$$

Resultado final:

$$X[k] = [0,\ -4j,\ -2j,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2j,\ 4j]$$

Operações simples, repetidas algumas vezes:



● = multiplicação pelo fator W.

FFT

Exemplo: Aplicando o algoritmo Radix-2

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left(\frac{2\pi n}{8}\right) + 0{,}5\,\sin\left(\frac{4\pi n}{8}\right)$$

Se escolhemos apenas 8 amostras, teremos:

$$x[0], x[1], \ldots, x[7]$$

Dividindo as amostras:

Pares: $E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

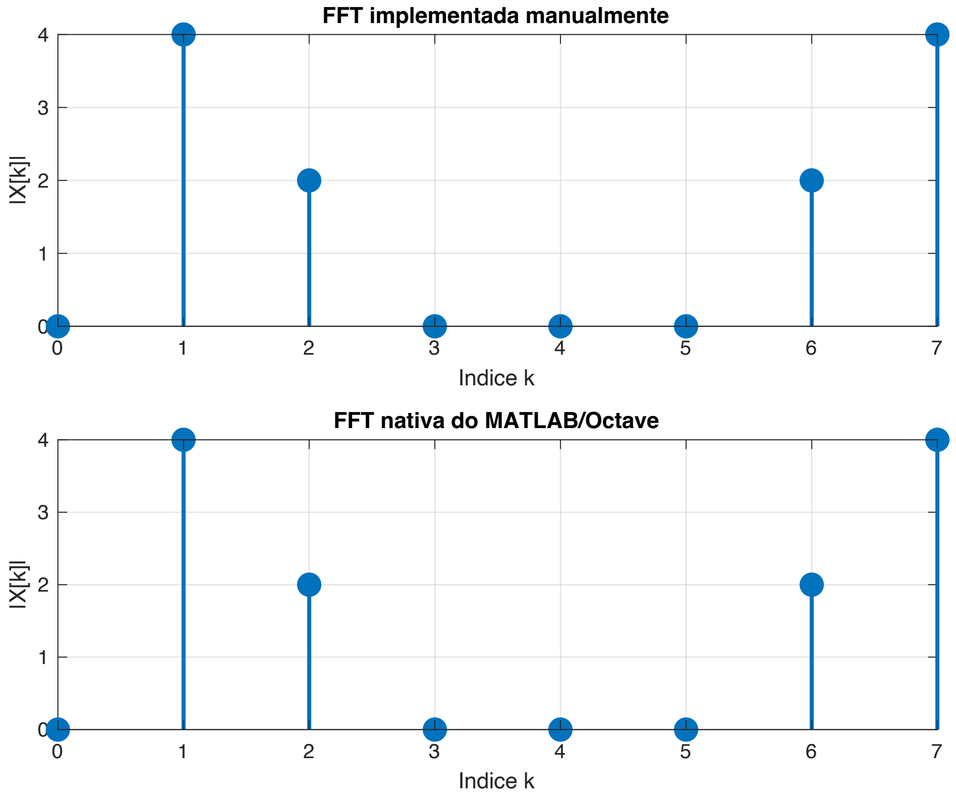
Ímpares: $O[k] = [0,\ -0.20711,\ -1,\ -1.2071]$

Calculando:

$$\begin{aligned} X[n] &= X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n] \\ X[n+N/2] &= X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n] \end{aligned}$$

Resultado final:

$$X[k] = [0,\ -4j,\ -2j,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2j,\ 4j]$$



FFT

Exemplo: Aplicando o algoritmo Radix-2

Expressão da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

Seja o sinal:

$$x[n] = \sin\left(\frac{2\pi n}{8}\right) + 0{,}5\,\sin\left(\frac{4\pi n}{8}\right)$$

Se escolhemos apenas 8 amostras, teremos:

$$x[0], x[1], \ldots, x[7]$$

Dividindo as amostras:

Pares: $E[k] = [0, 1.2071, 1, 0.20711]$

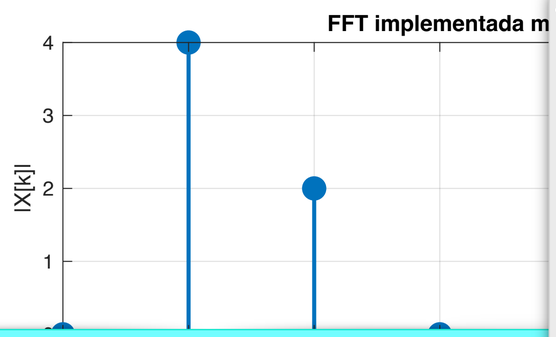
Ímpares: $O[k] = [0,\ -0.20711,\ -1,\ -1.2071]$

Calculando:

$$\begin{aligned} X[n] &= X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n] \\ X[n+N/2] &= X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n] \end{aligned}$$

Resultado final:

$$X[k] = [0,\ -4j,\ -2j,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2j,\ 4j]$$



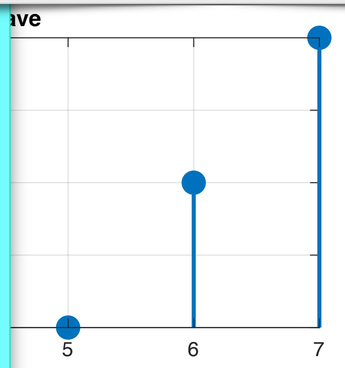
Terminal:

```
   2.2204e-16 +            0i
  -3.1402e-16 -            4i
  -2.2204e-16 -            2i
   3.1402e-16 - 6.6613e-16i
   2.2204e-16 +            0i
   3.1402e-16 + 6.6613e-16i
  -2.2204e-16 +            2i
  -3.1402e-16 +            4i
```

Matlab/Octave:

```
N = 8;
n = 0:N-1;
x = sin(2*pi*n/8) + 0.5*sin(4*pi*n/8);

f = 0:N-1;
X = fft(x);
stem(f, abs(X),'filled');
```



FFT
Algoritmo Radix-2

Expressão da DFT padrão:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

- Paralelizável (amostras pares/ímpares);
- Em cada ciclo de processamento:
  - 1 multiplicação
  - 1 adição

FFT Radix-2:

$$X[n] = X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n]$$
$$X[n+N/2] = X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n]$$

Onde: $W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\,n\,k}{N}}$

Número de Operações

N	DFT padrão	FFT
2	4	1
3	16	4
8	64	12
16	256	32
32	1024	80
64	4096	192
128	16384	448
256	65536	1024
512	262144	2304
1024	1048576	5120

FFT
Algoritmo Radix-2

Expressão da DFT padrão:

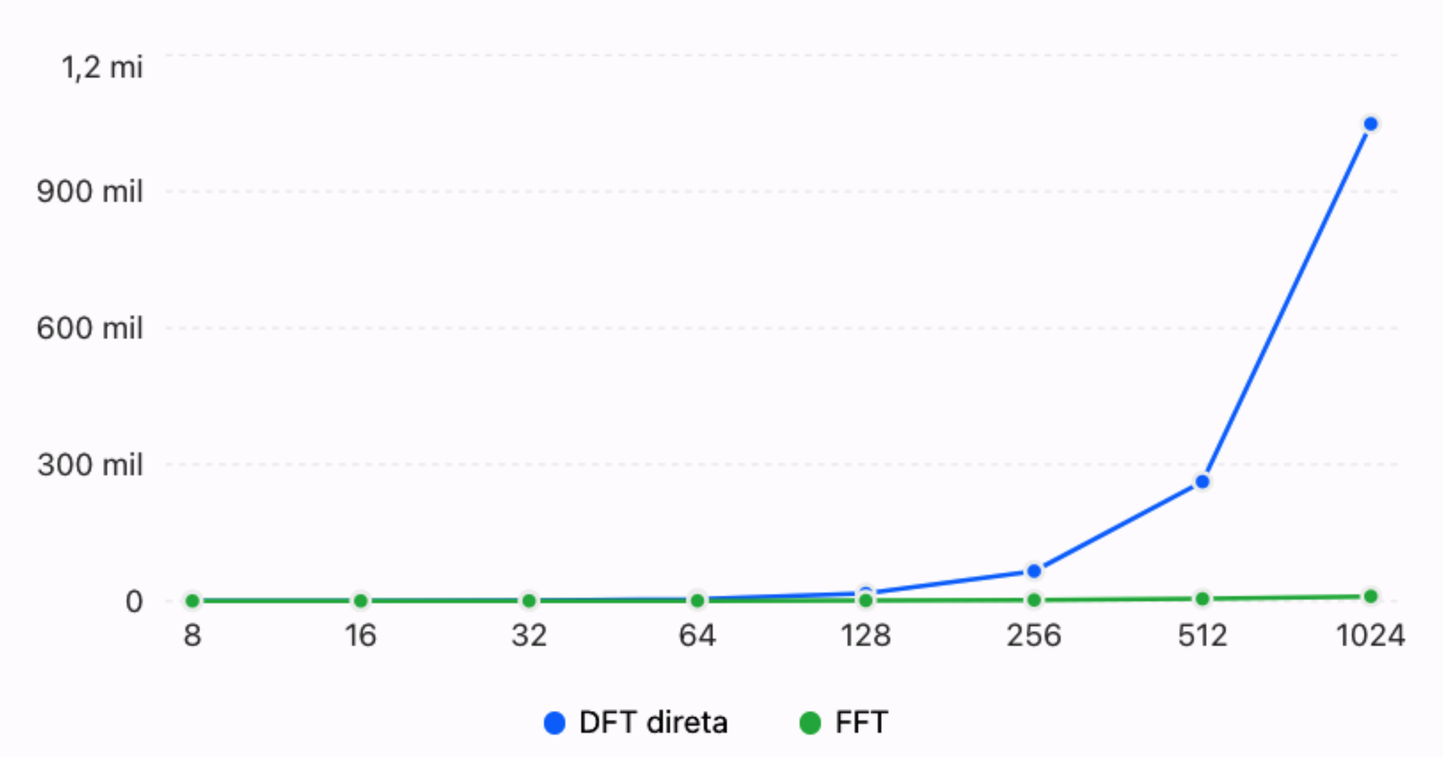
$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\, n\, \Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\, 2\pi\, k\, n/N}$$

- Custo Computacional:
  - DFT padrão: $O(N^2)$
  - FFT Radix-2: $O(N\ \log_2 N)$

FFT Butterfly:

$$X[n] = X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n]$$
$$X[n+N/2] = X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n]$$

Onde: $W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\, n\, k}{N}}$



FFT
Algoritmo Radix-2

Expressão da DFT padrão:

$$X[k] = \sum_{n=\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\,n\,\Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi\,k\,n/N}$$

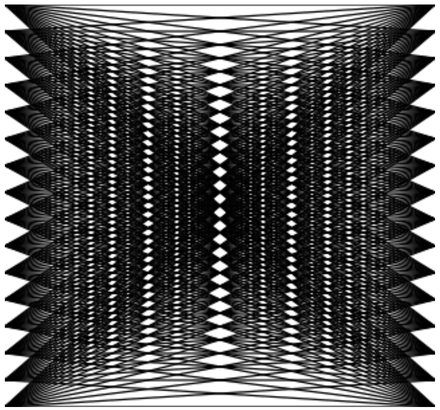
- Custo Computacional:
  - DFT padrão: $O(N^2)$
  - FFT Radix-2: $O(N\ \log_2 N)$

FFT Butterfly:

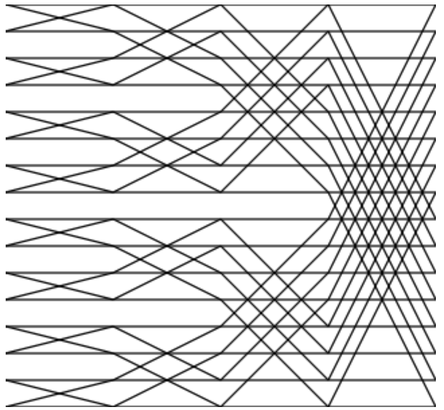
$$X[n] = X_E[n] + W_N^{nk}\, O[n]$$
$$X[n+N/2] = X_E[n] - W_N^{nk}\, O[n]$$

Onde: $W_N^{n\,k} = e^{-j\,\frac{2\pi\,n\,k}{N}}$

DFT N=16



FFT N=16



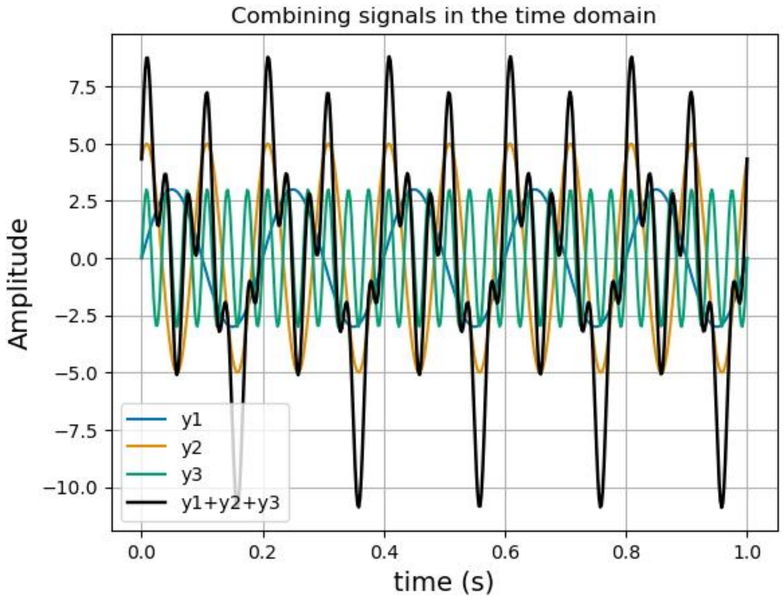
Algoritmo FFT
Usando Octave/Matlab

Suponha um sinal composto por 3 senóides em frequências distintas:

$$x(t) = 1{,}5\,\sin(2\pi f_1 t) + 0{,}8\,\sin(2\pi f_2 t) + 0{,}5\,\sin(2\pi f_3 t)$$

Onde: $f_1 = 62{,}5$ Hz, $f_2 = 125$ Hz e $f_3 = 250$ Hz.

A idéia é gerar umas 100 amostrar, visualizar o sinal no domínio tempo e depois calcular sua FFT.



Código Octave/Matlab:

```
clc; clear; close all;

fs = 1000;                  % Frequencia de amostragem
N = 100;
t = (0:N-1)/fs;

% Sinal composto por tres senoidais
x = 1.5*sin(2*pi*62.5*t) + ...
    0.8*sin(2*pi*125*t) + ...
    0.5*sin(2*pi*250*t);

figure;
plot(t,x,'o-');
grid on;
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
title('Sinal composto por tres senoidais');

% FFT de 100 pontos
X = fft(x);

f = (0:N-1)*fs/N;

figure;
stem(f,abs(X)/N);
grid on;
xlabel('Frequencia (Hz)');
ylabel('|X[k]|/N');
title('Espectro do sinal');
xlim([0 fs/2]);
```

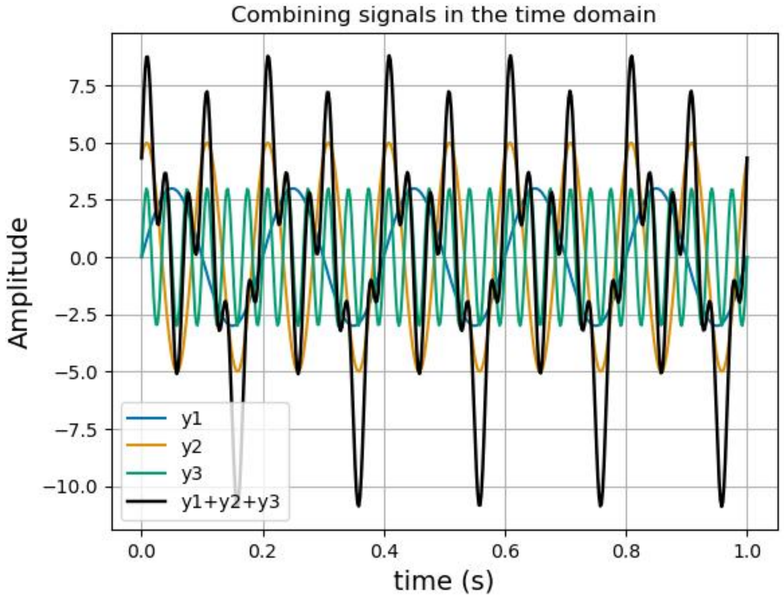
$$x(t) = 1{,}5\,\sin(2\pi f_1 t) + 0{,}8\,\sin(2\pi f_2 t) + 0{,}5\,\sin(2\pi f_3 t)$$

$f_1 = 62{,}5$ Hz, $f_2 = 125$ Hz e $f_3 = 250$ Hz.

qüências distintas:

$t)$

no domínio tempo e



Código Octave/Matlab:

```
clc; clear; close all;

fs = 1000;                  % Frequencia de amostragem
N = 100;
t = (0:N-1)/fs;

% Sinal composto por tres senoidais
x = 1.5*sin(2*pi*62.5*t) + ...
    0.8*sin(2*pi*125*t) + ...
    0.5*sin(2*pi*250*t);

figure;
plot(t,x,'o-');
grid on;
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
title('Sinal composto por tres senoidais');

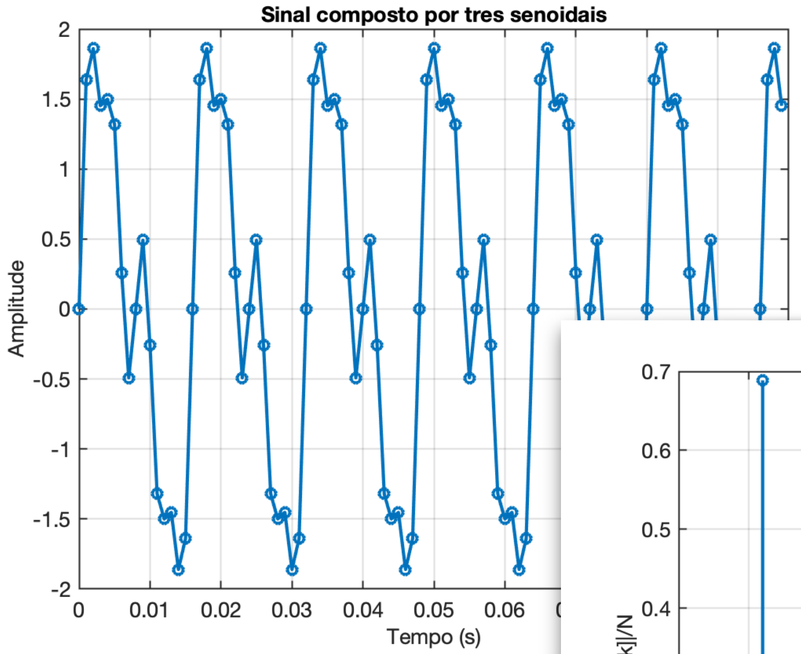
% FFT de 100 pontos
X = fft(x);

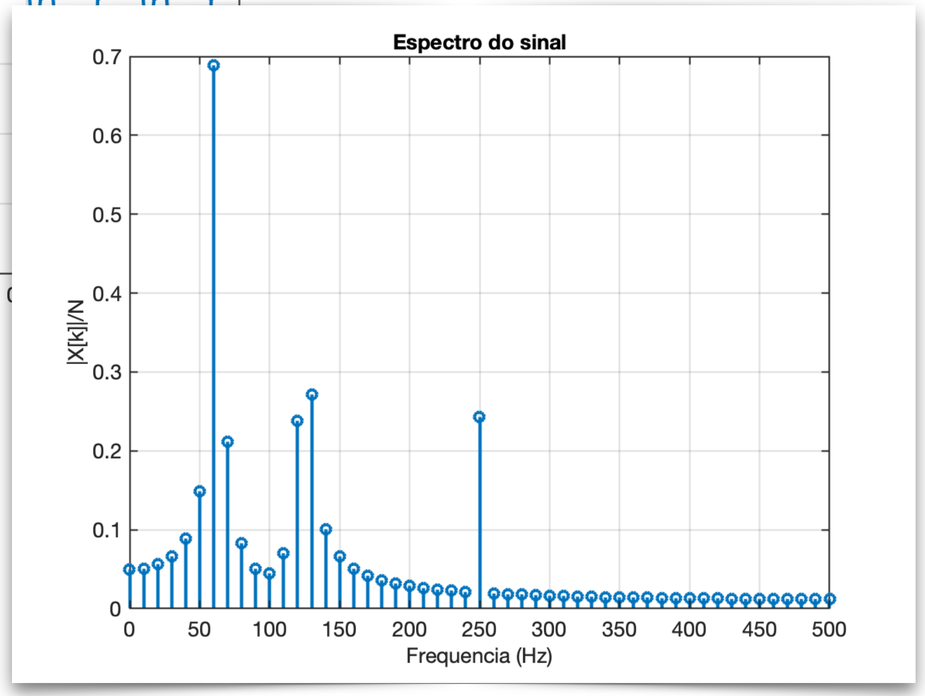
f = (0:N-1)*fs/N;

figure;
stem(f,abs(X)/N);
grid on;
xlabel('Frequencia (Hz)');
ylabel('|X[k]|/N');
title('Espectro do sinal');
xlim([0 fs/2]);
```

$$x(t) = 1{,}5\,\sin(2\pi f_1 t) + 0{,}8\,\sin(2\pi f_2 t) + 0{,}5\,\sin(2\pi f_3 t)$$

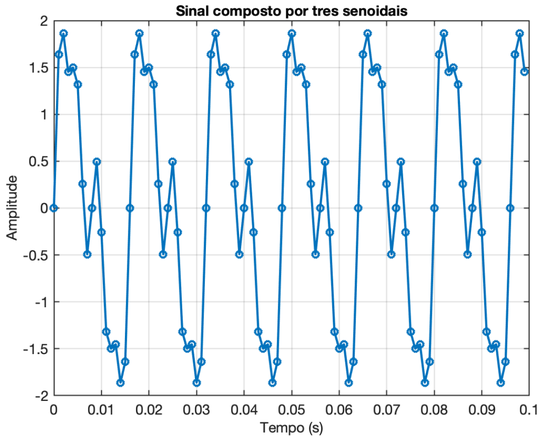
$f_1 = 62{,}5$ Hz, $f_2 = 125$ Hz e $f_3 = 250$ Hz.

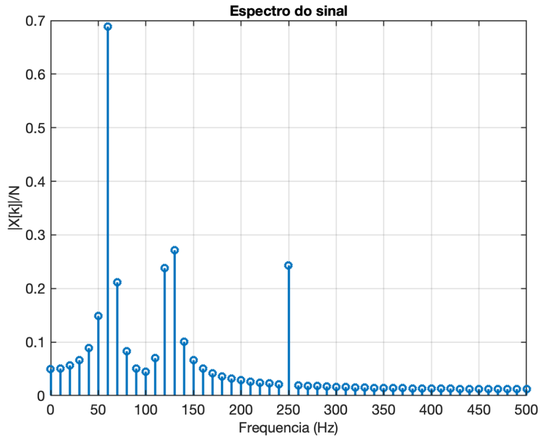




FFT

Observações/Questões





- Poderíamos ter realizado uma FFT com apenas 10 pontos?
  - Sim, mas...
    - FFT radix-2: trabalha naturalmente com $N = 2^m$ (8, 16,32, 64, etc).
    - FFT de 10 pontos teria que usar expressão original
    - Resulta uma FFT com resolução espectral muito baixa (10 componentes apenas).

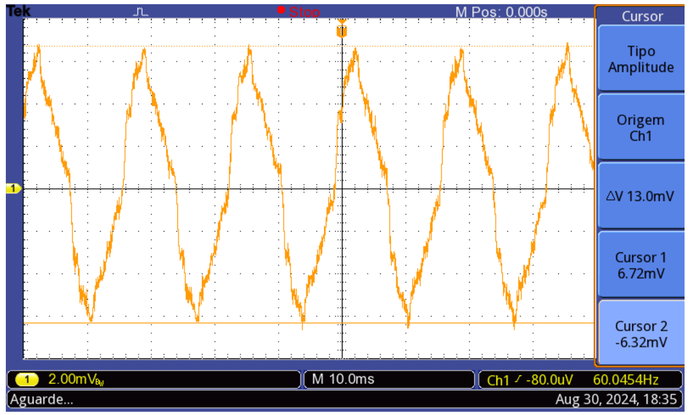
Note no código anterior:

```
>> size(t)
ans =
     1   100
>> size(x)
ans =
     1   100
>> size(f)
ans =
     1   100
>> freq_individual=1*fs/N
freq_individual =
    10
>> N
N =
   100
>>
```

FFT

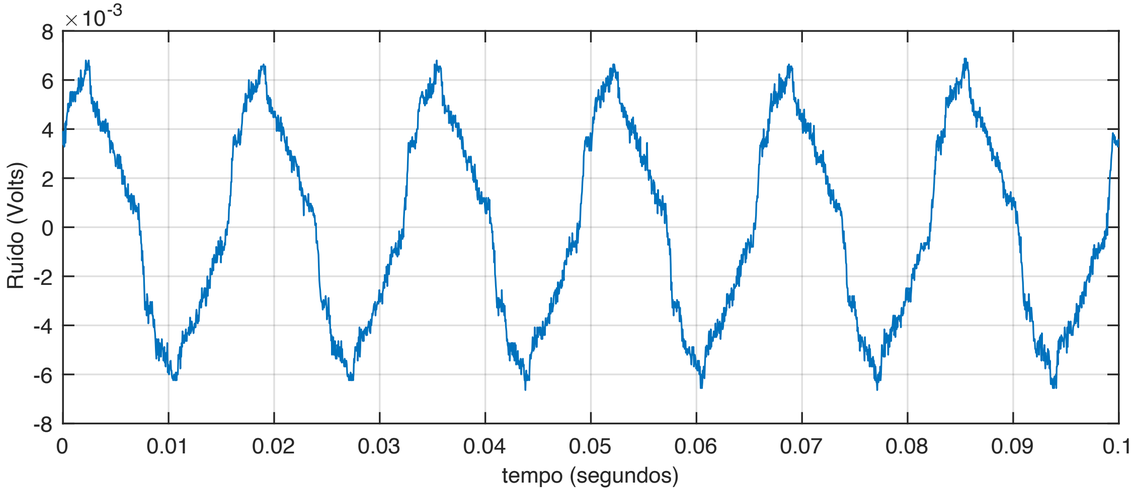
Exemplo real: Ruído em Laboratórios EEL

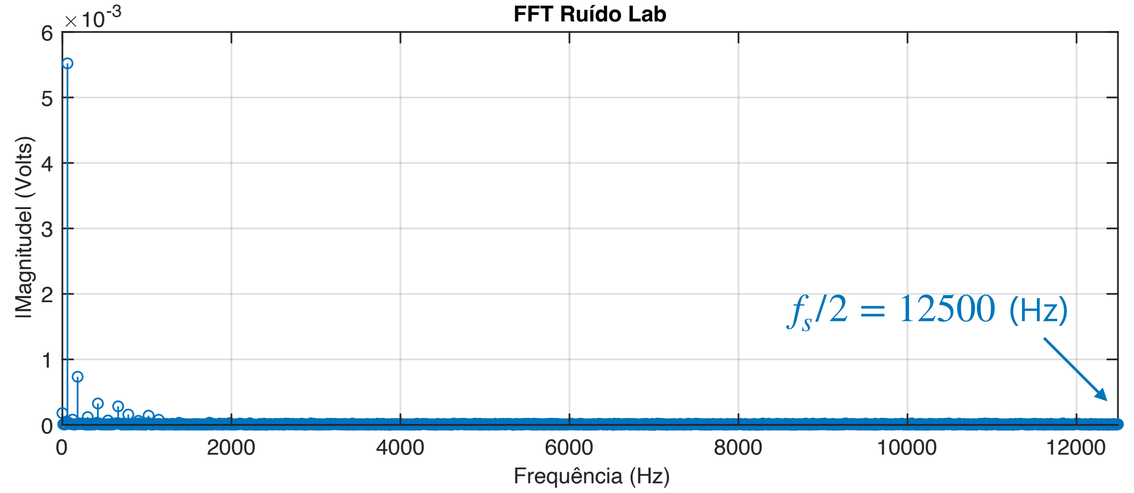
As figuras ao lado mostram o ruído real capturado usando simples ponteiras de osciloscópio de até 1 metro de comprimento no laboratório de Controle do curso de Eng. Elétrica.



Arquivo: F0005CH1.CSV (79 Kbytes)
Intervalo captura = 2,5 ms
T (1/fs) = 4E-5 = 40 μs

Freq, de amostragem, f_s = 25 KHz
2500 pontos capturados

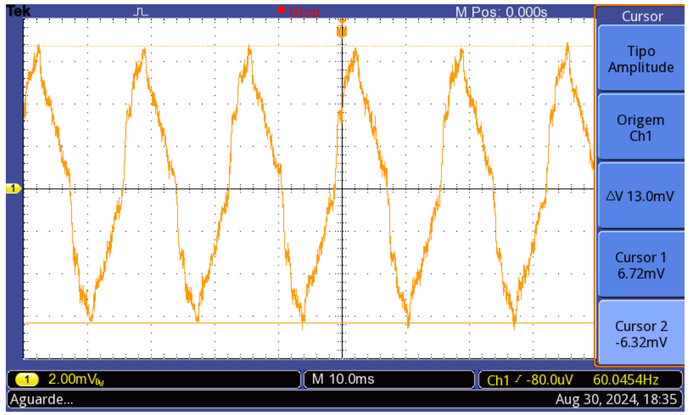




FFT

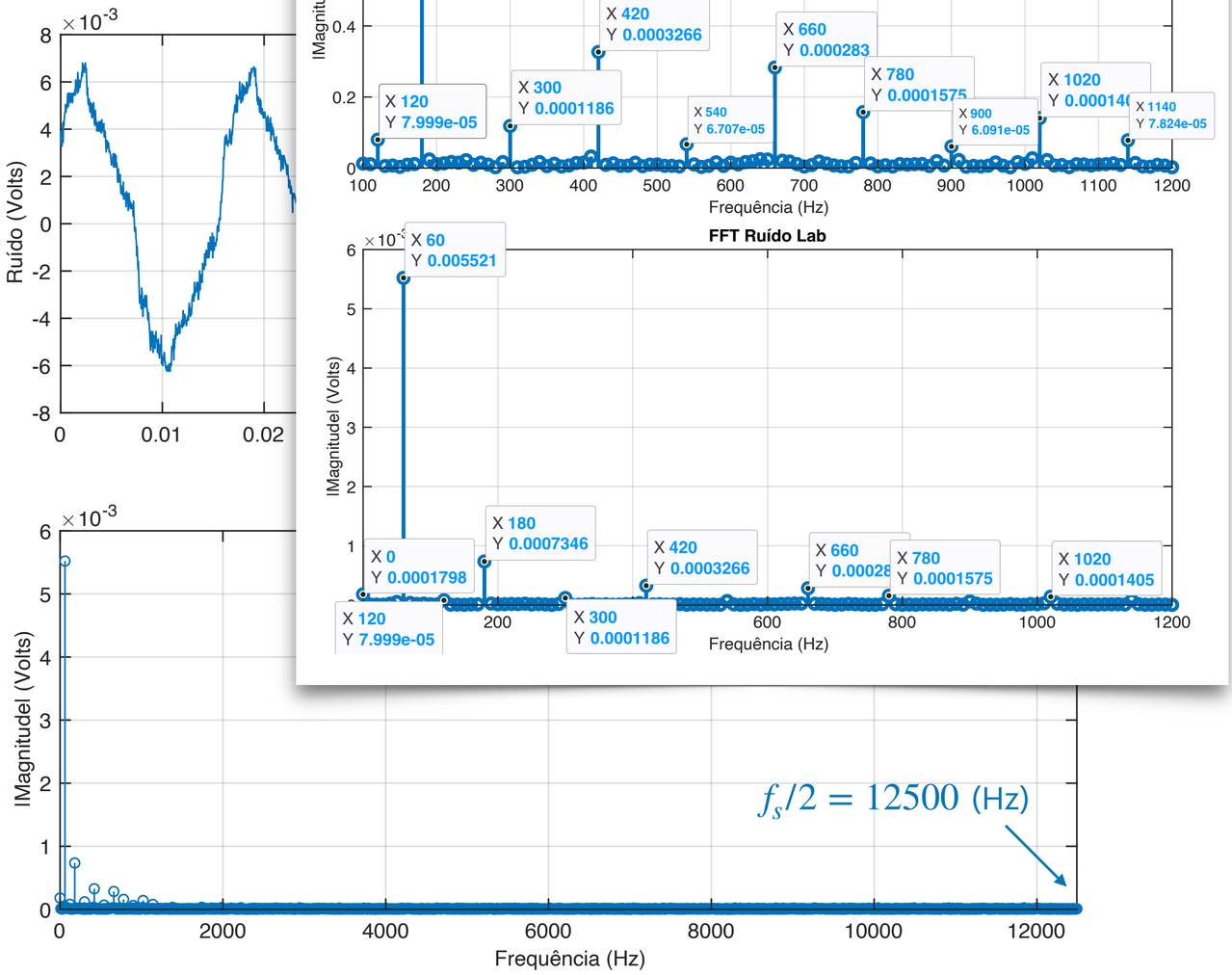
Exemplo real: Ruído em Laboratórios EEL

As figuras ao lado mostram o ruído real capturado usando simples ponteiras de osciloscópio de até 1 metro de comprimento no laboratório de Controle do curso de Eng. Elétrica.



Arquivo: F0005CH1.CSV (79 Kbytes)
Intervalo captura = 2,5 ms
T (1/fs) = 4E-5 = 40 μs

Freq, de amostragem, f_s = 25 KHz
2500 pontos capturados



FFT

Exemplo real: Ruído em Laboratórios EEL

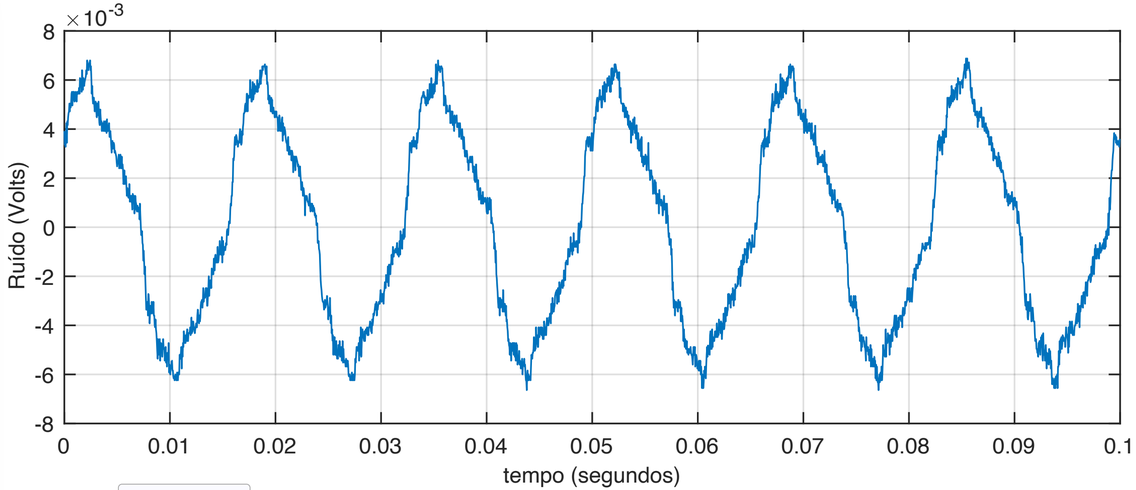
Separando componentes acima de 0,06 mV:

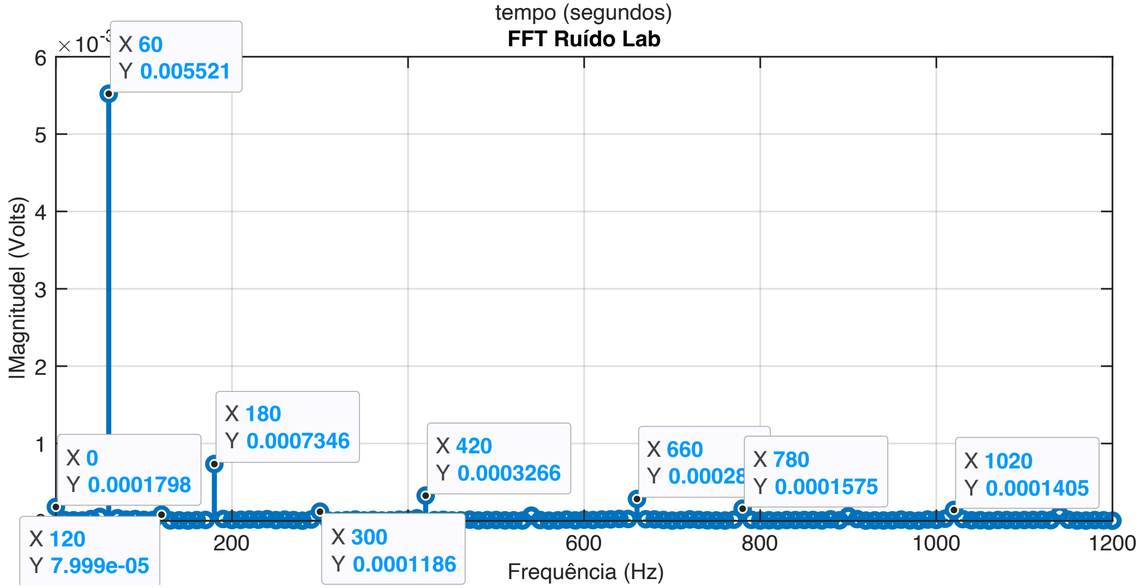
Freq (Hz)	Magnitude (Volts)	Percentual (%).	Relação dB	Fase (graus)
0	0.00017978	3.2561	-29.746	0.0
60	0.0055212	100.0	0	-52.072
120	7.999e-05	1.4488	-36.78	-31.34
180	0.00073461	13.305	-17.519	-74.426
300	0.00011858	2.1478	-33.36	1.5739
420	0.00032665	5.9163	-24.559	34.228
540	6.7073e-05	1.2148	-38.31	45.204
660	0.00028297	5.1253	-25.806	157.73
780	0.0001575	2.8527	-30.895	158.81
900	6.0907e-05	1.1032	-39.147	174.6
1020	0.00014053	2.5453	-31.885	-146.41
1140	7.8245e-05	1.4172	-36.972	176.78

Obs.: Lista dados de X(w) apenas para Xmag > 0,06 mV.
Xmag(f=60Hz) = 0,0055212 Volts. Resolução freq.= 10 Hz.

Arquivo: F0005CH1.CSV (79 Kbytes)
Intervalo captura = 2,5 ms
T (1/fs) = 4E-5 = 40 μs

Freq, de amostragem, f_s = 25 KHz
2500 pontos capturados





Código fonte gráficos/dados anteriores:

```
>> format compact
>> format short
>> % Arquivo: F0005CH1.CSV
>> T=4E-5; % suposto período de amostragem adotado
>> fs=1/T
fs =
    25000
>> % Freq. de amostragem de 25 KHz.
>> x=load('dados.mat')
x =
  struct with fields:

    F5CH1: [2500×2 double]
       Fs: 25000
        L: 2500
       P1: [1250×1 double]
       P2: [2500×1 double]
        T: 4e-05
        Y: [2500×1 double]
      ans: '/Volumes/DADOS/Users/fpassold/Documents/UPF/
Process_Sinais/ruido_real/ALL0005'
        f: [1×1250 double]
        k: [2500×1 double]
        t: [2500×1 double]
        u: 2500
        y: [2500×1 double]
>> size(x.t)
ans =
        2500
>> x.t(1:5) % 5 primeiros valores de t
ans =
            0
        4e-05
        8e-05
      0.00012
      0.00016
>> plot(x.t, x.y)
>> grid
>> xlabel('tempo (segundos)')
>> ylabel('Ruído (Volts)')
>> % Realizando a FFT
>> X=fft(x.y);
>> N=length(X) % pts da FFT
N =
        2500
>> f=(0:N-1)*fs/N;
>> Xmag=2*abs(X)/N;
>> N/2
ans =
        1250
>> figure; stem(f(1:N/2), Xmag(1:N/2))
>> xlim([0 f(N/2)])
>> grid
>> ylabel('|Magnitude| (Volts)')
>> xlabel('Frequência (Hz)')
>> title('FFT Ruído Lab')
>> % Tentando separar componentes mais pronunciados....
>> % Maior amplitude que se deseja detectar V>=6E-5
>> V_limiar=6E-5
>> [rows,cols,vals]=find(Xmag(1:N/2)>=V_limiar);
>> cols'
ans =
     1
     7
    13
    19
    31
    43
    55
    67
    79
    91
   103
   115
>> % a informação (índice) que interessa é 'cols'
>> [f(1,cols)' Xmag(1,cols)']
ans =
         0   0.00017978
        60    0.0055212
       120    7.999e-05
       180   0.00073461
       300   0.00011858
       420   0.00032665
       540   6.7073e-05
       660   0.00028297
       780    0.0001575
       900   6.0907e-05
      1020   0.00014053
      1140   7.8245e-05
>> V_base=Xmag(cols(2))
V_base =
    0.0055212
>> % V_base = tensão de referência usada para comparar com outras
>> X_fase=angle(X); % Fase (em rads)
>> X_fase=rad2deg(X_fase); % Fase em graus
>> X_per=(Xmag/V_base)*100;
>> X_dB=20*log10(Xmag/V_base);
>> [f(1,cols)' Xmag(1,cols)' X_per(1,cols)' X_dB(1,cols)'
X_fase(cols)]
ans =
         0   0.00017978       3.2561      -29.746            0
        60    0.0055212          100            0      -52.072
       120    7.999e-05       1.4488       -36.78      -31.34
       180   0.00073461       13.305      -17.519      -74.426
       300   0.00011858       2.1478       -33.36       1.5739
       420   0.00032665       5.9163      -24.559       34.228
       540   6.7073e-05       1.2148       -38.31       45.204
       660   0.00028297       5.1253      -25.806       157.73
       780    0.0001575       2.8527      -30.895       158.81
       900   6.0907e-05       1.1032      -39.147        174.6
      1020   0.00014053       2.5453      -31.885      -146.41
      1140   7.8245e-05       1.4172      -36.972       176.78
>>
```

Arquivo original gerado pelo osciloscópio:

Qtdade de pontos →
Período amostragem (T) →

F0005CH1.CSV — Abrir com Numbers

Record Length	2.500000e+03	-0.050000000000	0.00392
Sample Interval	4.000000e-05	-0.049960000000	0.00336
Trigger Point	1.250000000000e+03	-0.049920000000	0.00360
		-0.049880000000	0.00328
		-0.049840000000	0.00384
		-0.049800000000	0.00424
Source	CH1	-0.049760000000	0.00344
Vertical Units	V	-0.049720000000	0.00432
Vertical Scale	2.000000e-03	-0.049680000000	0.00416
Vertical Offset	0.000000e+00	-0.049640000000	0.00448
Horizontal Units	s	-0.049600000000	0.00464
Horizontal Scale	1.000000e-02	-0.049560000000	0.00472
Pt Fmt	Y	-0.049520000000	0.00504
Yzero	0.000000e+00	-0.049480000000	0.00472
Probe Atten	1.000000e+00	-0.049440000000	0.00504
Model Number	TBS1072B	-0.049400000000	0.00488
Serial Number	C013497	-0.049360000000	0.00504
Firmware Version	FV:v4.06	-0.049320000000	0.00544
		-00.049280000000	0.00552
		-00.049240000000	0.00496
		-00.049200000000	0.00536

Sugestões de Leitura Complementar:

- SlideServe: “FFT in Hardware and Software” (Oct 13,2014):
  https://www.slideserve.com/jena/fft-in-hardware-and-software
- Blog de Adam Rozman: “FFT Signal Analysis using Python” (Feb 10, 2026):
  https://adrozman.github.io/blog/fft-fundamentals-python/
- GitHub de Tan F. Wong: “5.3. Fast Fourier Transform” (2023):
  https://tanfwong.github.io/dsp_notes/ch5/fft.html
- Artigo: Michael T. Heideman, Don H. Johnson, C. Sidney Burrus, “Gauss and the History of the Fast Fourier Transform”, 8 pp.
  https://www.cis.rit.edu/class/simg716/Gauss_History_FFT.pdf