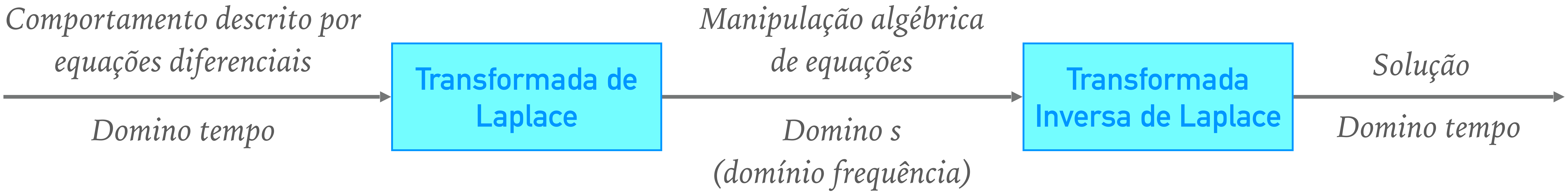
TRANSFORMADA DE LAPLACE

Prof. Fernando Passold
2024

INTRODUÇÃO



$$y(t) = a_2 \frac{\partial^2 x}{\partial t} + a_1 \frac{\partial x}{\partial t} + a_0 x$$

$$Y(S) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 x$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

- Equações diferenciais que descrevem como um sistema se comporta com o tempo, são transformadas em relações algébricas não envolvendo o tempo, em que podemos realizar manipulações algébricas mais simples (normais).
- O comportamento do sistema, originalmente no domínio tempo será transladado para o domínio-*s* (ou plano-*s*), no qual são realizadas a manipulações algébricas.
- Usamos uma transformada inversa, para obter a solução de volta no domínio tempo.

INTRODUÇÃO

Comportamento descrito por equações diferenciais → **Transformada de Laplace** → *Manipulação algébrica de equações* → **Transformada Inversa de Laplace** → *Solução*

Domino tempo | *Domino s (domínio frequência)* | *Domino tempo*

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m t(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 r(t)$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

- Na eq. Diferencial acima, $y(t)$ se refere à saída, $r(t)$ se refere à entrada, e a_i e b_i se referem à parâmetros do sistema.
- Origem das Equações diferenciais: Leis de Kischoff (somatório de d.d.p.'s, somatório das correntes) e Leis de Newton (o somatório das forças é nula; ou somatório dos momentos é nulo).

DEFINIÇÃO

- O matemático francês P.S. de Laplace (1749–1827) descobriu um meio de resolver equações diferenciais: multiplicar cada termo na equação por e^{-st} e então integrar cada termo em relação ao tempo de zero para infinito:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

onde: $s = \sigma + j\omega$, é uma variável complexa.

- A transformada inversa de Laplace é data por:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds = f(t)u(t)$$

onde $u(t)$ = função degrau:
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$

A notação para o limite inferior significa que mesmo que $f(t)$ seja descontínuo em $t = 0$, podemos iniciar a integração antes da descontinuidade desde que a integral convirja. Assim, podemos encontrar a transformada de Laplace das funções impulso.
Esta propriedade tem vantagens distintas ao aplicar a transformada de Laplace à solução de equações diferenciais onde as condições iniciais são descontínuas em $t = 0$.

DEFINIÇÃO

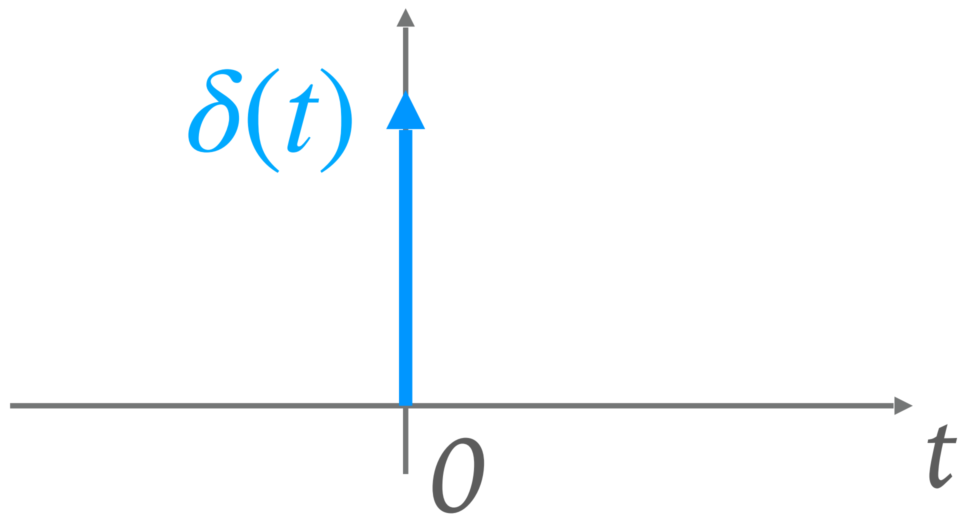
- O matemático francês P.S. de Laplace (1749–1827) descobriu um meio de resolver equações diferenciais: multiplicar cada termo na equação por e^{-st} e então integrar cada termo em relação ao tempo de zero para infinito:
  $$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$
  onde: $s = \sigma + j\omega$, é uma variável complexa.
- A transformada inversa de Laplace é data por:
  $$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds = f(t)u(t)$$
  onde $u(t) =$ função degrau: $$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$

- Exemplo: Seja um resistor R, por onde passa a corrente i e seja v a d.d.p. sobre ele. Geralmente escrevemos:
  $v = Ri$
  Se v e i são ambas funções do tempo, podemos escrever:
  $v(t) = Ri(t)$
  Tomando a transformada de Laplace de i e v, a equação anterior torna-se:
  $V(s) = RI(s)$

TRANSFORMADA DE LAPLACE FUNÇÃO IMPULSO

- Definição: $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \forall\, 0^- < t < 0^+; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$$



- $\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$

TRANSFORMADA DE LAPLACE DA FUNÇÃO DEGRAU

- A equação para esta função é: $f(t) = A \cdot u(t)$; (degrau de amplitude A), onde: $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

- *Solução:*

$$F(s) = \int_0^\infty Ae^{-st}dt = A\int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{A}{s}\left(e^{-st}\right)\Big|_0^\infty$$

quando $t = \infty$, *o valor de* $e^{-\infty}$ *é 0; e quando* $t = 0$, *o valor de* $e^{-0} = 1$.

Então:

$$F(s) = \frac{A}{s}$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE FUNÇÃO EXPONENCIAL

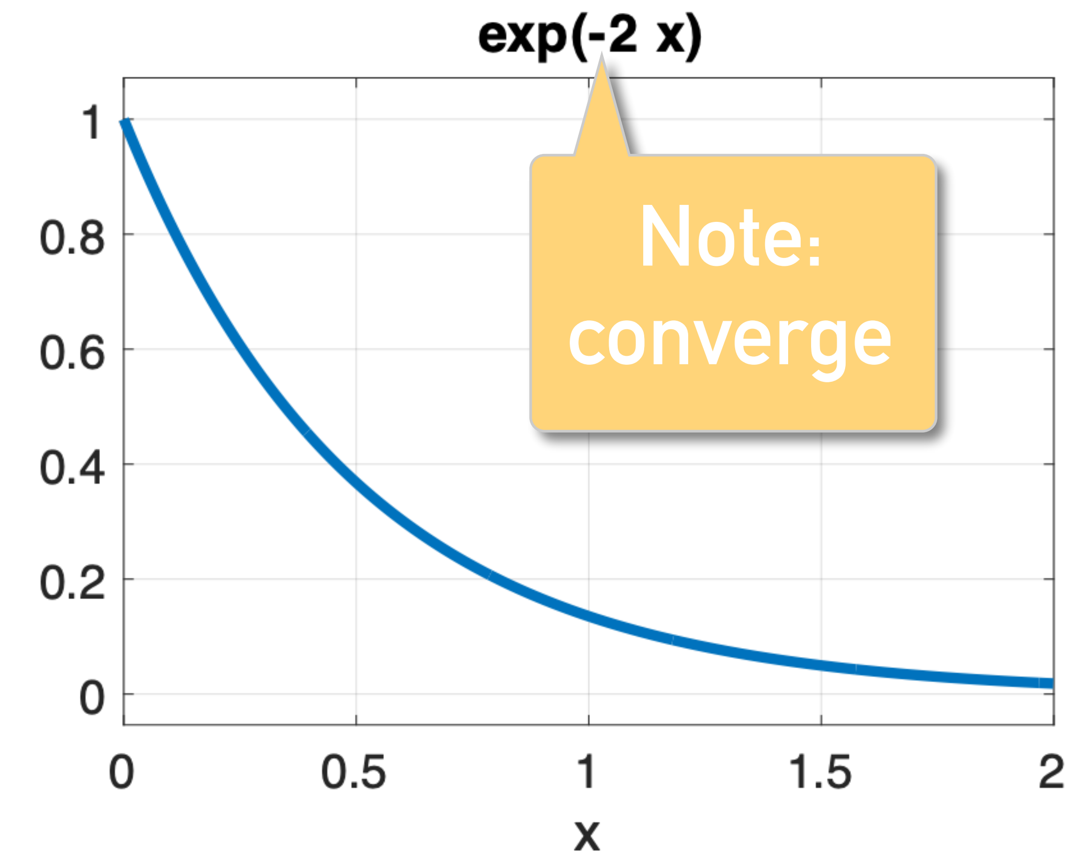
➤ Encontrar a transformada de Laplace de: $f(t) = Ae^{-at}u(t)$.

Solução:

Como a função não contém uma função de impulso, podemos substituir o limite inferior da Eq. De definição da transformada de Laplace por 0. Portanto,

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty Ae^{-at}e^{-st}dt = A\int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt$$

$$F(s) = -\frac{A}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{A}{s+a}$$



>> ezplot('exp(-2*x)',[0 2])

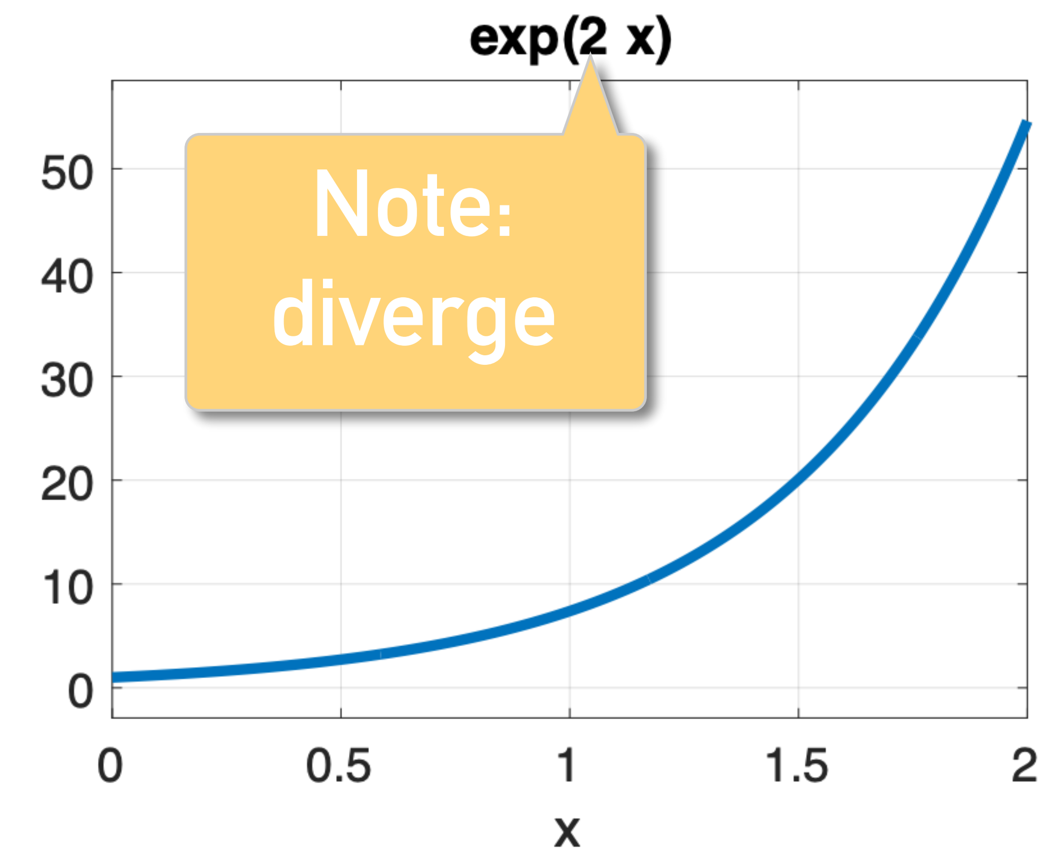
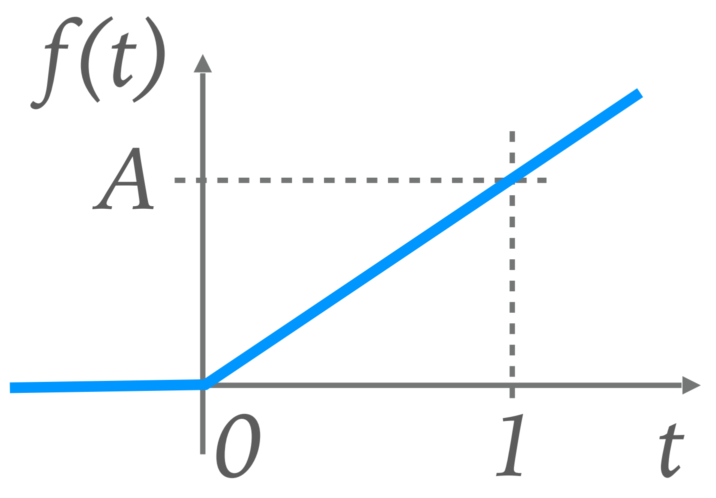
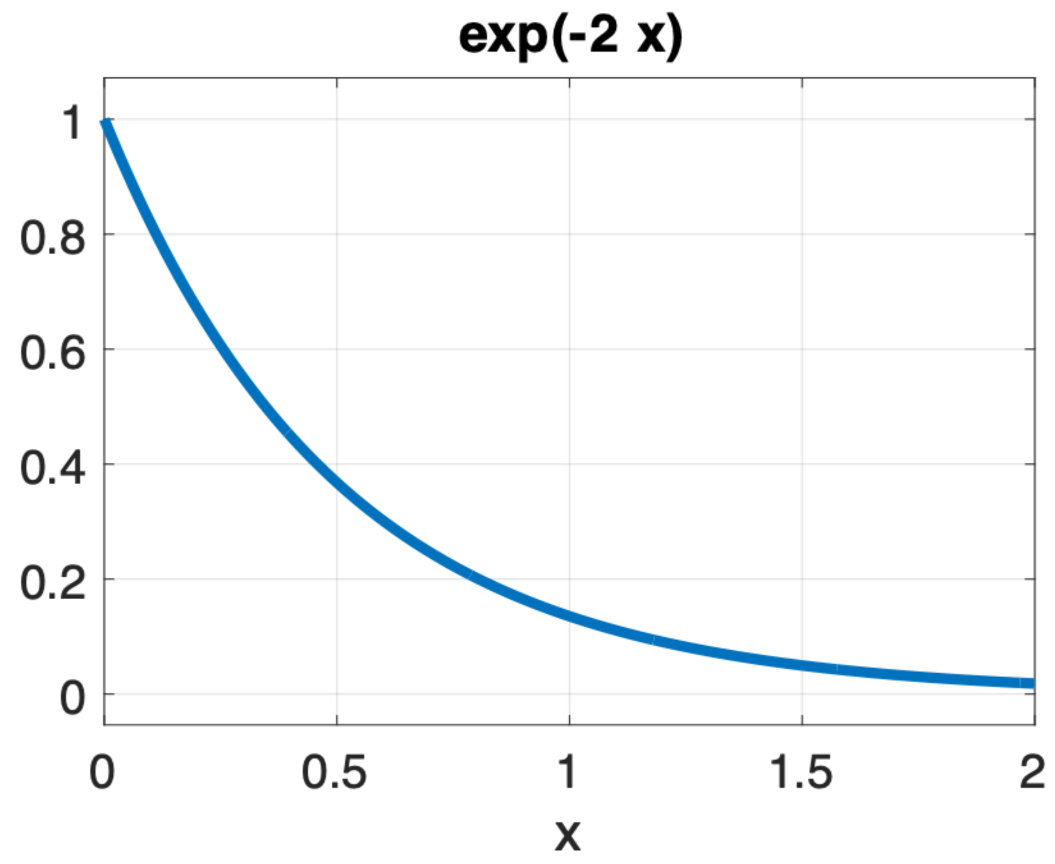


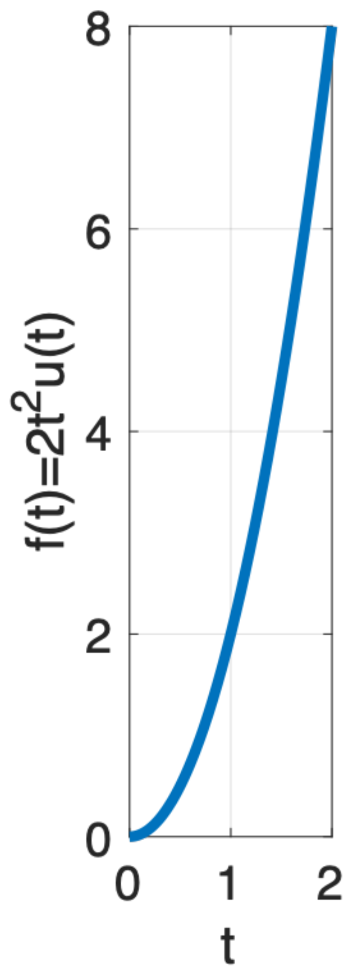
TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

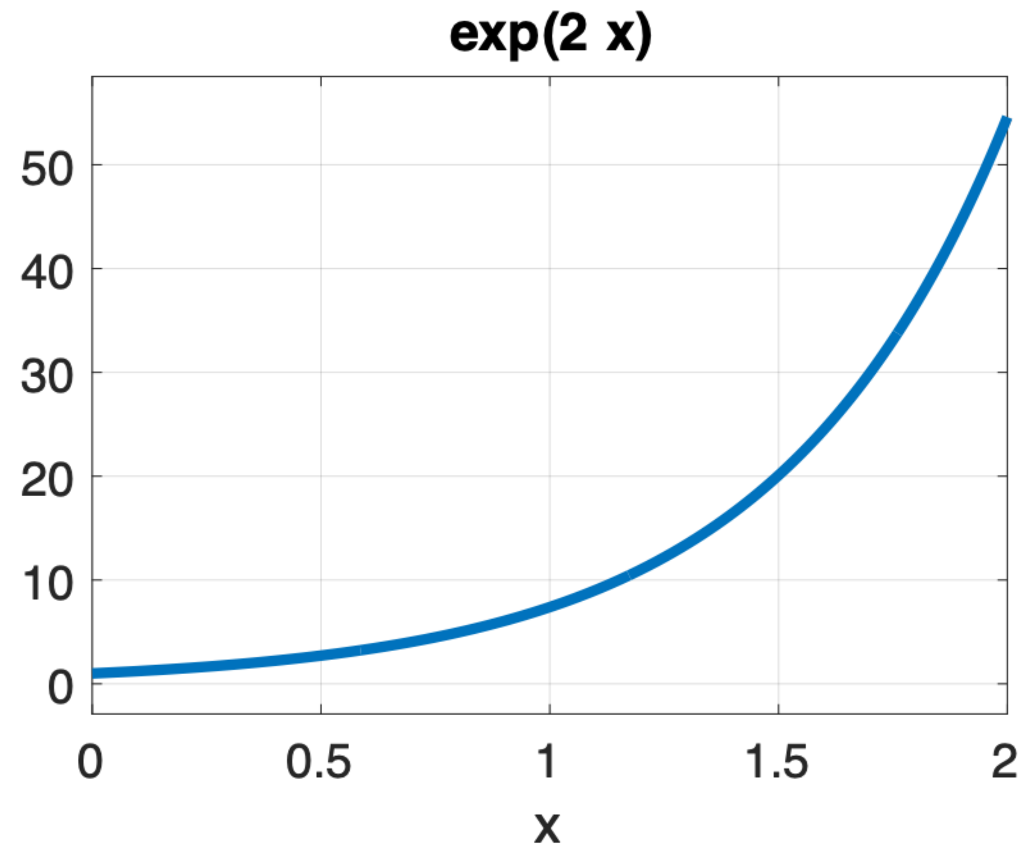
#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
1.	Impulso	$\delta(t)$	1
2.	Degrau	$A \cdot u(t)$	$A \cdot \dfrac{1}{s}$
3.	Reta	$A \cdot t \cdot u(t)$	$A \cdot \dfrac{1}{s^2}$
4.	Polinômio	$t^n \cdot u(t)$	$\dfrac{n!}{s^n + 1}$
5.	Exponencial	$B \cdot e^{-(a \cdot t)} \cdot u(t)$	$\dfrac{B}{s+a}$
6.	Senóide	$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	Cosseno	$\cos(\omega t) u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$





>> ezplot('exp(-2*x)',[0 2])





PROPRIEDADES TRANSFORMADA DE LAPLACE

#	Propriedade	Nome
1.	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definição
2.	$\mathcal{L}\{kf(t)\} = kF(s)$	Linearidade
3.	$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$	Linearidade
4.	$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$	Deslocamento em freqüência
5.	$\mathcal{L}\{f(t-T)\} = e^{-sT}F(s)$	Deslocamento no tempo
6.	$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(s)$	Escalonamento
7.	$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right\} = sF(s) - f(0-)$	Diferenciação
8.	$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$	Diferenciação
9.	$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\right\} = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{k-1}(0-)$	Diferenciação
10.	$\mathcal{L}\left\{\int_{0-}^{t} f(\tau)\,\partial\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$	Integração
11.	$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$	Teorema Valor Final
12.	$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$	Teorema Valor Inicial

EXEMPLO TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

- Encontre a transformada inversa de Laplace de:

$$F(s) = \frac{1}{(s+3)^2}.$$

Solução:

Para resolver este item vamos fazer uso da teorema do deslocamento em freqüência, item (4) da tabela anterior e lembrar da transformada de Laplace de $f(t) = tu(t)$ (item 3 da tabela anterior).

Se a transformada inversa de $F(s) = 1/s^2$ é $tu(t)$, então a transformada inversa de $F(s+a) = 1/(s+a)^2$ é $e^{-at}tu(t)$.

Assim:

$f(t) = e^{-3t}tu(t).$

#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
1.	Impulso	$\delta(t)$	1
2.	Degrau	$A \cdot u(t)$	$A \cdot \frac{1}{s}$
3.	Reta	$A \cdot t \cdot u(t)$	$A \cdot \frac{1}{s^2}$
4.	Polinômio	$t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{s^n + 1}$
5.	Exponencial	$B \cdot e^{-(a \cdot t)} \cdot u(t)$	$\frac{B}{s+a}$
6.	Senóide	$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	Cosseno	$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

- Para encontrar a transformada de Laplace inversa de uma função complicada, podemos converter a função em uma soma de termos mais simples para os quais conhecemos a transformada de Laplace de cada termo. O resultado é chamado de expansão de frações parciais.

- Se $F_1(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$, onde a ordem de $N(s)$ é menor que a ordem de $D(s)$ então uma expansão em frações parciais pode ser realizada.

- Se a ordem de $N(s)$ é maior ou igual que a ordem de $D(s)$, então $N(s)$ deve ser dividido por $D(s)$ sucessivamente até que o resultando alcance um numerador possua ordem menor que o denominador. Por exemplo:

  $$F_1(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6s + 7}{s^2 + s + 5}$$

  devemos realizar a divisão, assim:

  $$\begin{array}{rrrr|l} s^3 & +2s^2 & +6s & +7 & s^2+s+5 \\ \cline{5-5} -s^3 & -1s^2 & -5s & & s+1 \\ \cline{1-3} & s^2 & +s & +7 & \\ & -s^2 & -s & -5 & \\ \cline{2-4} & & & 2 & \end{array}$$

  $$F_1(s) = s + 1 + \frac{2}{s^2 + s + 5}$$

  E então realizamos a transformada inversa de Laplace, obtendo:

  $$f_1(t) = \frac{\partial \delta(t)}{\partial t} + \delta(t) + \mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{2}{s^2 + s + 5} \right\}$$

  E então usando expansão em frações parciais, expandimos $F(s) = 1/\left(s^2 + s + 5\right)$.

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS (2)

- Expandindo: $F(s) = 1/\left(s^2 + s + 5\right)$.
- 3 Casos:
  - 1) raizes reais e distintas:
  - 2) raízes reais repetidas:
  - 3) raízes complexas:

```
>> roots([1 1 5])
ans =
       -0.5 +    2.1794i
       -0.5 -    2.1794i
```

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS – CASO DE RAÍZES REAIS E DISTINTAS – EXEMPLO

- Dado a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} + 32y(t) = 32u(t)$$

resolva para $y(t)$ se as condições iniciais forem nulas.

Usar transformada de Laplace.

Tabela de Transformadas:

#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
2.	Degrau	$A \cdot u(t)$	$A \cdot \frac{1}{s}$

- *Solução:*

Usando uma tabela de transformadas de Laplace, suas Propriedades e lembrando das condições iniciais $(y(0^-) = 0$ *e* $\dot{y}(0^-) = 0)$ *temos que:*

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s}$$

Isolando $Y(s)$*, temos:*

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2+12s+32)} = \frac{32}{s(s+4)(s+8)}$$

Expandindo $Y(s)$*, teremos:*

$$Y(s) = \frac{32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+4)} + \frac{R_3}{(s+8)}$$

Encontrando os resíduos:

$$R_1 = \frac{32 \cdot \cancel{s}}{\cancel{s}(s+4)(s+8))}\Big|_{s=0} = \frac{32}{(4)(8)} = 1$$

$$R_2 = \frac{32 \cdot \cancel{(s+4)}}{s\cancel{(s+4)}(s+8)}\Big|_{s=-4} = \frac{32}{(-4)(-4+8)} = -2$$

$$R_3 = \frac{32 \cdot \cancel{(s+8)}}{s(s+4)\cancel{(s+8)})}\Big|_{s=-8} = \frac{32}{(-8)(-8+4)} = 1$$

E então:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+4)} + \frac{1}{(s+8)}$$

E então finalmente:

$$y(t) = \left(1 - 2e^{-4t} + e^{-8t}\right)u(t)$$

#	Propriedade	Nome
7.	$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right\} = sF(s) - f(0-)$	Diferenciação
8.	$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$	Diferenciaç

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES REAIS E DISTINTAS - EXEMPLO

- Dado a seguinte equação diferencial:

  $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} + 32y(t) = 32u(t)$$

  resolva para $y(t)$ se as condições iniciais forem nulas.

  Usar transformada de Laplace.

#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
2.	Degrau	$A \cdot u(t)$	$A \cdot \frac{1}{s}$
5.	Exponencial	$B \cdot e^{-(a \cdot t)} \cdot u(t)$	$\frac{B}{s+a}$

- *Solução:*

Usando uma tabela de transformadas de Laplace, suas Propriedades e lembrando das condições iniciais ($y(0^-) = 0$ e $\dot{y}(0^-) = 0$) temos que:

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s}$$

Isolando $Y(s)$, temos:

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2 + 12s + 32)} = \frac{32}{s(s+4)(s+8)}$$

Expandindo $Y(s)$, teremos:

$$Y(s) = \frac{32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+4)} + \frac{R_3}{(s+8)}$$

Encontrando os resíduos:

$$R_1 = \frac{32 \cdot \cancel{s}}{\cancel{s}(s+4)(s+8))}\Big|_{s=0} = \frac{32}{(4)(8)} = 1$$

$$R_2 = \frac{32 \cdot \cancel{(s+4)}}{s\cancel{(s+4)}(s+8)}\Big|_{s=-4} = \frac{32}{(-4)(-4+8)} = -2$$

$$R_3 = \frac{32 \cdot \cancel{(s+8)}}{s(s+4)\cancel{(s+8))}}\Big|_{s=-8} = \frac{32}{(-8)(-8+4)} = 1$$

E então:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+4)} + \frac{1}{(s+8)}$$

E então finalmente:

$$y(t) = \left(1 - 2e^{-4t} + e^{-8t}\right)u(t)$$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES COMPLEXAS

- Exemplo: $F(s) = \dfrac{3}{s(s^2+2s+5)}$ (1)

  cujas raízes resultam em: $s = 0$ e $s = -1 \pm j2$

- A expansão em frações, resulta:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3/5}{s} + \frac{(-3/5)s + (-6/5)}{s^2+2s+5}$$

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left(\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right)$$

- O último termo envolve a transformadas de Laplace de uma função exponencial que amortece um cosseno e um seno:

$$\mathscr{L}\left\{Ae^{-at}\cos(\omega t)\right\} = \frac{A(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{Be^{-at}\sin(\omega t)\right\} = \frac{B\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{Ae^{-at}\cos(\omega t) + Be^{-at}\sin(\omega t)\right\} = \frac{A(s+a)+B\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

- Adaptando ao nosso caso, temos:

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left[\frac{(s+1)+(1/2)(2)}{(s+1)^2+2^2}\right]$$

- Consultando uma tabela de transformadas:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left[\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]$$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES COMPLEXAS

- Exemplo: $F(s) = \dfrac{3}{s(s^2+2s+5)}$ (1)

  cujas raízes resultam em: $s = 0$ e $s = -1 \pm j2$

- A expansão em frações, resulta:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3/5}{s} + \frac{(-3/5)s + (-6/5)}{s^2+2s+5}$$

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left(\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right)$$

Com base em relações trigonométricas, pode-se escrever:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{1^2+(1/2)^2}e^{-t}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+(1/2)^2}}\cos 2t + \frac{1}{\sqrt{1^2+(1/2)^2}}\sin 2t\right)$$

onde:

$$\cos\phi = 1/\sqrt{1^2+(1/2)^2} \text{ e } \sin\phi = (1/2)/\sqrt{1^2+(1/2)^2}$$

Assim:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{1^2+(1/2)^2}e^{-t}\left(\cos\phi\cos 2t + \sin\phi\sin 2t\right)$$

- Adaptando ao nosso caso, temos:

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left[\frac{(s+1)+(1/2)(2)}{(s+1)^2+2^2}\right]$$

- Consultando uma tabela de transformadas:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left[\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]$$

Ou:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{1^2+(1/2)^2}e^{-t}\left[\cos(2t-\phi)\right]$$

onde $\phi = \arctan(1/2) = 26{,}57^o$, ou:

$$f(t) = 0{,}6 - 0{,}6 \cdot 1{,}118e^{-t}\cos(2t + 26{,}57^o)$$

$$f(t) = 0{,}6\left[1 - 1{,}118e^{-t}\cos(2t + 26{,}57^o)\right]$$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES COMPLEXAS

- Exemplo: $F(s) = \dfrac{3}{s(s^2+2s+5)}$ (1)

  cujas raízes resultam em: $s = 0$ e $s = -1 \pm j2$

- A expansão em frações, resulta:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3/5}{s} + \frac{(-3/5)s + (-6/5)}{s^2+2s+5}$$

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left(\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right)$$

- O último termo envolve a transformadas de Laplace de uma função exponencial que amortece um cosseno e um seno:

$$\mathscr{L}\left\{Ae^{-at}\cos(\omega t)\right\} = \frac{A(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{Be^{-at}\sin(\omega t)\right\} = \frac{B\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{Ae^{-at}\cos(\omega t) + Be^{-at}\sin(\omega t)\right\} = \frac{A(s+a)+B\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

- Adaptando ao nosso caso, temos:

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left[\frac{(s+1)+(1/2)(2)}{(s+1)^2+2^2}\right]$$

- Consultando uma tabela de transformadas:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left[\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]$$

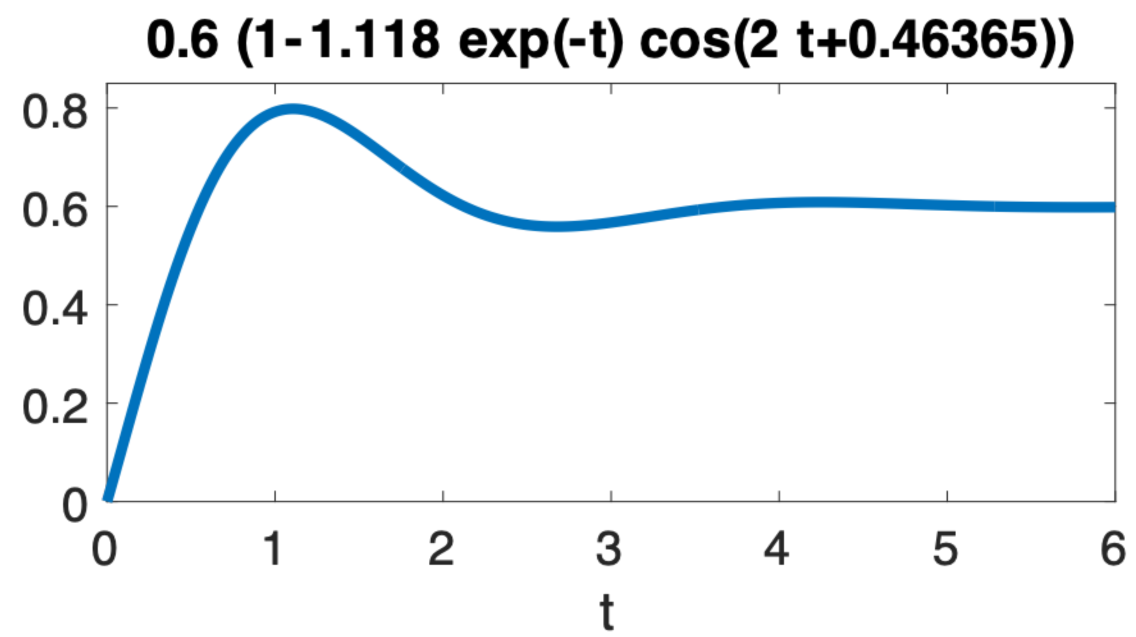
- Ou:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{1^2+(1/2)^2}e^{-t}\left[\cos(2t-\phi)\right]$$

  onde $\phi = \arctan(1/2) = 26{,}57^o$, ou:

$$f(t) = 0{,}6 - 0{,}6 \cdot 1{,}118e^{-t}\cos(2t + 26{,}57^o)$$

$$f(t) = 0{,}6\left[1 - 1{,}118e^{-t}\cos(2t+26{,}57^o)\right]$$

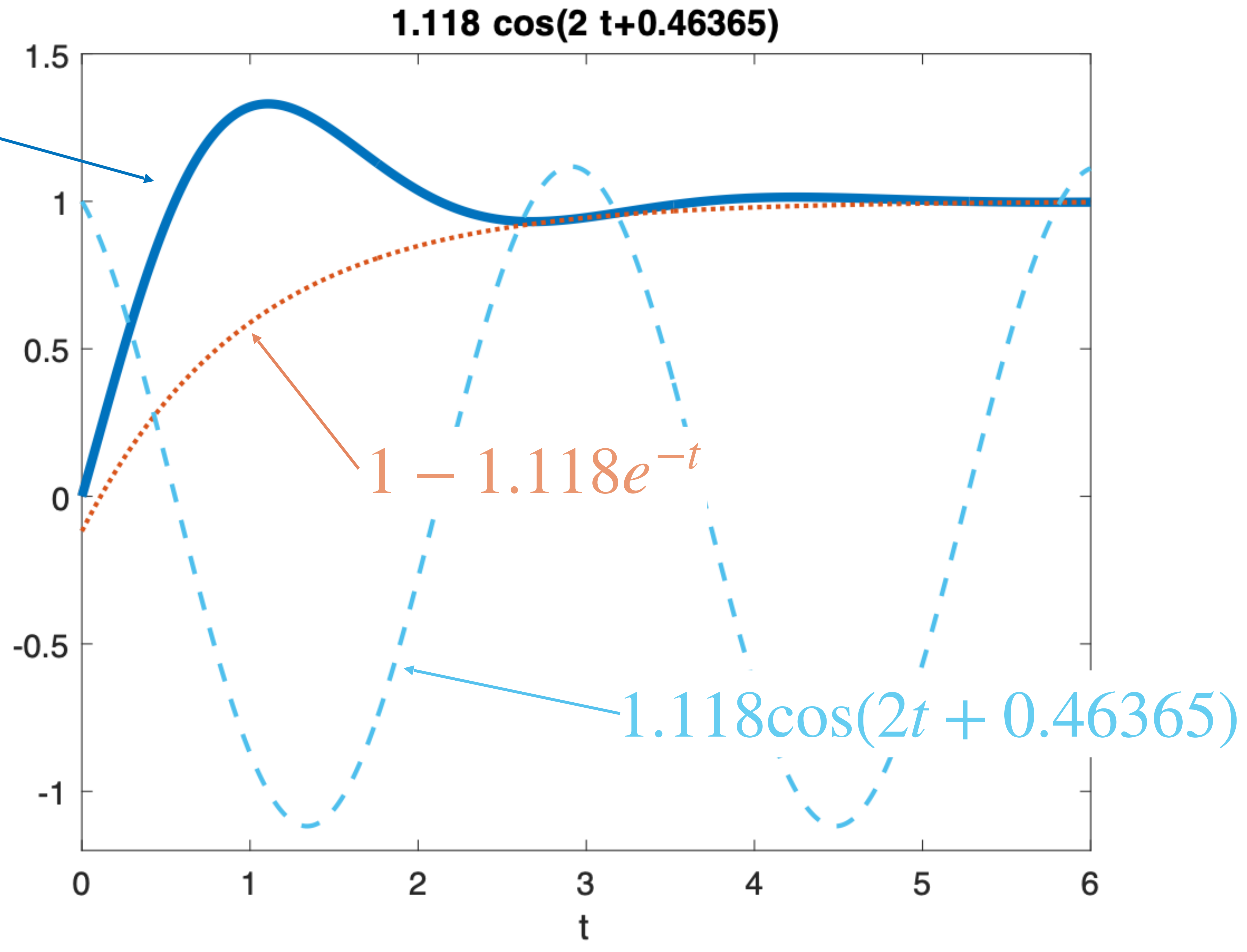


Comandos Matlab:

$$1 - 1.118e^{-t}\cos(2t + 0.46365)$$

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

$$f(t) = 0{,}6\left[1 - 1{,}118e^{-t}\cos(2t + 26{,}57^o)\right]$$




```
>> atan(1/2)
ans =       0.46365 % (rad)
>> ezplot('1-1.118*exp(-t)*cos(2*t+0.46365)', [0 6])
>> hold on
>> ezplot('1-1.118*exp(-t)', [0 6])
>> ezplot('1.118*cos(2*t+0.46365)', [0 6])
>> axis([0 6 -1.2 1.5])
```

USANDO MATLAB

- A função '[R,p,k]=**residue**(N,D)', onde:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{R_n}{s - p_n} + \ldots + \frac{R_2}{s - p_2} + \frac{R_1}{s - p_1} + k(s)$$

- Parâmetros de entrada:

  N é o vetor que contêm os coeficientes de $N(s)$,
  $N = [b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0]$;
  D é o vetor que contêm os coeficientes de $D(s)$,
  $D = [a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0]$;

- Parâmetros de saída:

  R é o vetor que contêm os resíduos, $R = [R_n R_{n-1} \ldots R_1 R_0]$;
  P é o vetor que relaciona os pólos (raízes de $D(s)$),
  $p = [p_n p_{n-1} \ldots p_1 p_0]$;
  e k corresponde ao (eventual) polinômio resultante (quando $\text{grau}\{N(s)\} > \text{grau}\{D(s)\}$; na maioria das vezes k=[ ]).

Exemplo1: $F(s) = \dfrac{2}{s^2 + 3s + 2}$

```
>> N=2;
>> D=[1 3 2];
>> [R,p,k]=residue(N,D)
R =
   -2
    2
p =
   -2
   -1
k =
    []
>>
```

Ou seja:

$$F(s) = -\frac{2}{(s+2)} + \frac{2}{(s+1)} + 0$$

```
>> roots(D)
ans =
   -2
   -1
>>
```

USANDO MATLAB

- A função '[R,p,k]=**residue**(N,D)', onde:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{R_n}{s-p_n} + \ldots + \frac{R_2}{s-p_2} + \frac{R_1}{s-p_1} + k(s)$$

- Parâmetros de entrada:

  N é o vetor que contêm os coeficientes de $N(s)$,

  $N = [b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0]$;

  D é o vetor que contêm os coeficientes de $D(s)$,

  $D = [a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0]$;

- Parâmetros de saída:

  R é o vetor que contêm os resíduos, $R = [R_n R_{n-1} \ldots R_1 R_0]$;

  P é o vetor que relaciona os pólos (raízes de $D(s)$),

  $p = [p_n p_{n-1} \ldots p_1 p_0]$;

  e k corresponde ao (eventual) polinômio resultante (quando $\text{grau}\{N(s)\} > \text{grau}\{D(s)\}$; na maioria das vezes k=[ ]).

Exemplo2: $F(s) = \dfrac{2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$

```
>> N=2;
>> D=[1    5    8    4];
>> roots(D)
ans =
        -2
        -2
        -1
```

Ou seja:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+2)^2} + \frac{R_3}{(s+2)}$$

```
>> [R,p,k]=residue(N,D)
R =
        -2
        -2
         2
p =
        -2
        -2
        -1
k =
     []
```

Ou seja:

$$F(s) = -\frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)} + \frac{2}{(s+1)}$$

USANDO MATLAB

- A função '[R,p,k]=**residue**(N,D)', onde:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{R_n}{s-p_n} + \ldots + \frac{R_2}{s-p_2} + \frac{R_1}{s-p_1} + k(s)$$

- Parâmetros de entrada:

  N é o vetor que contêm os coeficientes de $N(s)$,

  $N = [b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0]$;

  D é o vetor que contêm os coeficientes de $D(s)$,

  $D = [a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0]$;

- Parâmetros de saída:

  R é o vetor que contêm os resíduos, $R = [R_n R_{n-1} \ldots R_1 R_0]$;

  P é o vetor que relaciona os pólos (raízes de $D(s)$),

  $p = [p_n p_{n-1} \ldots p_1 p_0]$;

  e k corresponde ao (eventual) polinômio resultante (quando $\text{grau}\{N(s)\} > \text{grau}\{D(s)\}$; na maioria das vezes k=[ ]).

Exemplo3: $F(s) = \dfrac{3}{s(s^2+2s+5)}$

```
>> N=3;
>> D=[1    2    5    0];
>> roots(D)
ans =
     0 +       0i
    -1 +       2i
    -1 -       2i
```

Ou seja:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+1+j2)} + \frac{R_3}{(s+1-j2)}$$

```
>> [R,p,k]=residue(N,D)
R =
   -0.3 +    0.15i
   -0.3 -    0.15i
    0.6 +       0i
p =
    -1 +       2i
    -1 -       2i
     0 +       0i
k =
    []
```

Ou seja:

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \left(\frac{(3/10) + j(1{,}5/10)}{s+1+j2} + \frac{(3/10) - j(1{,}5/10)}{s+1-j2} \right)$$

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{20}\left(\frac{2+j1}{s+1+j2} + \frac{2-j1}{s+1-j2} \right)$$

$$0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \qquad 0{,}15 = \frac{15}{100} = \frac{1{,}5}{10}$$

USANDO MATLAB

- Função: 'ilaplace(F)' :
  retorna a Transformada Inversa de Laplace de `F`. Por padrão, a variável independente é s e a variável transformada é t. É esperado que F contenha a variável s do tipo 'syms', caso contrário, `ilaplace` usará a função `symvar` para avaliar a expressão F.

- Exemplo1:

$$F(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

```
>> roots([1 3 2])
ans =
   -2
   -1
>> syms s
>> F=2/(s^2+3*s+2)
F =
2/(s^2 + 3*s + 2)
>> f=ilaplace(F)
f =
2*exp(-t) - 2*exp(-2*t)
>> pretty(f)
2 exp(-t) - exp(-2 t) 2

>>
```

$$y(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

- Exemplo2:

$$F(s) = \frac{2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

```
>> roots([1 5 8 4])
ans =
      -2
      -2
      -1
>> syms s
>> F=2/(s^3+5*s^2+8*s+4);
>> f=ilaplace(F);
>> pretty(f)
2 exp(-t) - exp(-2 t) 2 - t exp(-2 t) 2

>>
```

$$y(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} - 2te^{-2t}$$

- Exemplo3:

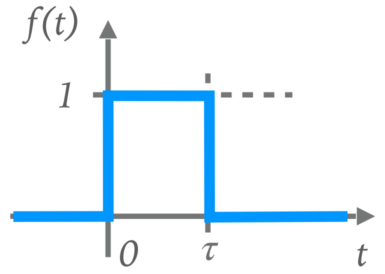
$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

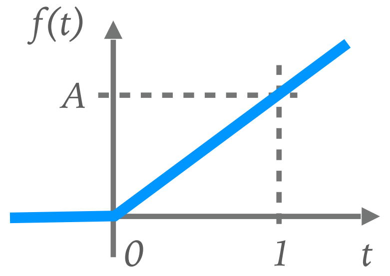
```
>> roots([1 2 5 0])
ans =
       0 +        0i
      -1 +        2i
      -1 -        2i
>> syms s
>> F=3/(s^3+2*s^2+5*s);
>> f=ilaplace(F);
>> pretty(f)
           /          sin(2 t) \
  exp(-t) | cos(2 t) + -------- | 3
3          \              2    /
- - --------------------------------
5                5

>>
```

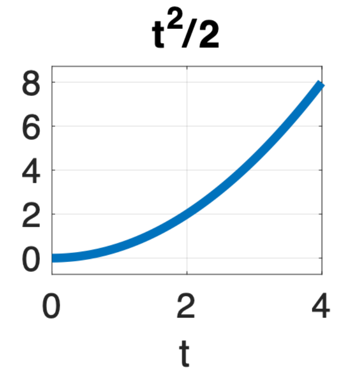
$$y(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{\sin 2t}{2}\right)$$

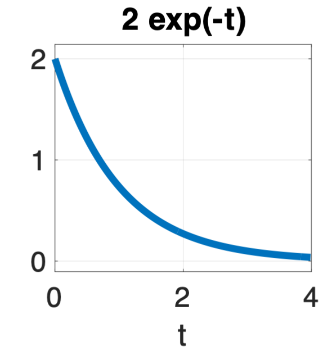
TABELA (AUMENTADA) DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

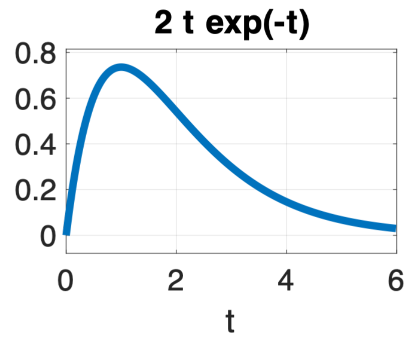
#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
1.	Impulso	$\delta(t)$	1
2.	Degrau	$A \cdot u(t)$	$A \cdot \frac{1}{s}$
3.	Degrau com atraso no tempo	$u(t-\tau)$	$\frac{e^{-s\tau}}{s}$
4.	Pulso retangular (duração τ)		$\frac{1-e^{-s\tau}}{s}$
5.	Rampa (reta)	$A \cdot t \cdot u(t)$	$\frac{A}{s^2}$
6.	Função Quadrática	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$
7.	Polinômio	$t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{s^n+1}$
8.	Exponencial	$B \cdot e^{-(a \cdot t)} \cdot u(t)$	$\frac{B}{s+a}$
9.	Tempo $\times$ exponencial	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
		t^2e^{-at}	$\frac{2}{(s+a)^3}$
10.	Exponencial assintótica	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)}$
		$t-\frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$
		$1-e^{-at}-ate^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$
		$(1-at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$

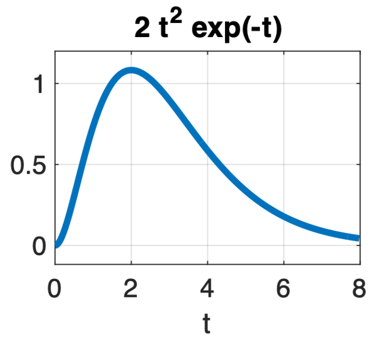


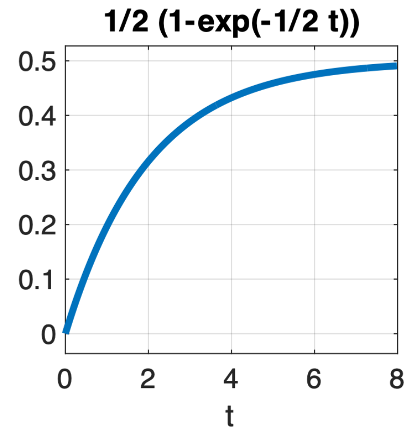


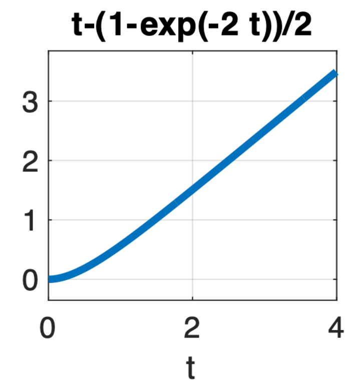


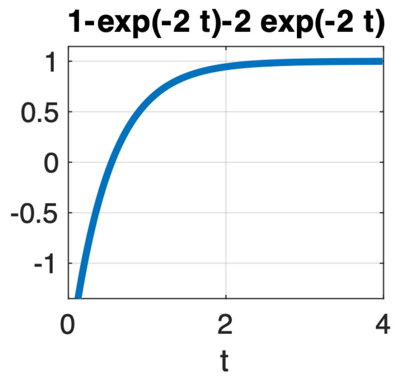












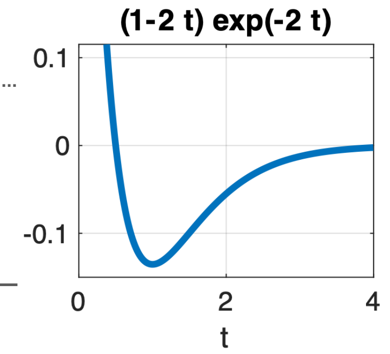
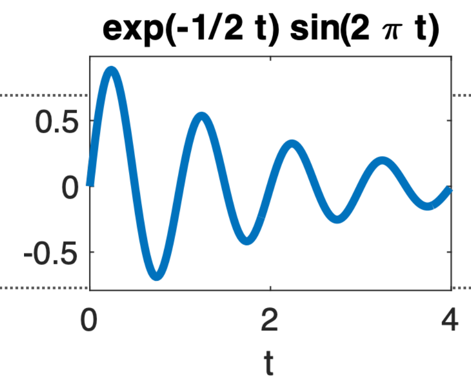
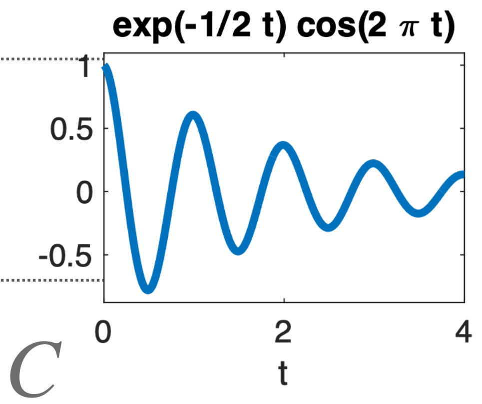
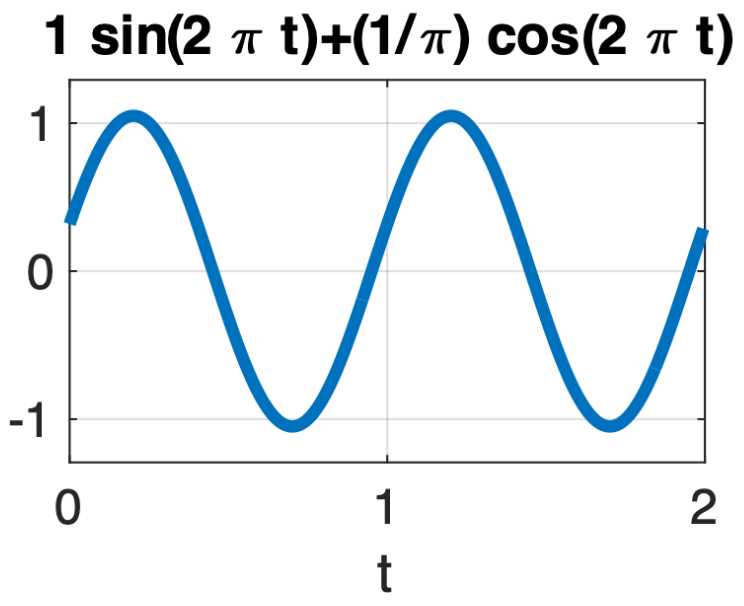


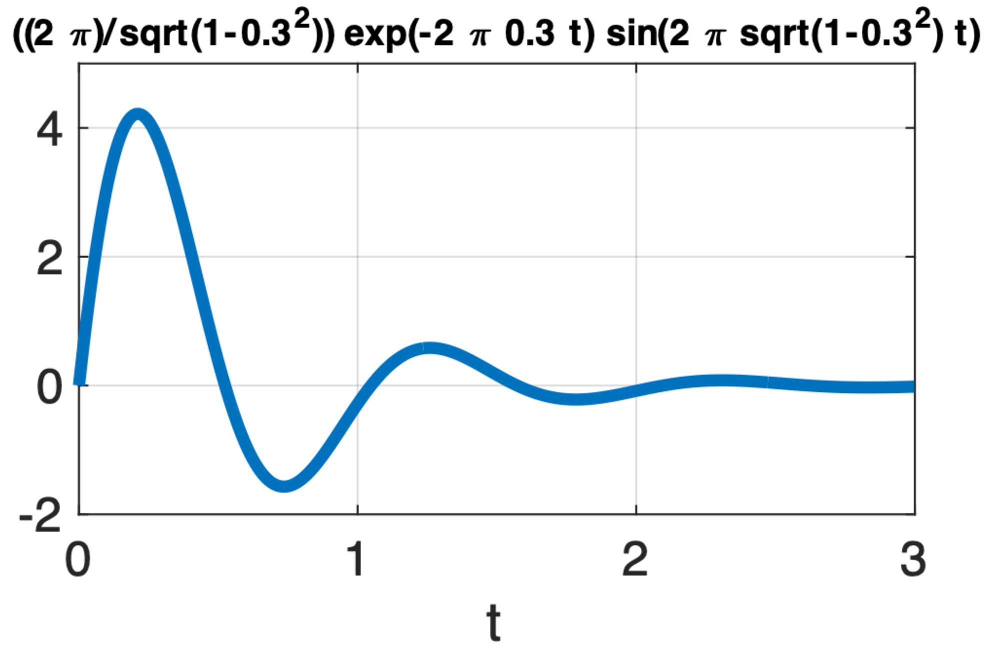
TABELA (AUMENTADA) DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

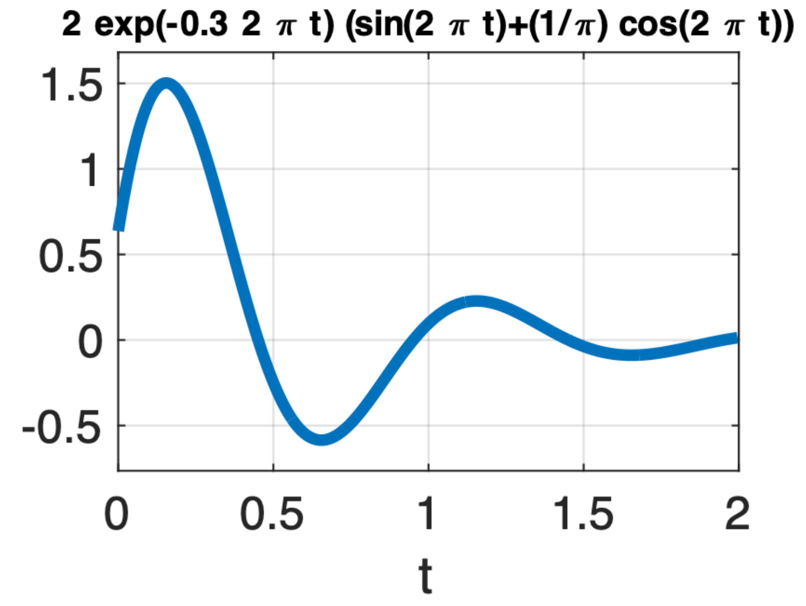
#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
11.	Senóide	$\sin(\omega t)\cdot u(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
12.	Cosseno	$\cos(\omega t)u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
13.	Senoide amortecida		$e^{-at}\sin(\omega_d t)$ $\dfrac{\omega_d}{(s+a)^2+\omega_d^2}$
14.	Cosseno amortecido		$e^{-at}\cos(\omega_d t)$ $\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_d^2}$
15.	Oscilação amortecida		$e^{-at}\left[B\cos(\omega_d t)+\dfrac{C-aB}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]$ $\dfrac{Bs+C}{(s+a)^2+\omega_d^2}$
16.	Oscilação amortecida		$Me^{-at}\cos(\omega_d t+\phi)$
		$M=\sqrt{B^2+\left(\dfrac{C-aB}{\omega_d}\right)^2}$	$\dfrac{Bs+C}{(s+a)^2+\omega_d^2}$
		$\phi=-\,\mathrm{atan}\left(\dfrac{C-aB}{B\omega_d}\right)=-\,\mathrm{atan2}(C-aB,B\omega_d)$	
17.		$\dfrac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega t}\sin\left[\omega\sqrt{(1-\zeta^2)}t\right]$	$\dfrac{\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}$
18.		$1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega t}\sin\left[\omega\sqrt{(1-\zeta^2)}t+\phi\right]$	$\dfrac{\omega^2}{s(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)}$
		(para $\zeta=\cos\phi$)	(para $\zeta<1$)

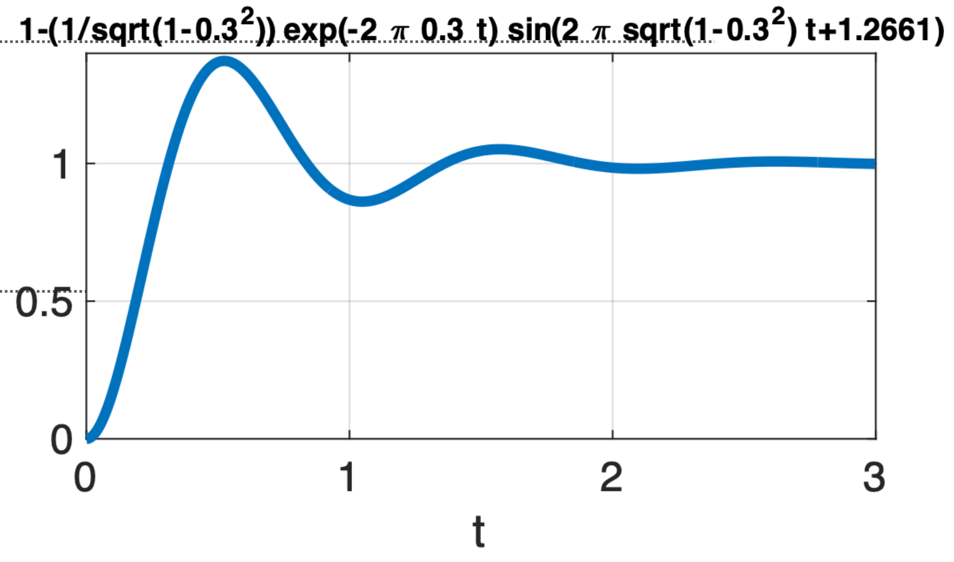












RESUMINDO…

➤ Um sistema de n-ésima ordem, linear, invariante no tempo, pode ser descrito pela equação diferencial:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$

Comportamento descrito por equações diferenciais → **Transformada de Laplace** → *Manipulação algébrica de equações* → **Transformada Inversa de Laplace** → *Solução*

Domino tempo | *Domino s (domínio frequência)* | *Domino tempo*

$$\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0\right) R(s)$$

$R(s)$ → **G(s)** → $Y(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

$$\therefore\ Y(s) = R(s)G(s)$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

EXEMPLOS DE USO:

- Ex_1: Encontre a função transferência para:

$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = u(t).$$

- *Solução:*

$$sC(s) + 2C(s) = U(s)$$

A função transferência, $G(s)$, fica então:

$$G(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+2}$$

EXEMPLOS DE USO:

- Ex_1: Encontre a função transferência para:

$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = u(t).$$

- *Solução:*

$$sC(s) + 2C(s) = U(s)$$

A função transferência, $G(s)$, fica então:

$$G(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+2}$$

- Ex_2: Encontre o resultado para $c(t)$, quando este sistema é submetido a uma entrada degrau.
- *Solução:*

$$C(s) = U(s) \cdot G(s)$$

A transformada de Laplace de um degrau é: $U(s) = 1/s$, então:

$$C(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

A expansão da expressão anterior leva à:

$$C(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2}$$

Realizando a transformada inversa de Laplace, encontramos $c(t)$:

$$c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$