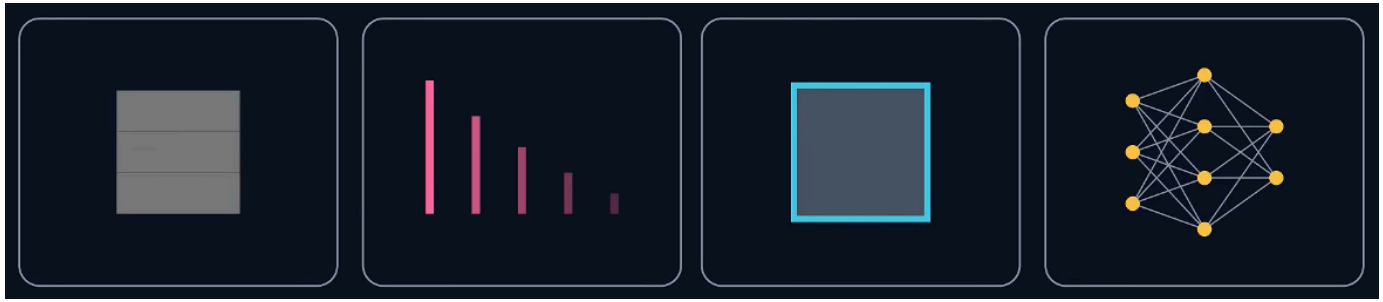
Convolução

Introdução

Sistemas Amostrados

Prof. Fernando Passold

Convolução
Aplicações



Desfocar uma imagem | Adicionar eco (reverberação) | Detectar bordas | Reconhecer objetos

Convolução
Definição

$$f(\tau)\, g(t-\tau)$$

4 etapas:

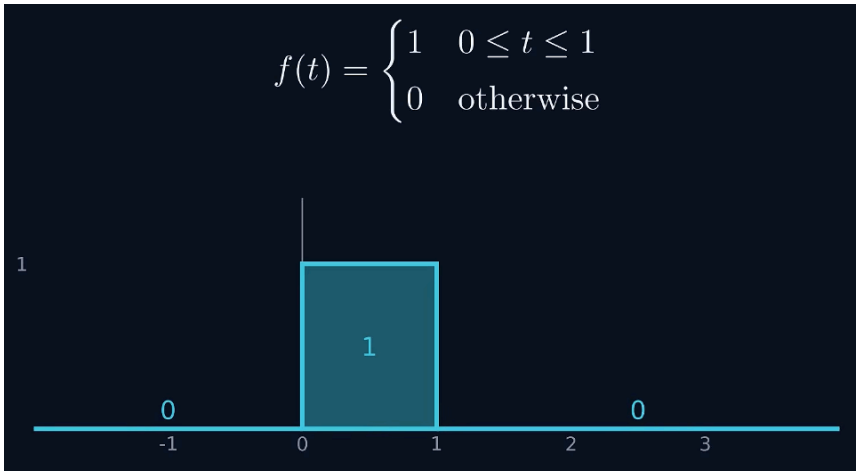
Inversão ➠ Deslocamento ➠ Multiplicação ➠ Integração

Convolução
Entendendo sua Geometria

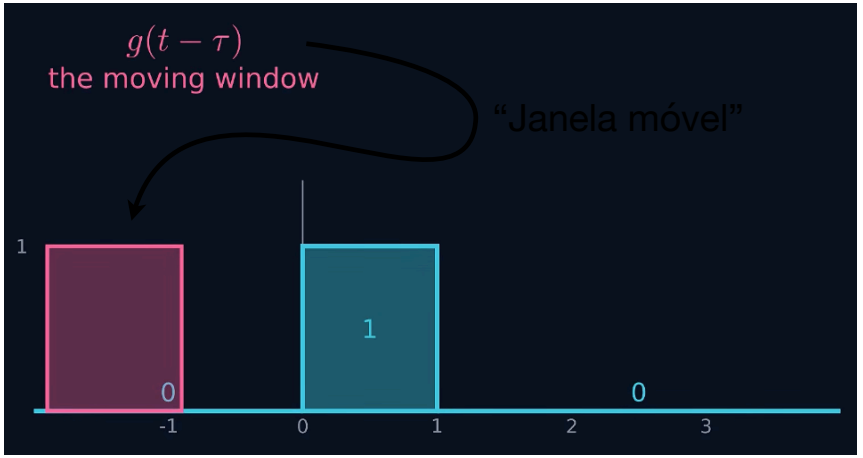
$f(\tau)\, g(t-\tau)$

- Quanto uma função se sobrepõe à outra à medida que movemos uma delas sobre a outra?
- Suponha os sinais: 2 pulsos retangulares (amplitude = 1, duração =1)

Pulso retangular



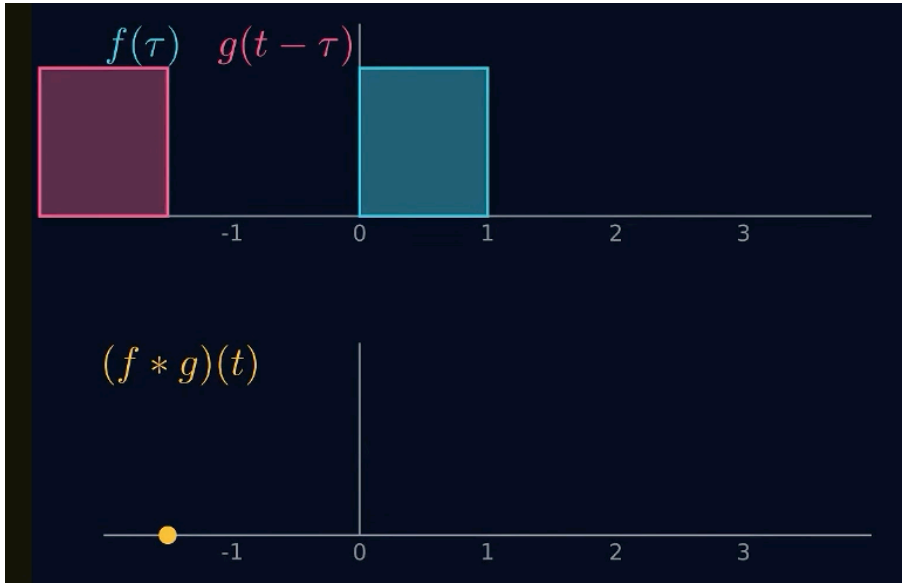
Outra função:



Convolução
Entendendo sua Geometria

$f(\tau)\, g(t-\tau)$

- Mover e integrar áreas das sobreposições:



Enquanto não há sobreposição ➠ saída é 0

Quanto uma função “entra na outra” ➠ saída aumenta

Quando as 2 estão completamente sobrepostas ➠ valor máximo

Quando a função está “deixando” a outra ➠ saída diminui

Quando a função deixou a outra ➠ saída volta à 0

Convolução

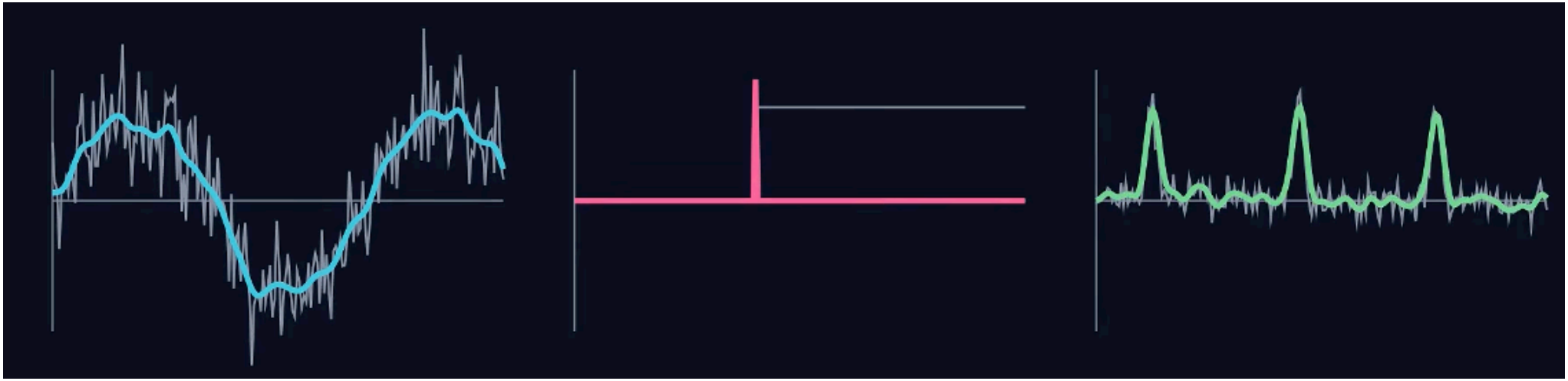
Aplicações mudando o “kernel”

$$f(\tau)\, g(t-\tau)$$

Suavizar um sinal

Enfatizar transições rápidas

Enfatizar padrões repetidos



Convoluir com uma curva gaussiana

Usar um kernel adequado

Aplicando outro kernel adequado

<< O resultado depende da forma das duas funções >>

Convolução
Detalhes

- 1. Refletir uma das funções antes de deslocar!

Resultado:

um valor para cada valor de t

Na prática só integramos na região onde o produto das sobreposições é ≠ 0

$f(\tau)\, g(t-\tau)$

Função original em função de τ

O símbolo τ = variável de integração

Não usamos t, porque t se refere à posição onde queremos calcular a saída

$g(t-\tau)$ é a função que se move

Note que a medida que t muda, a posição relativa entre as 2 funções se modifica

$f(\tau)\, g(t-\tau)$ calcula o produto entre 2 posições

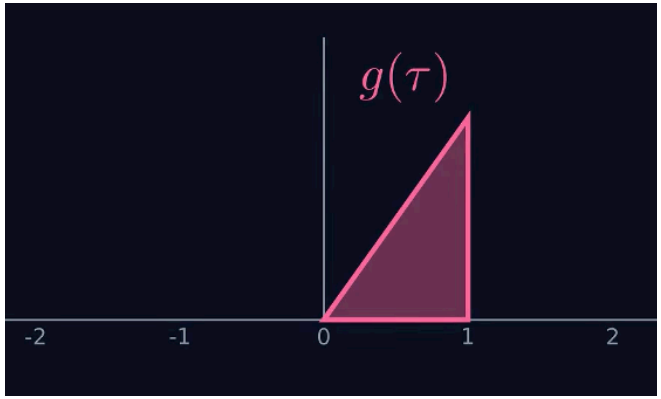
$\int_{-\infty}^{\infty}$ significa integrar p/ $\forall\ \tau$ (soma as contribuições)

Convolução

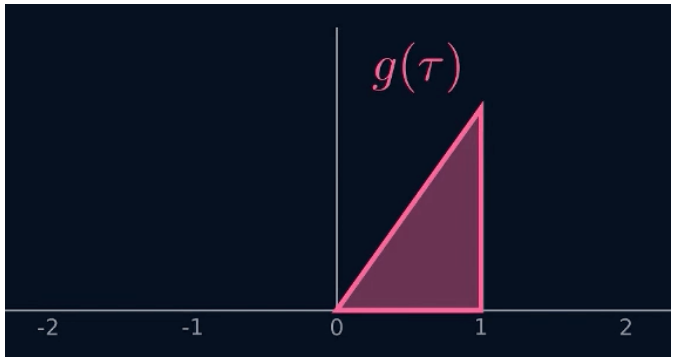
Por que $t - \tau$ ao invés de $t + \tau$?

$$f(\tau)\, g(t - \tau)$$

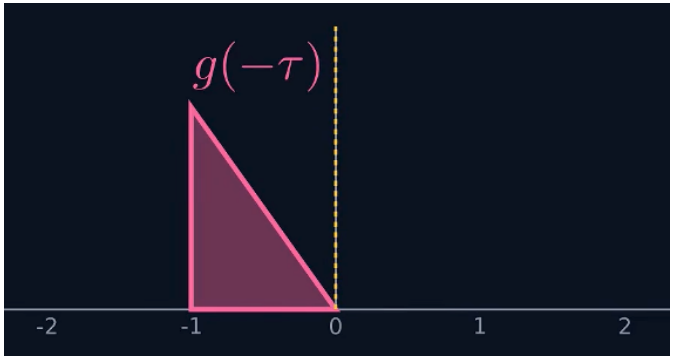
1. Vamos considerar uma função não simétrica:
   (lado esquerdo ≠ lado direito)



2. Refletindo em relação ao eixo vertical



3. Resultado da Reversão Temporal:



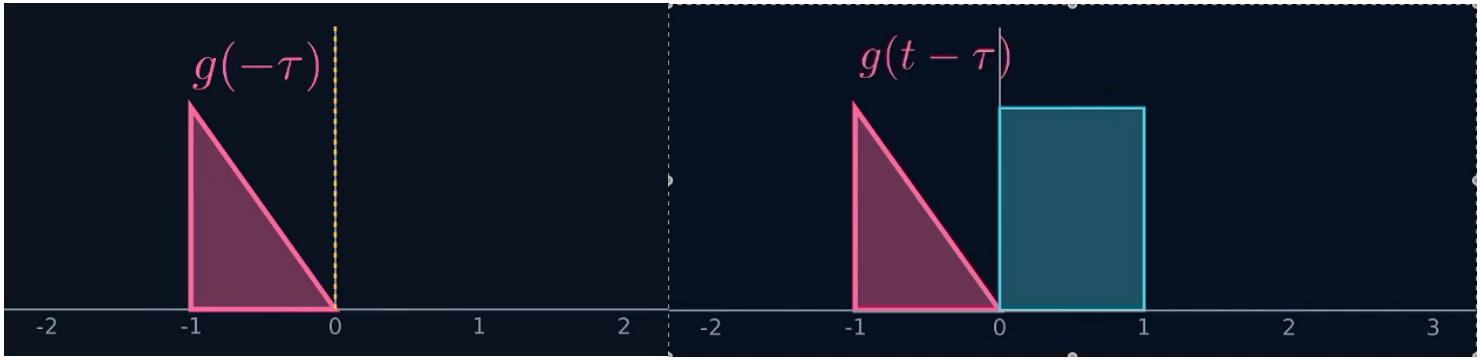
Convolução

Por que $t - \tau$ ao invés de $t + \tau$?

$f(\tau)\, g(t - \tau)$

3. Resultado da Reversão Temporal, do ponto de vista de τ

4. A medida que t muda, Deslocamos a função refletida:



Em cada posição multiplicamos as 2 funções e integramos para obter a saída

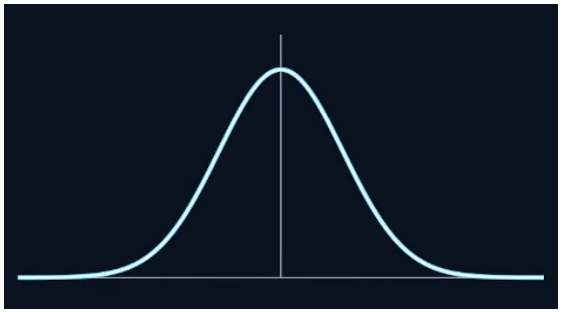
Convolução

Por que $t - \tau$ ao invés de $t + \tau$?

$f(\tau)\, g(t - \tau)$

Deslizar SEM refletir ➠ Operação de Correlação Cruzada
(usada em processamento de imagens e redes neurais convolucionais, CNN's)

Em alguns casos, de funções simétricas,
Refletir ou não, não faz diferença:
Ex.: Função Gaussiana centrada.



Mas... para funções assimétricas, a reflexão IMPORTA
(faz diferença):



Convolução

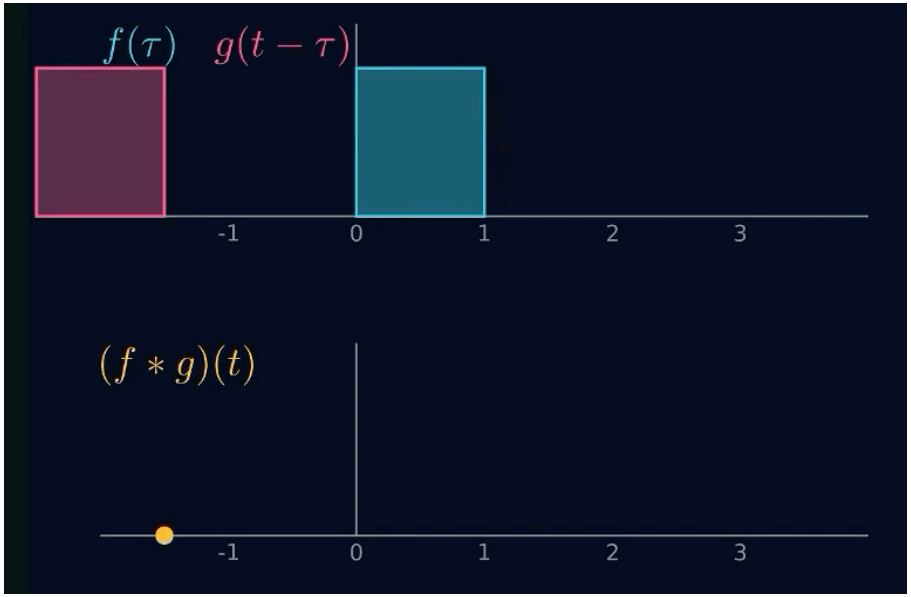
Exemplo Completo

- Onda Retangular $*$ Onda Retangular:

$$f = g = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

Queremos fazer:

$$f * g = \int f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$



Resultado: função definida por partes:

$$(f * g) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ t & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & , \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & , \quad t > 2 \end{cases}$$

Convolução

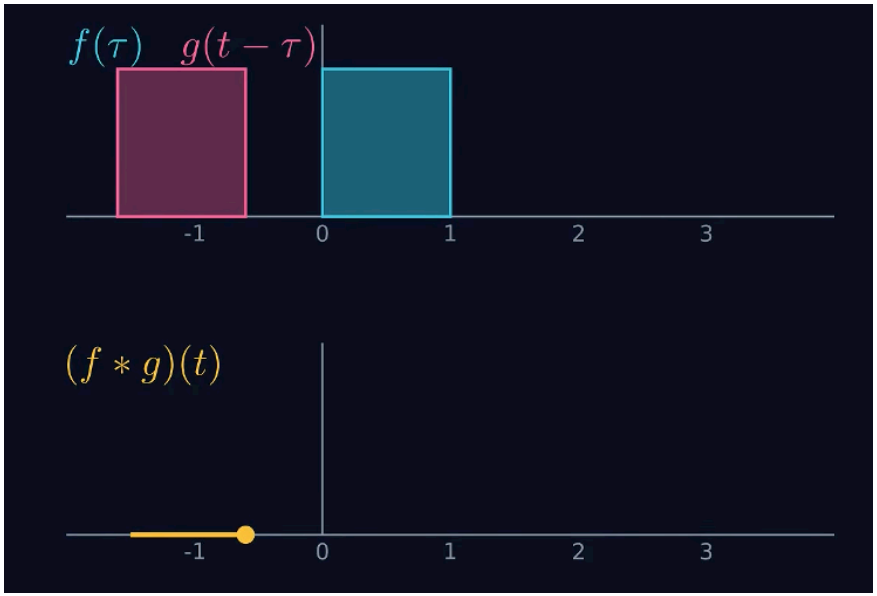
Exemplo Completo

- Onda Retangular $*$ Onda Retangular:

$$f = g = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

Queremos fazer:

$$f * g = \int f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$



Resultado: função definida por partes:

$$(f*g) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ t & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & , \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & , \quad t > 2 \end{cases}$$

Convolução

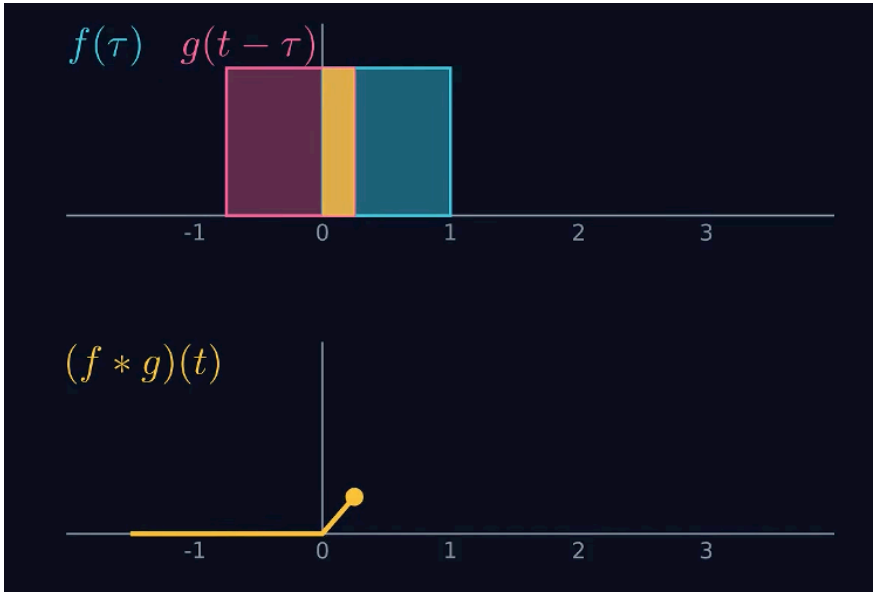
Exemplo Completo

- Onda Retangular $*$ Onda Retangular:

$$f = g = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

Queremos fazer:

$$f * g = \int f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$



Resultado: função definida por partes:

$$(f * g) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ t & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & , \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & , \quad t > 2 \end{cases}$$

$$t = 0{,}25 \therefore \int = 0{,}25 \cdot 1 \cdot 1 \ldots$$

Multiplicar funções ponto à ponto e integrar...

Convolução

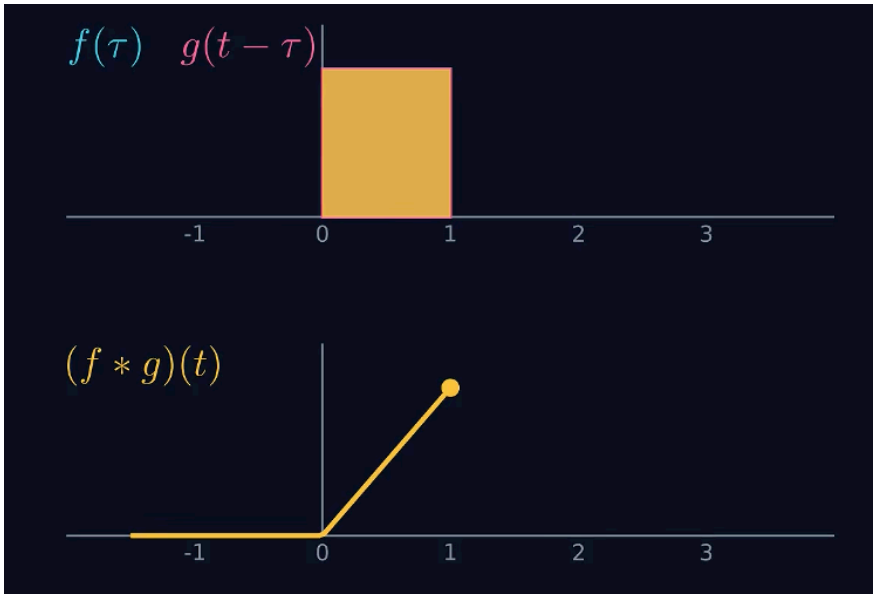
Exemplo Completo

- Onda Retangular $*$ Onda Retangular:

$$f = g = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

Queremos fazer:

$$f * g = \int f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$



Sobreposição completa = ponto máximo

Resultado: função definida por partes:

$$(f * g) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ t & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & , \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & , \quad t > 2 \end{cases}$$

Convolução

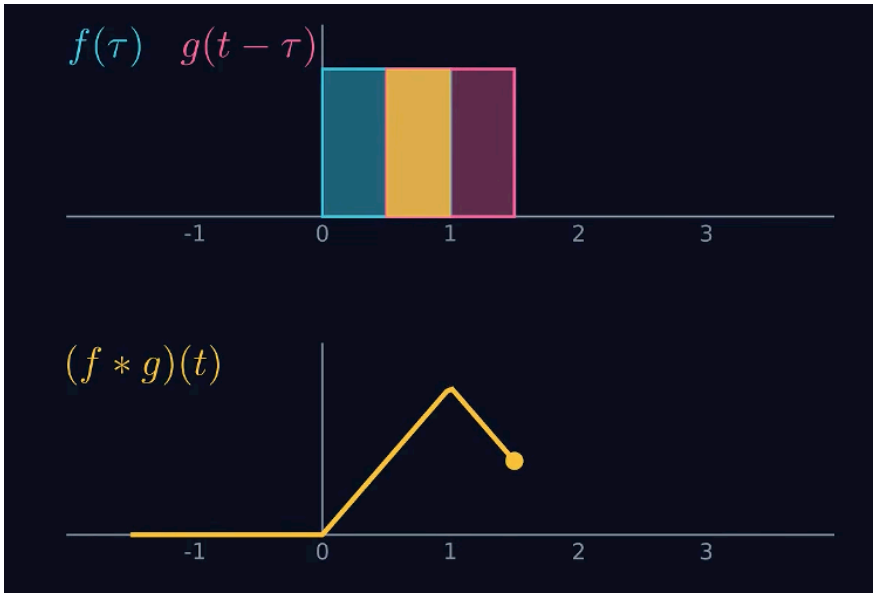
Exemplo Completo

- Onda Retangular $*$ Onda Retangular:

$$f = g = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

Queremos fazer:

$$f * g = \int f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$



Resultado: função definida por partes:

$$(f*g) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ t & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & , \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & , \quad t > 2 \end{cases}$$

$$t = 1{,}5 \therefore \int = (2 - 1{,}5) * 1 \cdot 1 + \ldots$$

Convolução

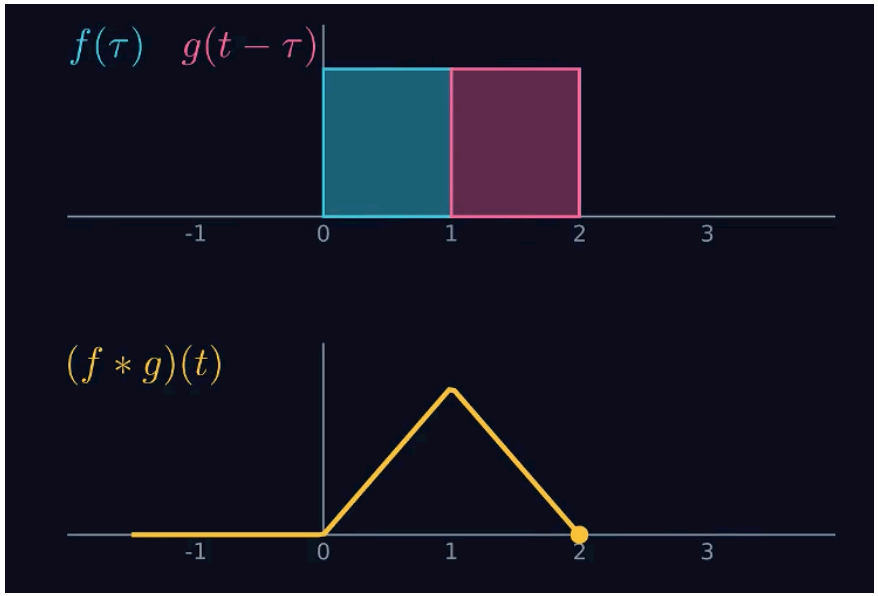
Exemplo Completo

- Onda Retangular $*$ Onda Retangular:

$$f = g = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

Queremos fazer:

$$f * g = \int f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$



Resultado: função definida por partes:

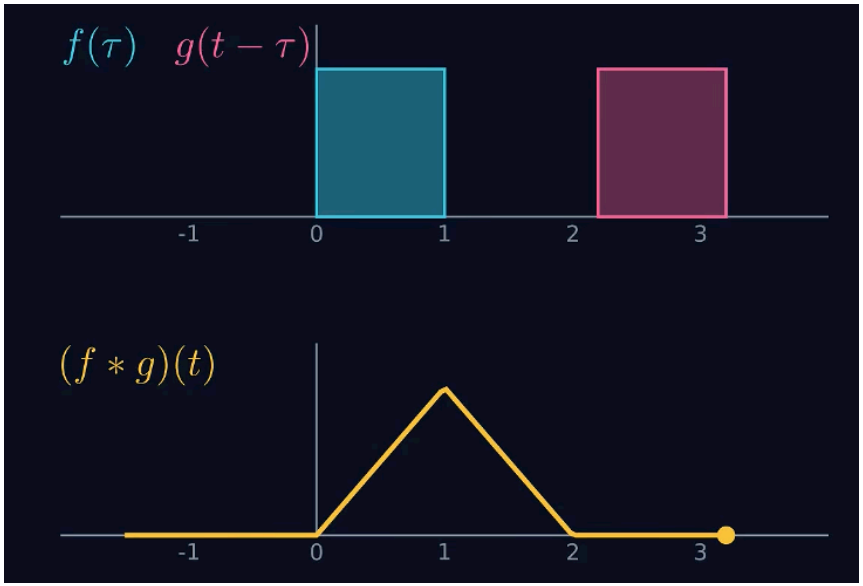
$$(f * g) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ t & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & , \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & , \quad t > 2 \end{cases}$$

$t \geq 2 \therefore$ sobreposição desaparece

Convolução
Entendendo sua Geometria

$f(\tau)\, g(t-\tau)$

- Mover e integrar áreas das sobreposições:



Resultado final:

Onda triangular (neste caso)

2 funções ➠ 1 terceira função

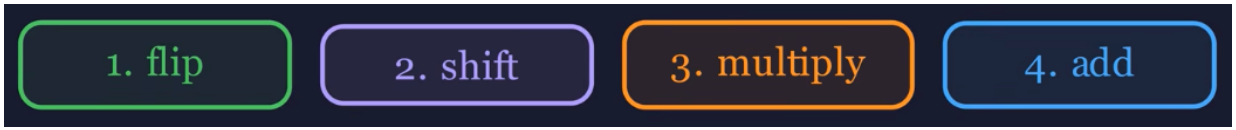
Note: “ ” representa convolução (não multiplicação)

Deslizamos uma função sobre a outra, calculando a contribuição combinada em cada instante de tempo

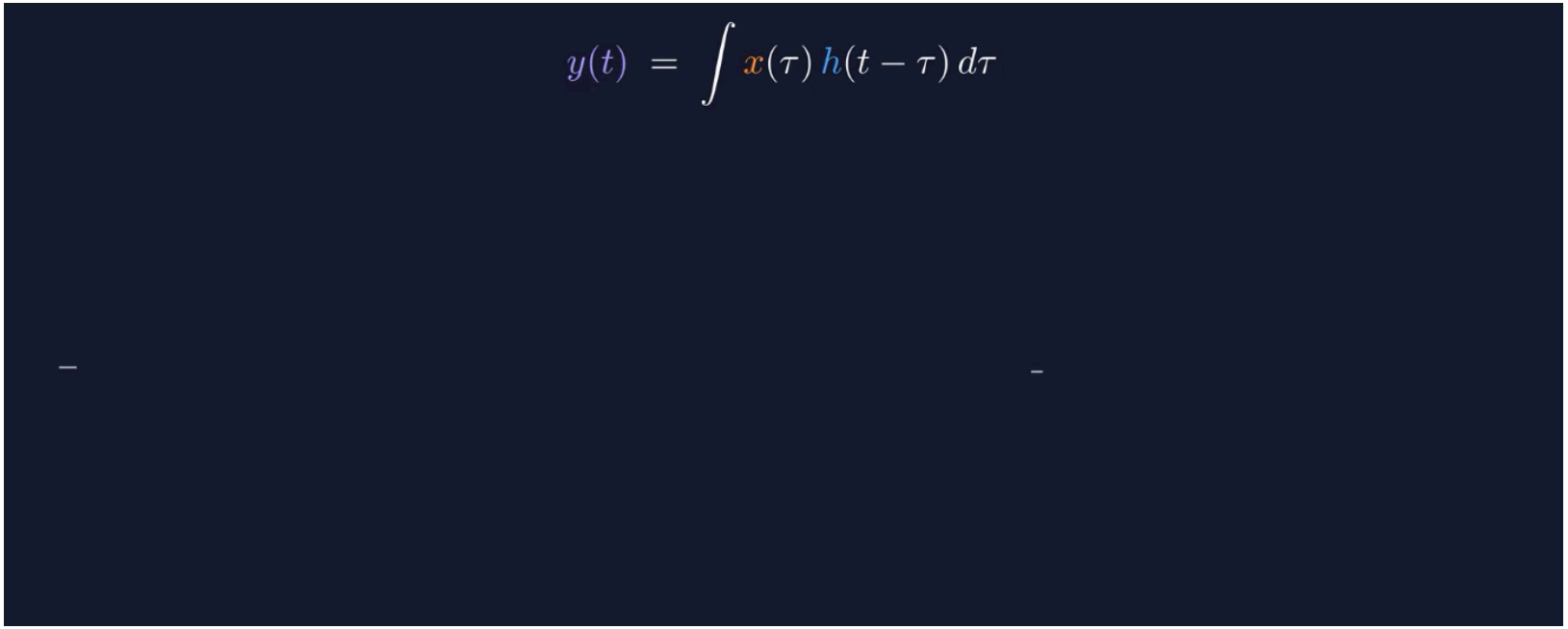
Convolução

Entendendo sua Geometria

$f(\tau)\, g(t-\tau)$



- Em resumo:



Convolução
Detalhes

$$x \quad \delta \quad x$$

δ é o número 1 nesta aritmética

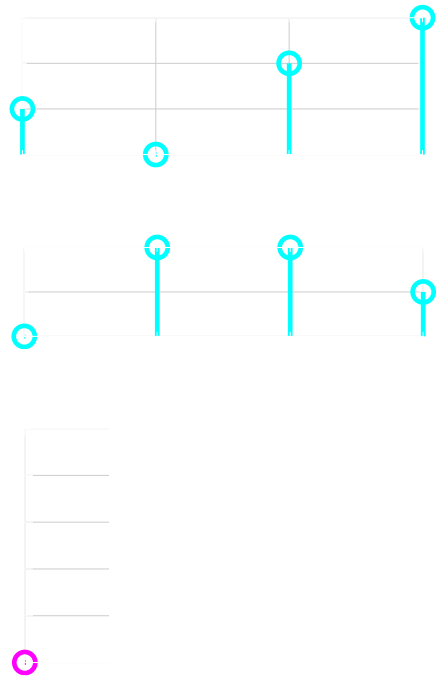
Convolução Discreta

Calculando os termos

Seja:

$x = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 3]$ e $h = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 1]$

Queremos determinar: $y[n] = x[n] * h[n]$



Notamos:

$N_x = 4$ (termos de $x[n]$)

$N_y = 4$ (termos de $h[n]$)

A convolução vai render: $N = N_x + N_h - 1$ termos, ou:

$N = 4 + 4 - 1 = 7$

n vai variar de 0 a 6

Convolução Discreta

Calculando os termos

Seja:

$x = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 3]$ e $h = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 1]$

Queremos determinar: $y[n] = x[n] * h[n]$

n variando de 0 a 6:

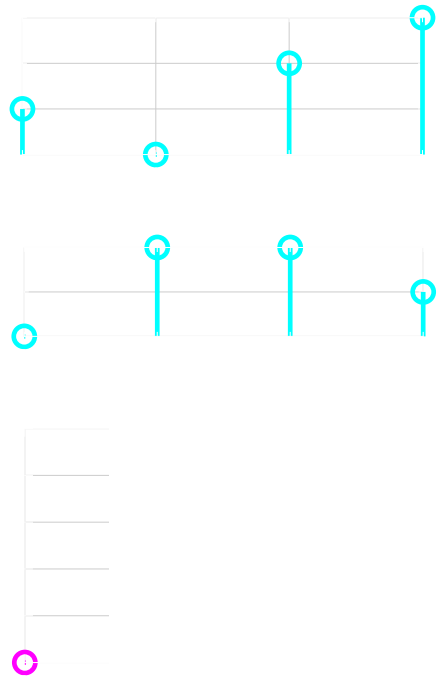
Para n = 0:

y[0] = x[0]h[0-0] + x[1]h[0-1] + x[2]h[0-2] + x[3]h[0-3]

y[0] = x[0]h[0] + x[1]h[-1] + x[2]h[-2] + x[3]h[-3]

Ao final:

$y = [\ ]$



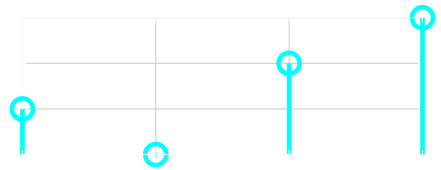
Convolução Discreta

Calculando os termos

Seja:

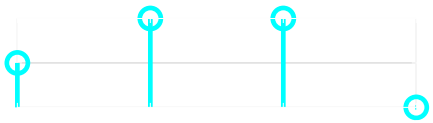
$x = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 3]$ e $h = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 1]$

Queremos determinar: $y[n] = x[n] * h[n]$



n variando de 0 a 6:

"Flip": h[-k]



Para n = 0:

y[0] = x[0]h[0-0] + x[1]h[0-1] + x[2]h[0-2] + x[3]h[0-3]

y[0] = x[0]h[0] + x[1]h[-1] + x[2]h[-2] + x[3]h[-3]



Ao final:

$y = [\ ]$

Convolução Discreta

Calculando os termos

Seja:

$x = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 3]$ e $h = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 1]$

Queremos determinar: $y[n] = x[n] * h[n]$

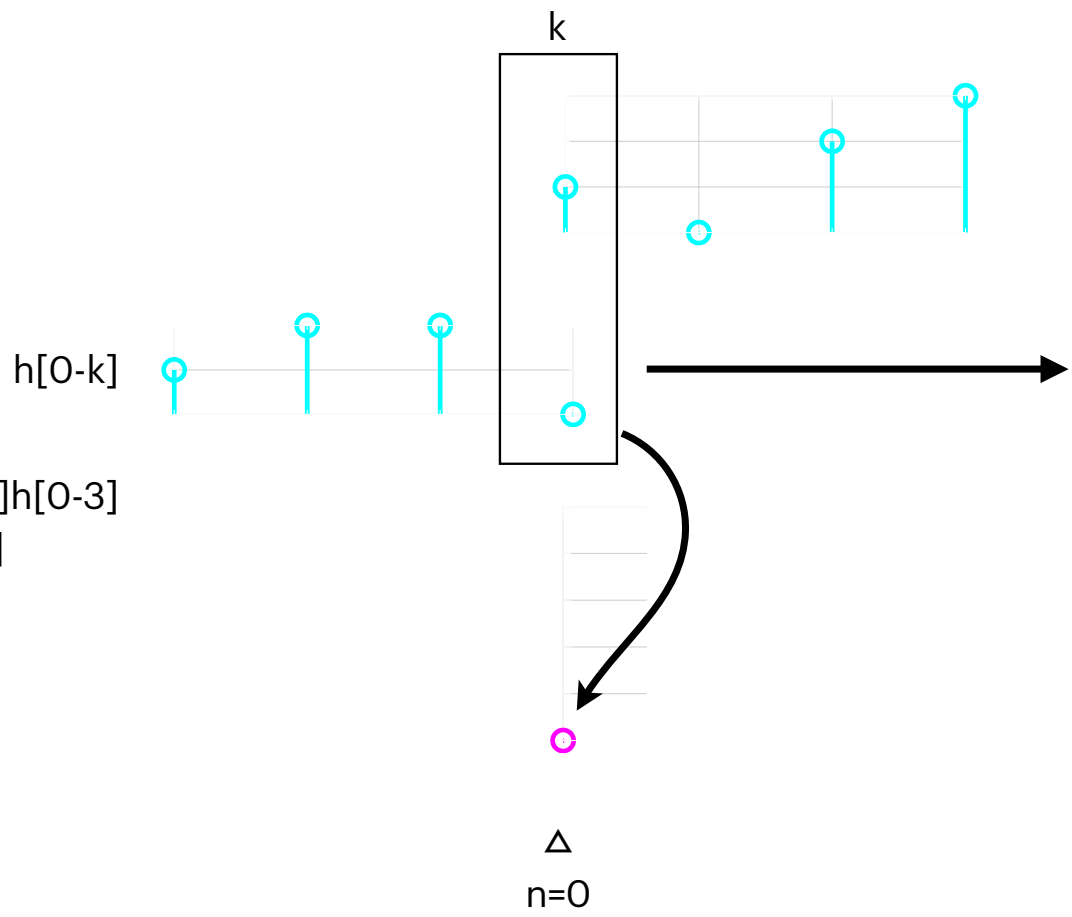
n variando de 0 a 6:

Para n = 0:

y[0] = x[0]h[0-0] + x[1]h[0-1] + x[2]h[0-2] + x[3]h[0-3]
y[0] = x[0]h[0] + x[1]h[-1] + x[2]h[-2] + x[3]h[-3]
y[0] = (1)(0) + (0)(0) + (2)(0) + (3)(0)
y[0] = 0

Ao final:

$y = [0]$



Convolução Discreta

Calculando os termos

Seja:

$x = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 3]$ e $h = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 1]$

Queremos determinar: $y[n] = x[n] * h[n]$

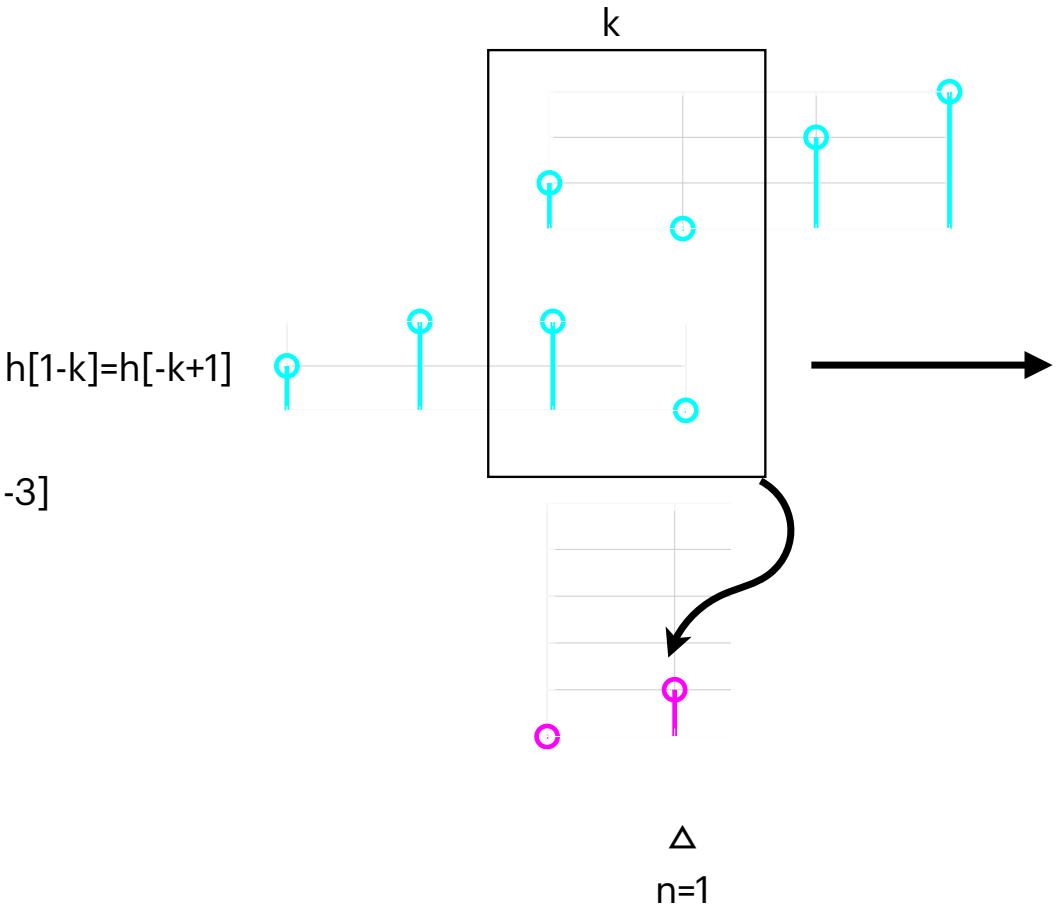
n variando de 0 a 6:

Para n = 1:

y[1] = x[0]h[1-0] + x[1]h[1-1] + x[2]h[1-2] + x[3]h[1-3]
y[1] = x[0]h[1] + x[1]h[0] + x[2]h[-1] + x[3]h[-2]
y[1] = (1)(2) + (0)(0) + (2)(0) + (3)(0)
y[1] = 2

Ao final:

$y = [0 \quad 2]$



Convolução Discreta

Calculando os termos

Seja:

$x = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 3]$ e $h = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 1]$

Queremos determinar: $y[n] = x[n] * h[n]$

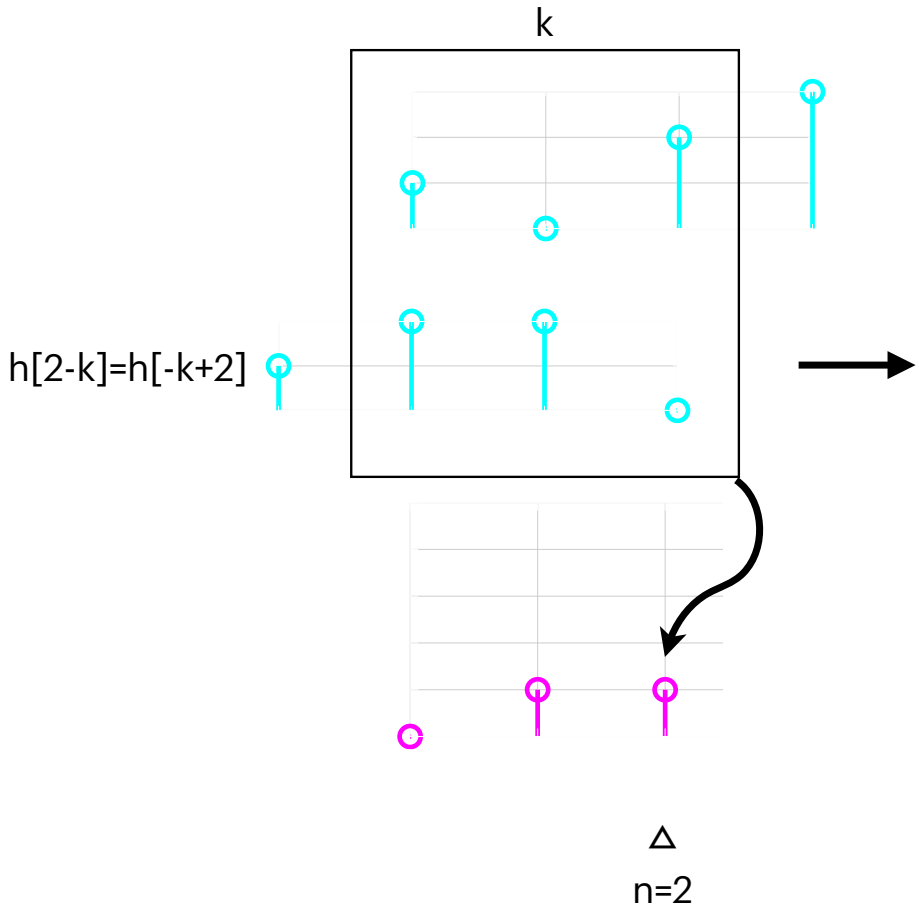
n variando de 0 a 6:

Para n = 2:

y[2] = x[0]h[2-0] + x[1]h[2-1] + x[2]h[2-2] + x[3]h[2-3]
y[2] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] + x[3]h[-1]
y[2] = (1)(2) + (0)(2) + (2)(0) + (3)(0)
y[2] = 2

Ao final:

$y = [0 \quad 2 \quad 2]$



Convolução Discreta

Calculando os termos

Seja:

$x = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 3]$ e $h = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 1]$

Queremos determinar: $y[n] = x[n] * h[n]$

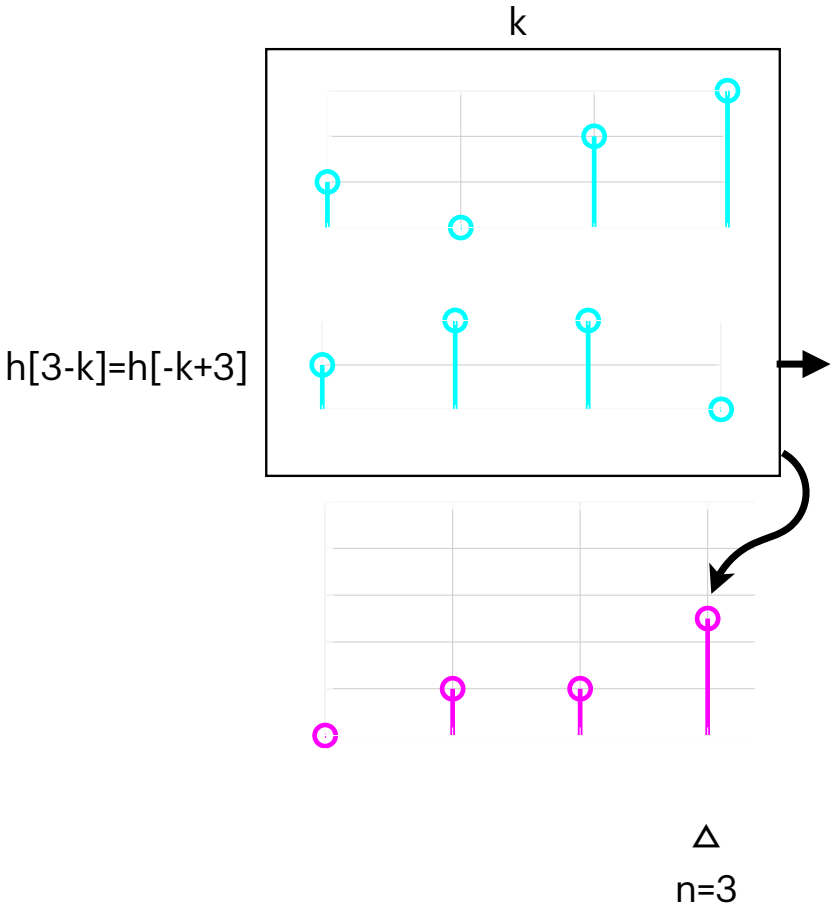
n variando de 0 a 6:

Para n = 3:

y[3] = x[0]h[3-0] + x[1]h[3-1] + x[2]h[3-2] + x[3]h[3-3]
y[3] = x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0]
y[3] = (1)(1) + (0)(2) + (2)(2) + (3)(0)
y[3] = 5

Ao final:

$y = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 5]$



Convolução Discreta

Calculando os termos

Seja:

$x = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 3]$ e $h = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 1]$

Queremos determinar: $y[n] = x[n] * h[n]$

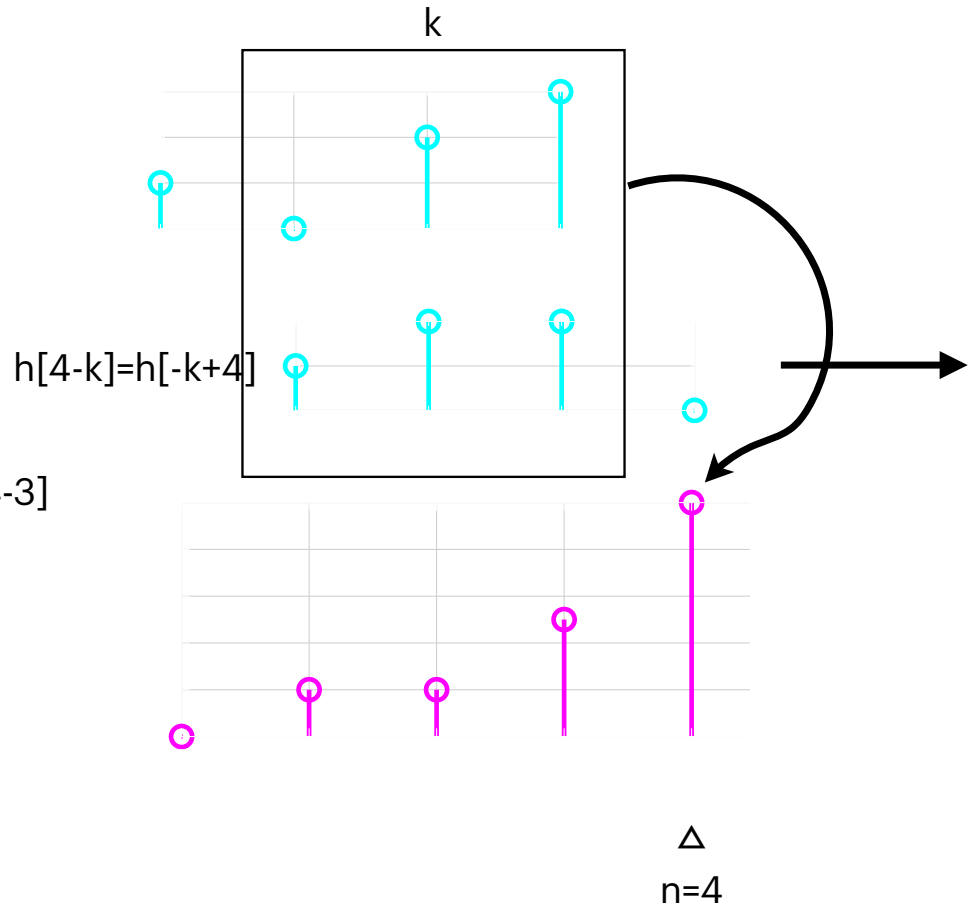
n variando de 0 a 6:

Para n = 4:

y[4] = x[0]h[4-0] + x[1]h[4-1] + x[2]h[4-2] + x[3]h[4-3]
y[4] = x[0]h[4] + x[1]h[3] + x[2]h[2] + x[3]h[1]
y[4] = (1)(0) + (0)(1) + (2)(2) + (3)(2)
y[4] = 10

Ao final:

$y = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 5 \quad 10]$



Convolução Discreta

Calculando os termos

Seja:

$x = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 3]$ e $h = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 1]$

Queremos determinar: $y[n] = x[n] * h[n]$

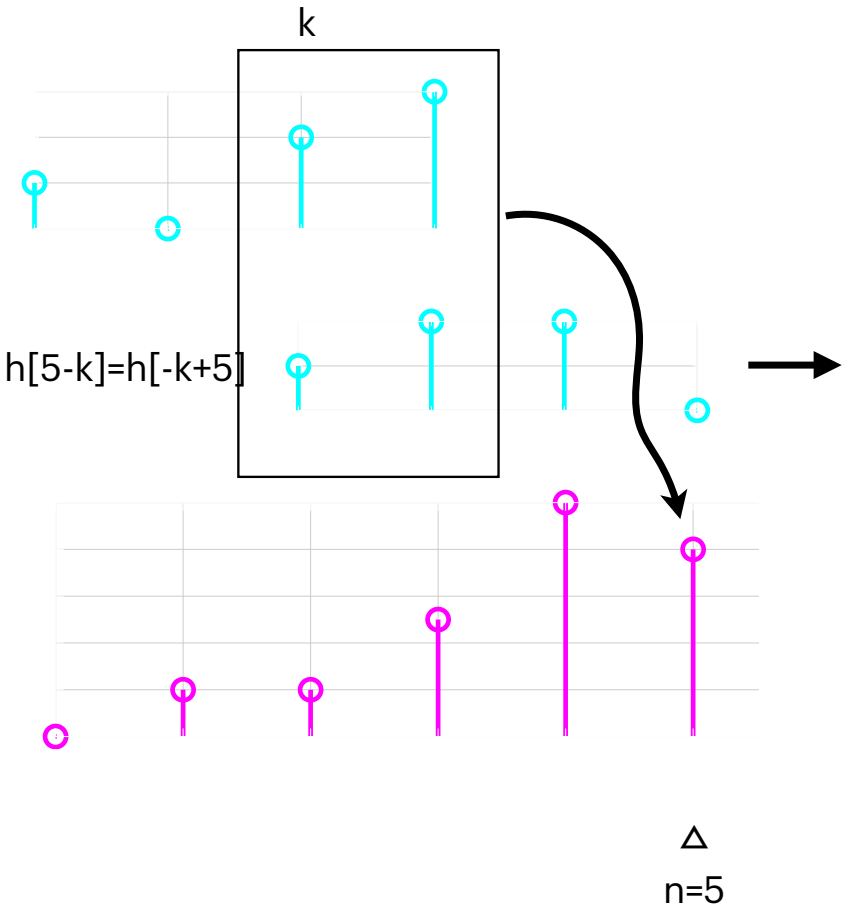
n variando de 0 a 6:

Para n = 5:

y[5] = x[0]h[5-0] + x[1]h[5-1] + x[2]h[5-2] + x[3]h[5-3]
y[5] = x[0]h[5] + x[1]h[4] + x[2]h[3] + x[3]h[2]
y[5] = (1)(0) + (0)(0) + (2)(1) + (3)(2)
y[5] = 8

Ao final:

$y = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 5 \quad 10 \quad 8]$



Convolução Discreta

Calculando os termos

Seja:

$x = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 3]$ e $h = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 1]$

Queremos determinar: $y[n] = x[n] * h[n]$

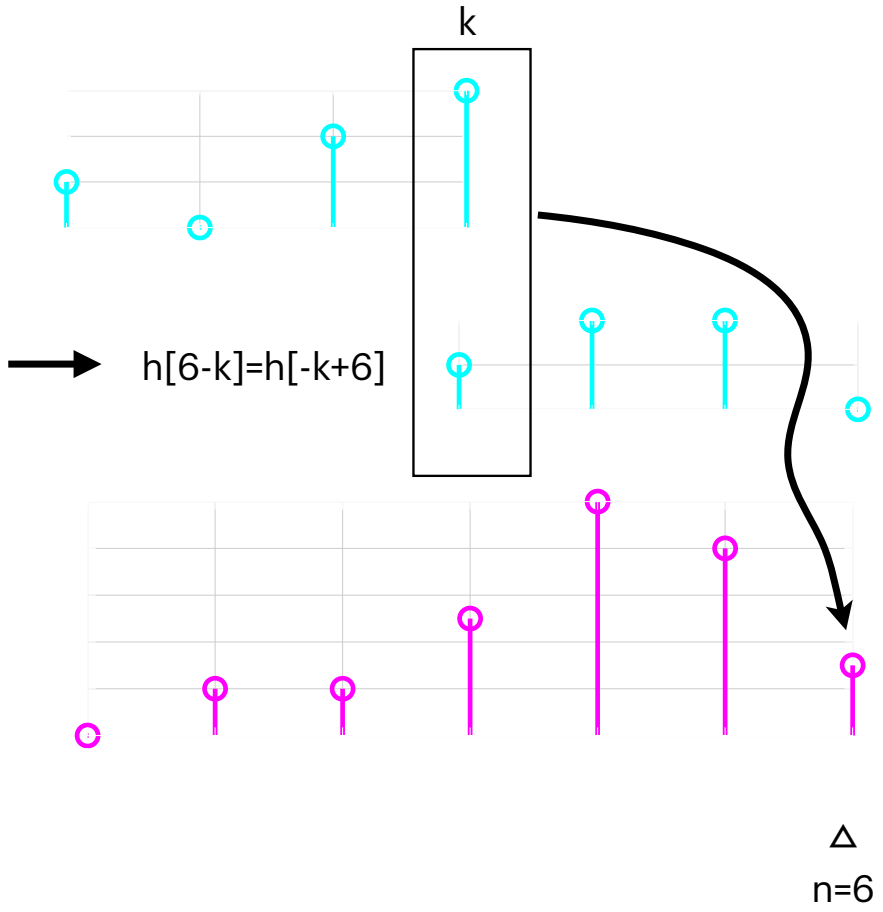
n variando de 0 a 6:

Para n = 6:

y[6] = x[0]h[6-0] + x[1]h[6-1] + x[2]h[6-2] + x[3]h[6-3]
y[6] = x[0]h[6] + x[1]h[5] + x[2]h[4] + x[3]h[3]
y[6] = (1)(0) + (0)(0) + (2)(0) + (3)(1)
y[6] = 3

Ao final:

$y = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 5 \quad 10 \quad 8 \quad 3]$



Convolução Discreta

Calculando os termos

Seja:

$x = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 3]$ e $h = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 1]$

Queremos determinar: $y[n] = x[n] * h[n]$

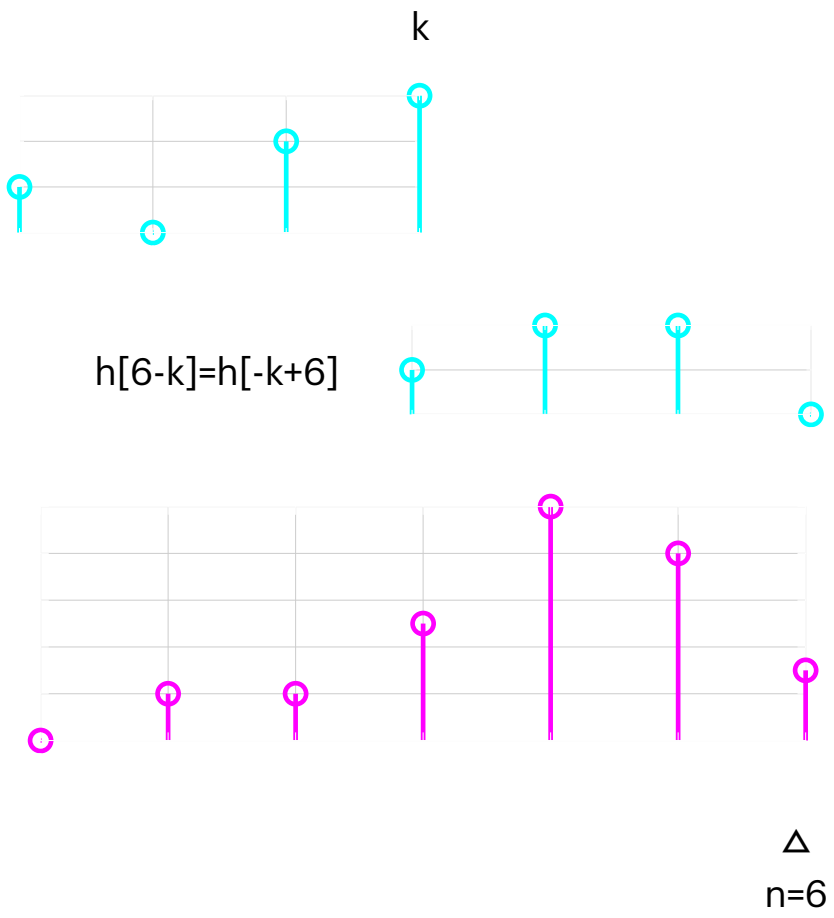
n variando de 0 a 6:

Para n = 6:

y[6] = x[0]h[6-0] + x[1]h[6-1] + x[2]h[6-2] + x[3]h[6-3]
y[6] = x[0]h[6] + x[1]h[5] + x[2]h[4] + x[3]h[3]
y[6] = (1)(0) + (0)(0) + (2)(0) + (3)(1)
y[6] = 3

Ao final:

$y = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 5 \quad 10 \quad 8 \quad 3]$



Convolução Discreta

Calculando os termos

Seja:

$x = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 3]$ e $h = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 1]$

Queremos determinar: $y[n] = x[n] * h[n]$

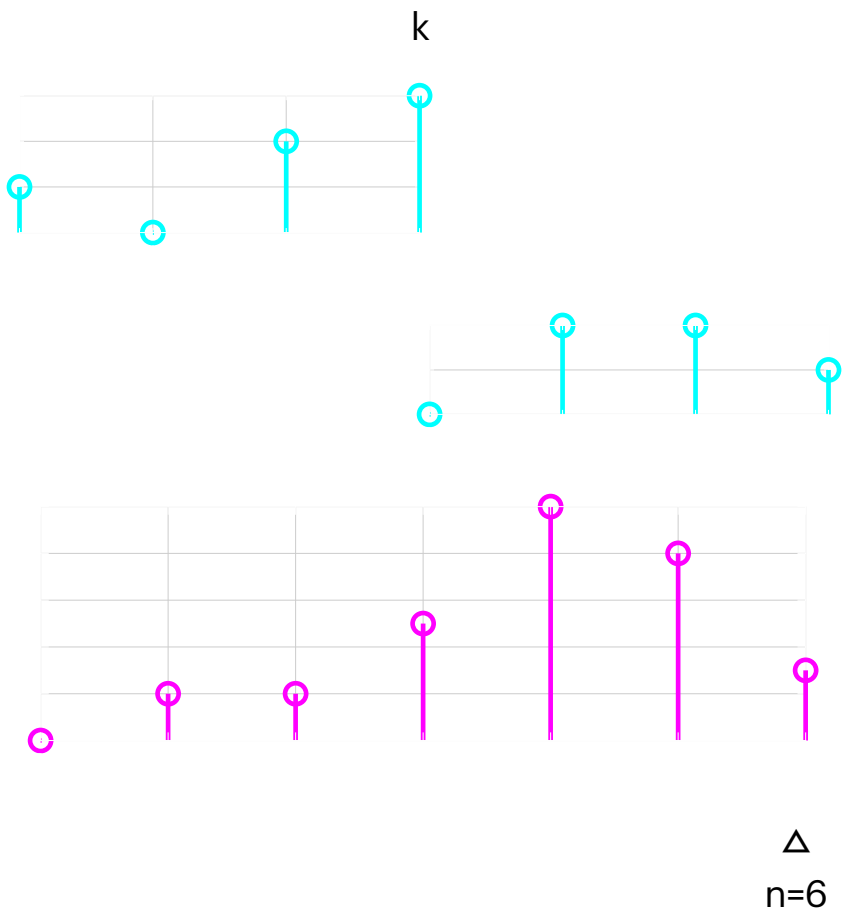
n variando de 0 a 6:

Para n = 6:

y[6] = x[0]h[6-0] + x[1]h[6-1] + x[2]h[6-2] + x[3]h[6-3]
y[6] = x[0]h[6] + x[1]h[5] + x[2]h[4] + x[3]h[3]
y[6] = (1)(0) + (0)(0) + (2)(0) + (3)(1)
y[6] = 3

Ao final:

$y = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 5 \quad 10 \quad 8 \quad 3]$



Convolução Discreta

Calculando os termos

Seja:

$x = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 3]$ e $h = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 1]$

Queremos determinar: $y[n] = x[n] * h[n]$

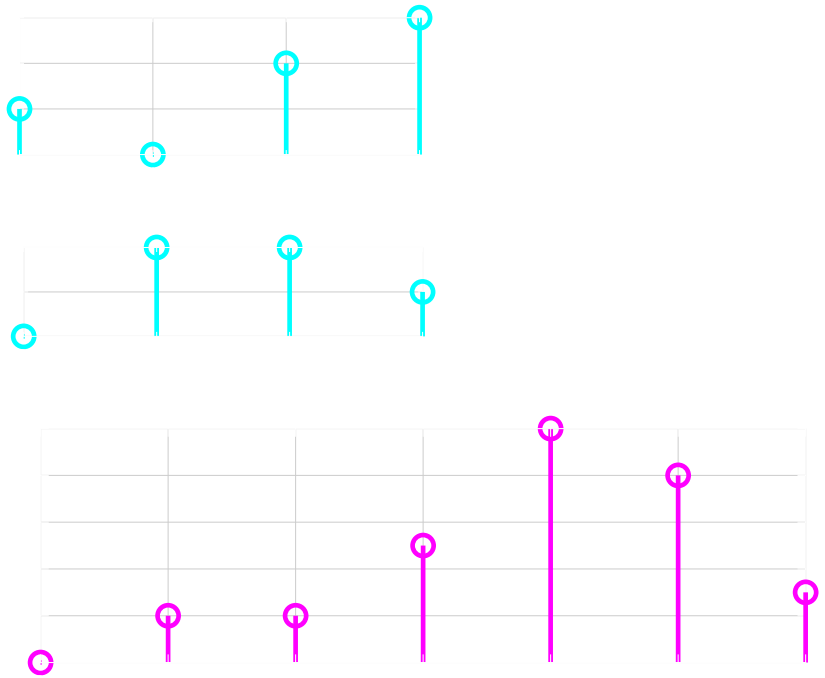
n variando de 0 a 6:

Para n = 6:

y[6] = x[0]h[6-0] + x[1]h[6-1] + x[2]h[6-2] + x[3]h[6-3]
y[6] = x[0]h[6] + x[1]h[5] + x[2]h[4] + x[3]h[3]
y[6] = (1)(0) + (0)(0) + (2)(0) + (3)(1)
y[6] = 3

Ao final:

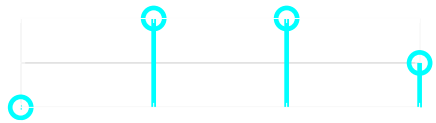
$y = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 5 \quad 10 \quad 8 \quad 3]$



Convolução Discreta

Calculando os termos





$N_x = 4$ (termos de $x[n]$)

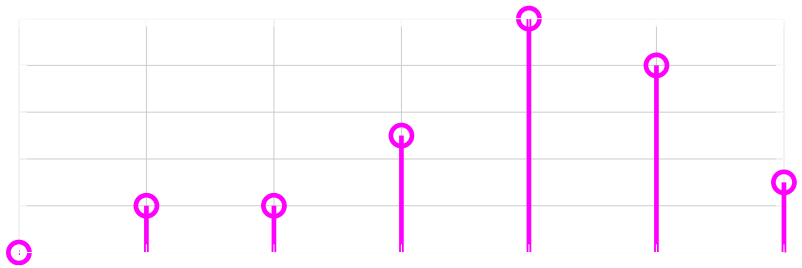
$N_y = 4$ (termos de $h[n]$)

A convolução vai render:

$N = N_x + N_h - 1$ termos, ou:

$N = 4 + 4 - 1 = 7$

n vai variar de 0 a 6



Ao final:

$$y = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 5 \quad 10 \quad 8 \quad 3]$$

Para n = 0:

y[0] = x[0]h[0-0] + x[1]h[0-1] + x[2]h[0-2] + x[3]h[0-3]
y[0] = x[0]h[0] + x[1]h[-1] + x[2]h[-2] + x[3]h[-3]
y[0] = (1)(0) + (0)(0) + (2)(0) + (3)(0)
y[0] = 0

Para n = 1:

y[1] = x[0]h[1-0] + x[1]h[1-1] + x[2]h[1-2] + x[3]h[1-3]
y[1] = x[0]h[1] + x[1]h[0] + x[2]h[-1] + x[3]h[-2]
y[1] = (1)(2) + (0)(0) + (2)(0) + (3)(0)
y[1] = 2

Para n = 2:

y[2] = x[0]h[2-0] + x[1]h[2-1] + x[2]h[2-2] + x[3]h[2-3]
y[2] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] + x[3]h[-1]
y[2] = (1)(2) + (0)(2) + (2)(0) + (3)(0)
y[2] = 2

Para n = 3:

y[3] = x[0]h[3-0] + x[1]h[3-1] + x[2]h[3-2] + x[3]h[3-3]
y[3] = x[0]h[3] + x[1]h[2] + x[2]h[1] + x[3]h[0]
y[3] = (1)(1) + (0)(2) + (2)(2) + (3)(0)
y[3] = 5

Para n = 4:

y[4] = x[0]h[4-0] + x[1]h[4-1] + x[2]h[4-2] + x[3]h[4-3]
y[4] = x[0]h[4] + x[1]h[3] + x[2]h[2] + x[3]h[1]
y[4] = (1)(0) + (0)(1) + (2)(2) + (3)(2)
y[4] = 10

Para n = 5:

y[5] = x[0]h[5-0] + x[1]h[5-1] + x[2]h[5-2] + x[3]h[5-3]
y[5] = x[0]h[5] + x[1]h[4] + x[2]h[3] + x[3]h[2]
y[5] = (1)(0) + (0)(0) + (2)(1) + (3)(2)
y[5] = 8

Para n = 6:

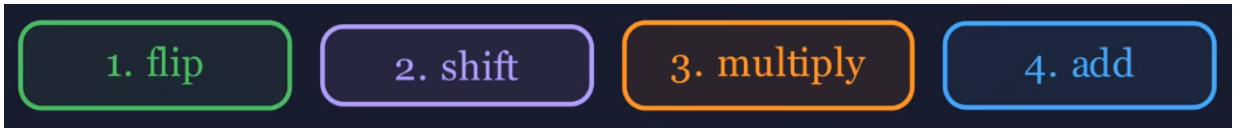
y[6] = x[0]h[6-0] + x[1]h[6-1] + x[2]h[6-2] + x[3]h[6-3]
y[6] = x[0]h[6] + x[1]h[5] + x[2]h[4] + x[3]h[3]
y[6] = (1)(0) + (0)(0) + (2)(0) + (3)(1)
y[6] = 3

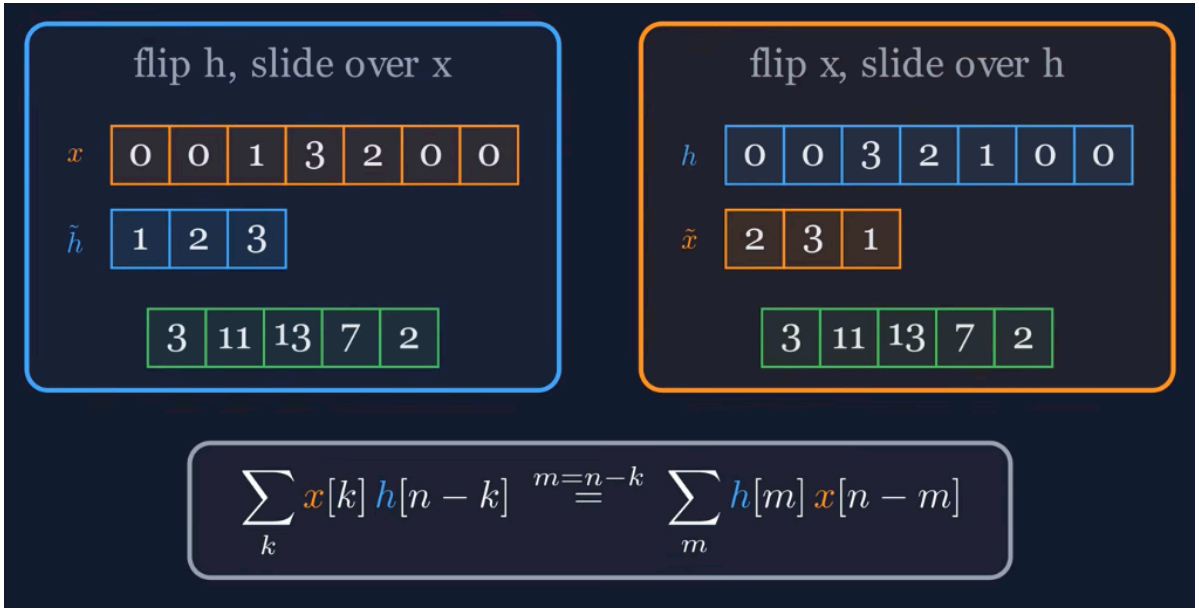
Convolução

Resumo da Operação:



Convolução
Detalhes

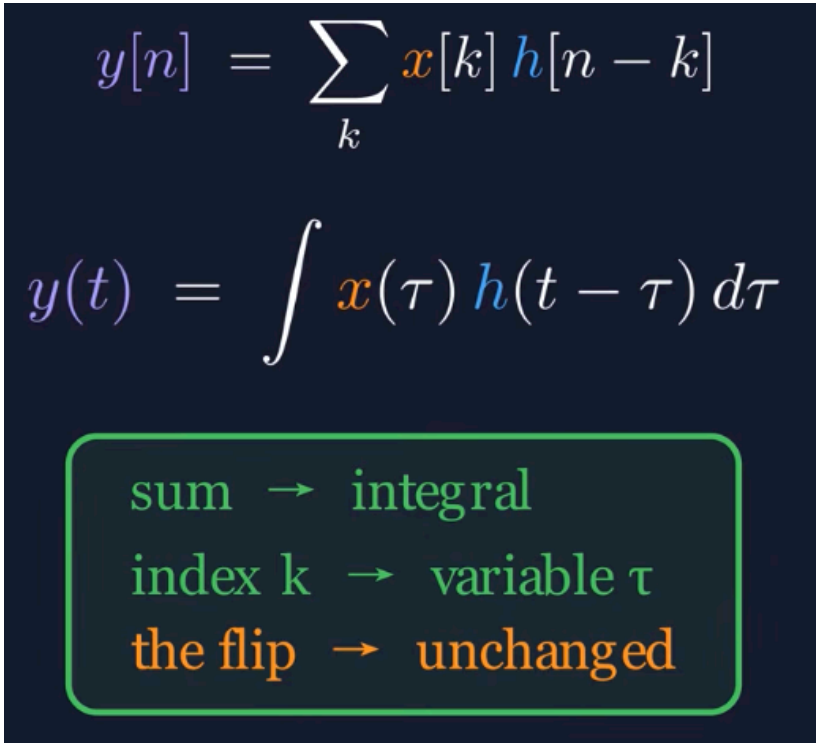




Não faz diferença no resultado, qual variável é invertida e deslocada

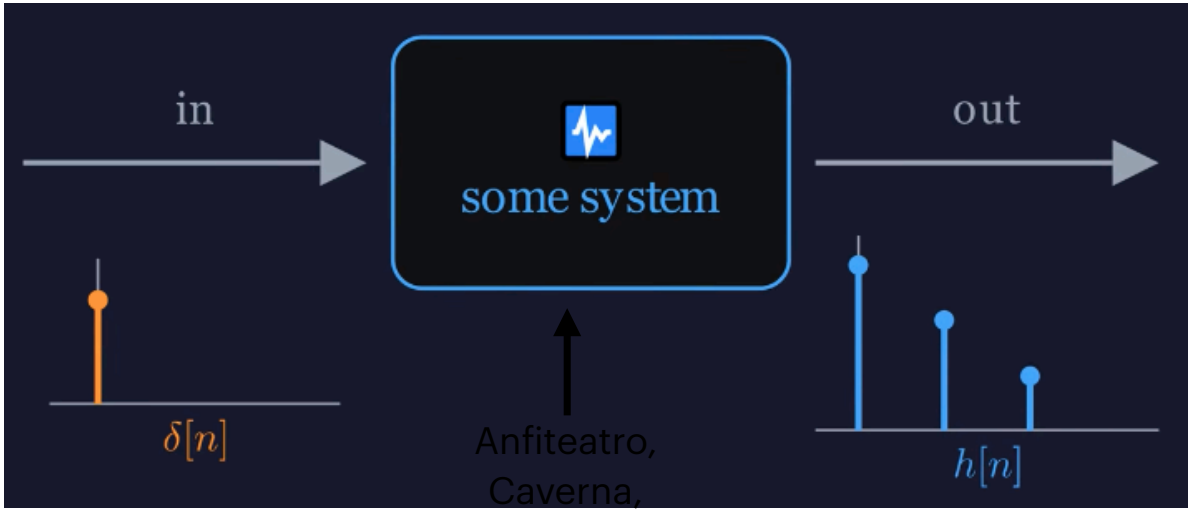
Convolução
Discreta vs Contínua

- Suponha que a distância entre os pontos seja cada vez menor (a amostragem é cada vez mais rápida)



Convolução

Resposta ao Impulso (Caracterização de Ambientes)



Entrada: impulso

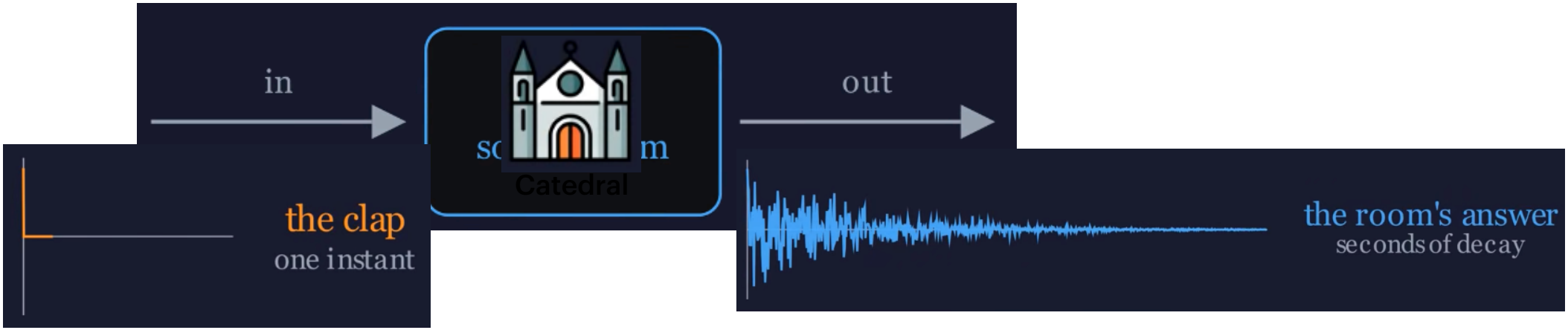
Anfiteatro, Caverna, Arena, Salão, Igreja

Saída: Como o ambiente reage

[2]

Convolução

Resposta ao Impulso (Caracterização de Ambientes)



Entrada: bater palmas

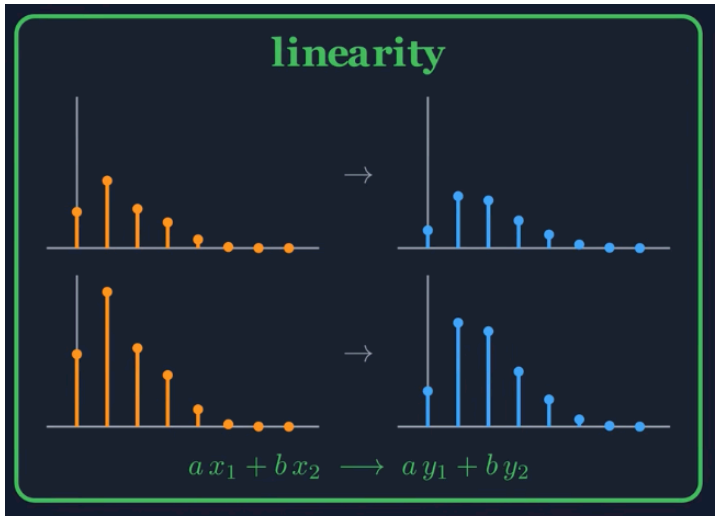
Saída

“Reverberação” ⇐ usando convolução

[2]

Propriedades de Sistemas LTI

Detalhes



Entrada composta por somas escalonadas implica resposta proporcional a estas ponderações



O sistema não muda resposta se entrada é deslocada no tempo,

VANTAGENS: Podemos prever comportamento de um sistema sem ter acesso ao diagrama do circuito, geometria de uma sala ou design de uma lente, ou outras medições.

Necessitamos apenas: Resposta ao Impulso

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

Convolução

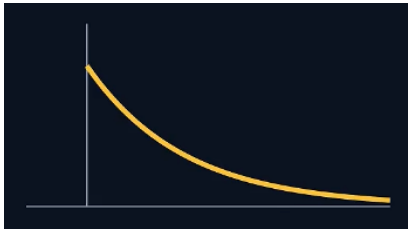
Origem





Resposta ao Impulso

$h(t)$



$$y(t) = x * h = \int x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (LTI) $\Rightarrow y = x * h$

Convolução

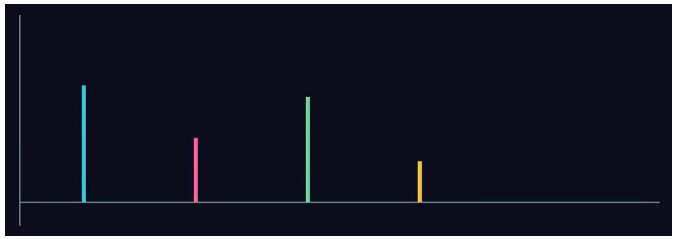
Origem



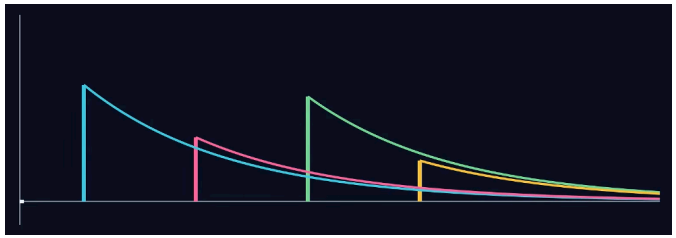
Resposta ao Impulso, $h(t)$

$$y(t) = x * h = \int x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

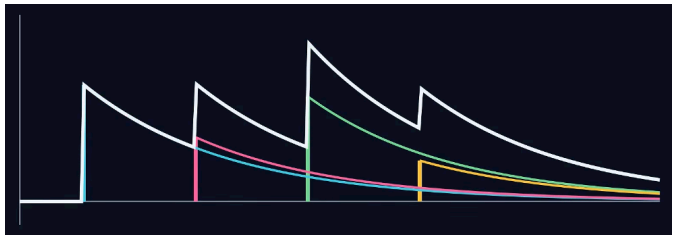
1. Podemos “quebrar” uma entrada em pequenos impulsos



2. Cada impulso ➠ uma cópia de h deslocado e escalonado



3. Como o sistema é linear, podemos somar os diferentes resultados



Convolução

Origem

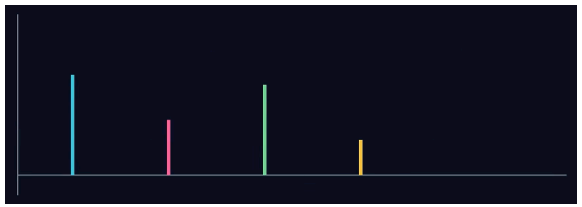


Resposta ao Impulso, $h(t)$

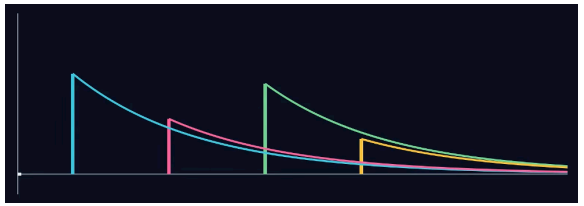
$$y(t) = x * h = \int x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Convolução: soma ponderada das respostas deslocadas

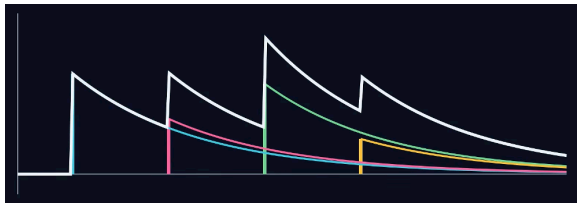
1. Podemos “quebrar” uma entrada em pequenos impulsos



2. Cada impulso ➠ uma cópia de h deslocado e escalonado



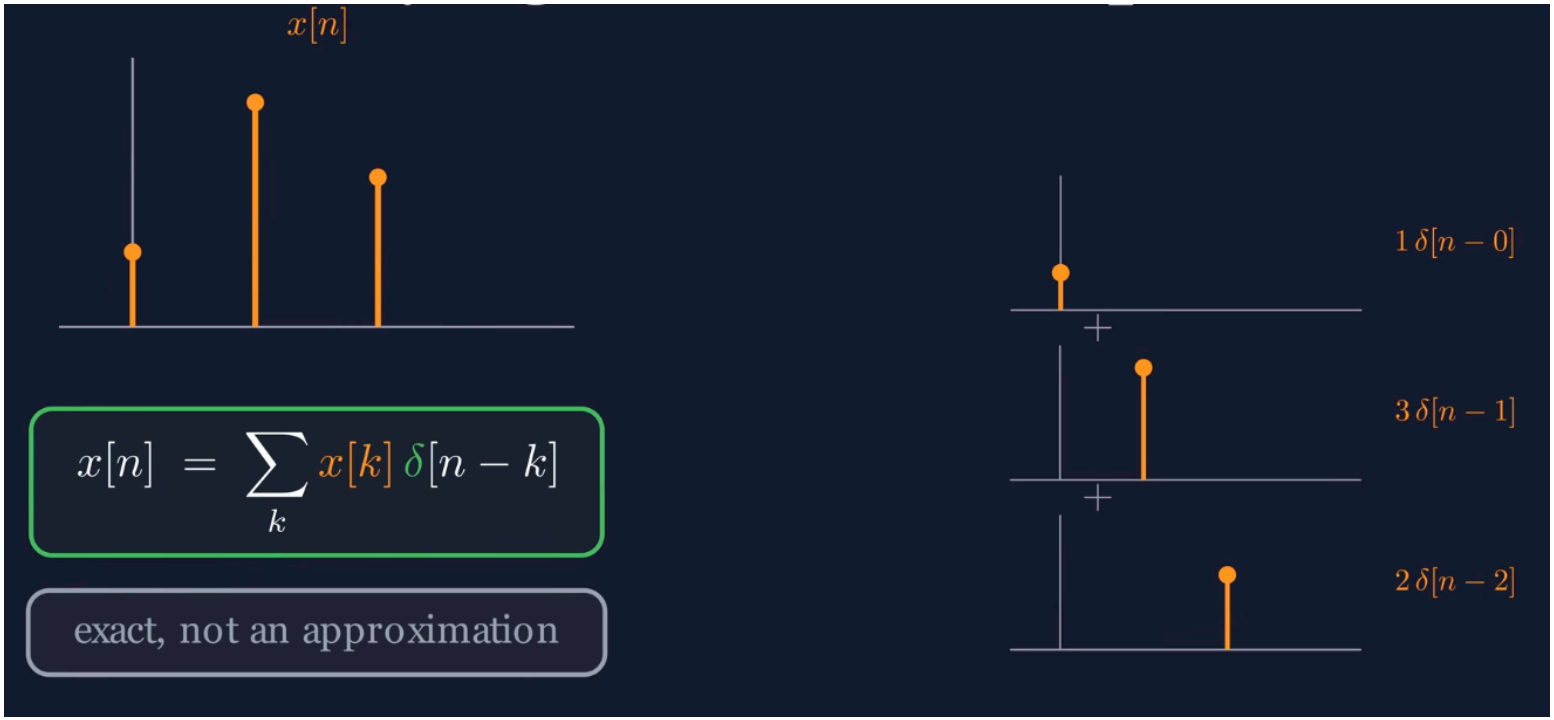
3. Como o sistema é linear, podemos somar os diferentes resultados



Convolução

Caracterização de um sinal

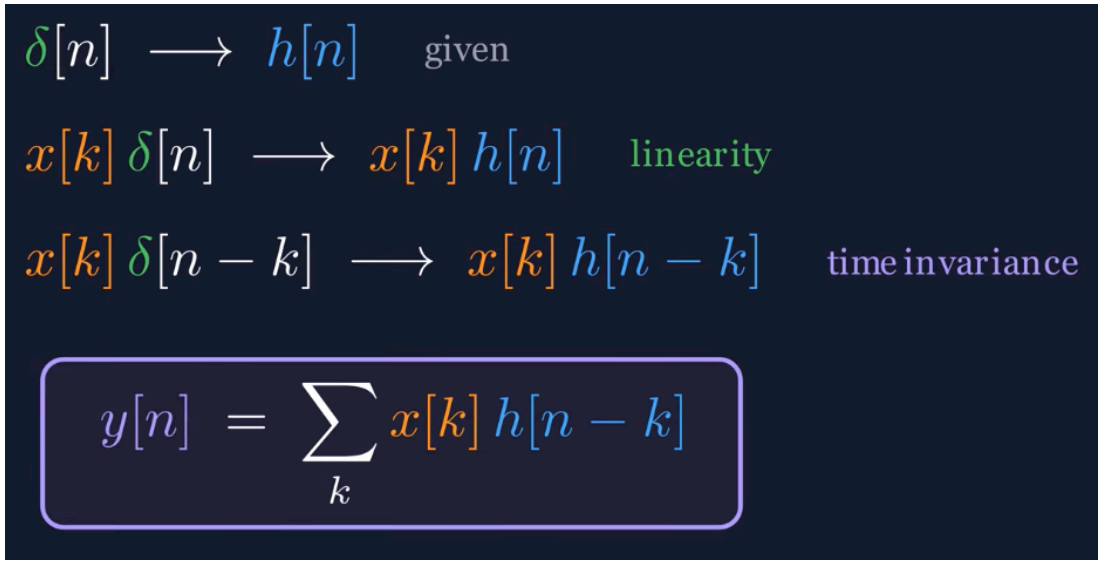
Note: um sinal composto por sequência de impulsos:



Soma de impulsos escalonados e deslocados

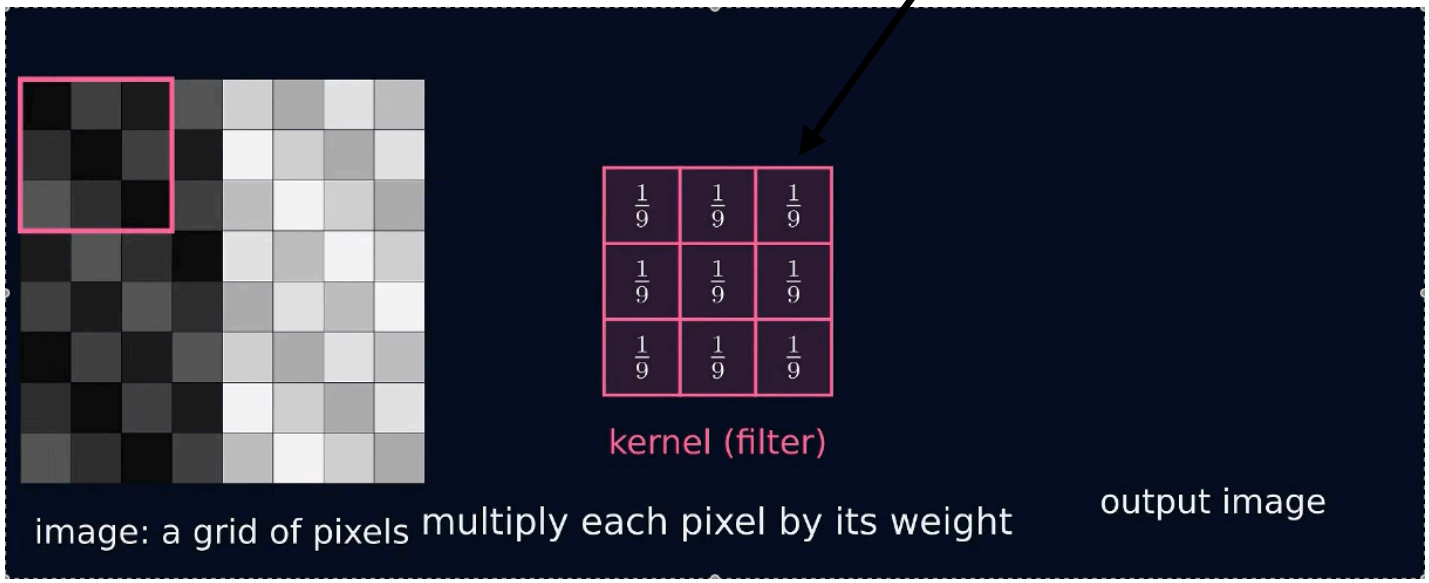
Convolução
Origem

- Note:



Convolução

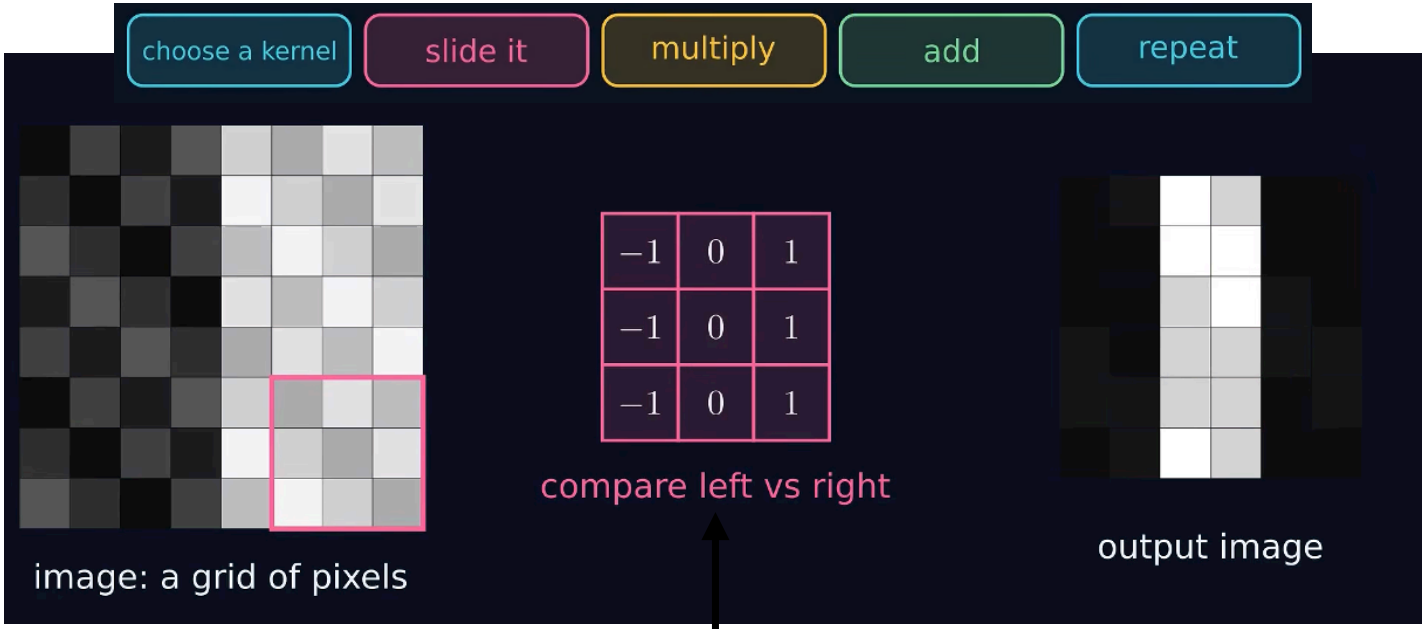
Em Processamento de Imagens



Mas atenção: em processamento de imagens, é realizada correlação cruzada e não verdadeiramente convolução. O “kernel” não é “flipado”. No caso deste exemplo, não faz diferença, mas depende do kernel.

Convolução

Em Processamento de Imagens



Kernel para detectar bordar verticais

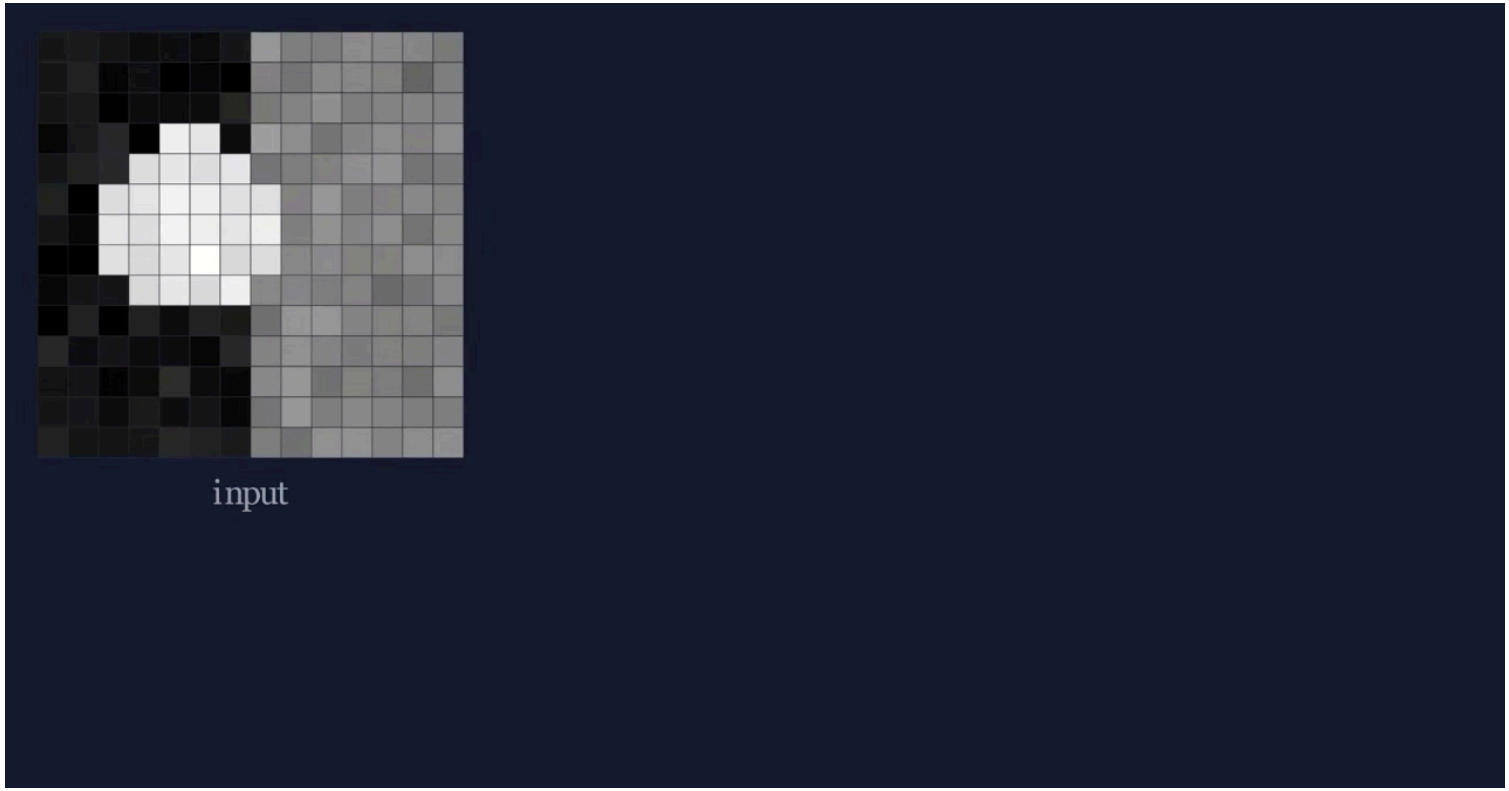
Resultado ⇒

Ressalta linhas verticais

Outros kernel ➟ detectar linhas horizontais, aumentar nitidez, detectar texturas...

Convolução

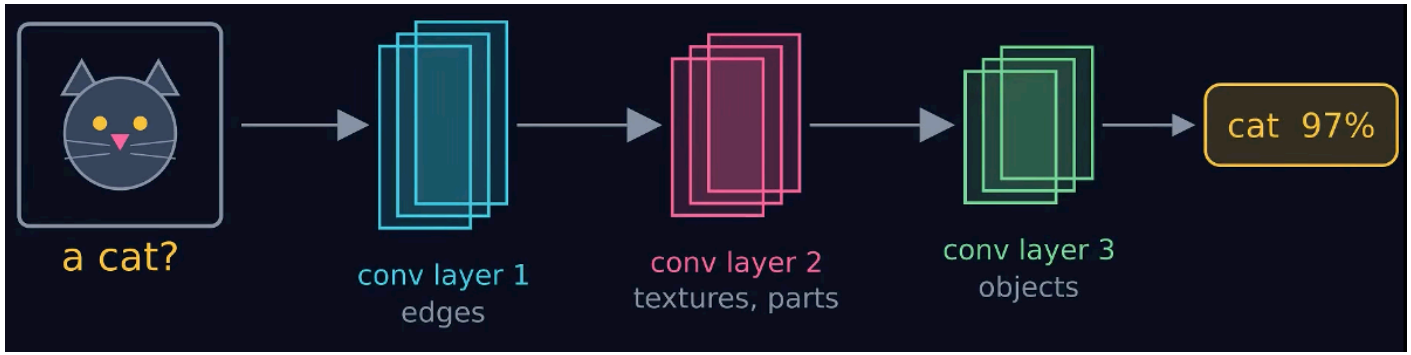
Em Processamento de Imagens



Outros kernel ➟ detectar linhas horizontais, aumentar nitidez, detectar texturas...

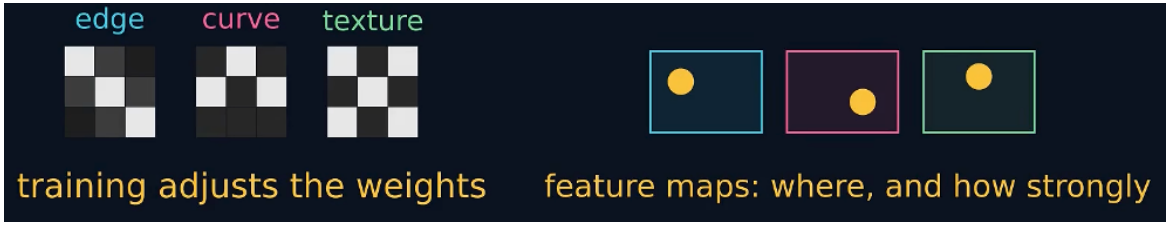
Redes CNN

IA: Rede Neural Convolucional



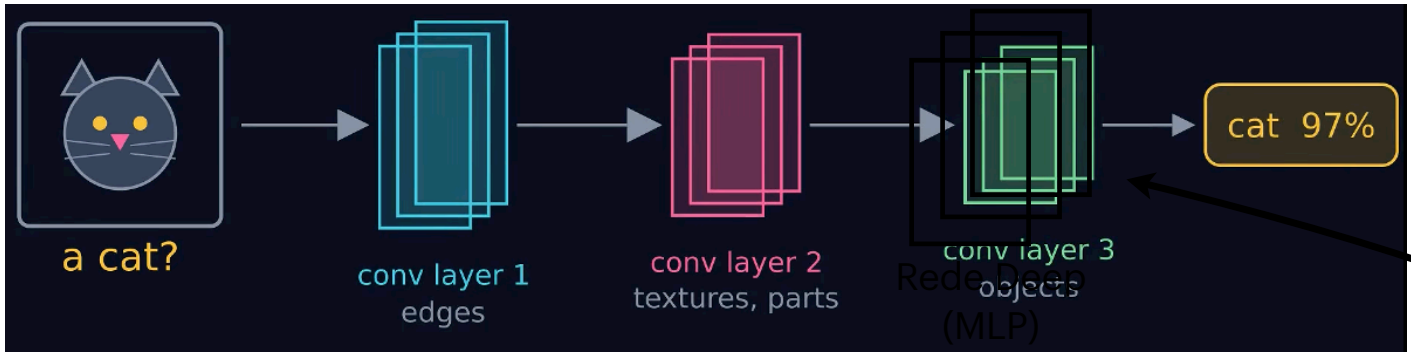
Um algoritmo de treinamento faz uma RN aprender a estabelecer diferentes kernel, cada um especializado em detectar bordas, curvas, texturas, etc...

Quando estes kernel são aplicados a uma imagem (usando “convolução”), o resultado são “feature maps” (mapas de características) que permitem tentar identificar diferentes objetos.



Redes CNN

IA: Rede Neural Convolucional



Um algoritmo de treinamento faz uma RN aprender a estabelecer diferentes kernel, cada um especializado em detectar bordas, curvas, texturas, etc...

Quando estes kernel são aplicados a uma imagem (usando “convolução”), o resultado são “feature maps” (mapas de características) que permitem tentar identificar diferentes objetos.



Camadas finais (de saída), “analisam” estes dados e chegam a conclusões

Convolução

Implicação: domínio tempo $\rightleftharpoons$ domínio frequência

Se fizermos a Transformada de Fourier sobre uma convolução, teremos:

$$\mathcal{F}\{x \quad h\} = \mathcal{F}\{x\} \cdot \mathcal{F}\{h\}$$

Convolução no tempo = multiplicação no domínio frequência

Convolução

Implicação: domínio tempo $\rightleftharpoons$ domínio frequência

$$\mathcal{F}\{x \quad h\} = \mathcal{F}\{x\} \cdot \mathcal{F}\{h\}$$

Um sistema não “altera” um sinal, ele o escala cada frequência, separadamente.

Princípio da “modulação” de um sinal:

Sugestões:

1. YouTube: Convolution Explained Visually — Finally Understand the Math!, Mathspark8, publicado em 10 de out. de 2026, URL: https://youtu.be/F4Edh2S_I-Q
2. YouTube: Convolution Explained: The Math of Echoes, Blurs, and Neural Networks, SynapticByte, publicado em 20 de set. de 2026, URL: https://youtu.be/dFmm6rSGQuE
3. YouTube: Nobody Explained the Fourier Transform Like THIS!, Longhand, 9 de set. de 2026, URL: https://youtu.be/C5NXTQ9rTS8