Operações com Matrizes (MATLAB)

Métodos Numéricos

Prof. Fernando Passold

Operações com Matrizes

1. Soma Algébrica de Matrizes.
2. Produto de Matriz por um escalar.
3. Produto de duas matrizes.
4. Transposta de uma matriz.
5. Inversa de uma matriz.
6. Cálculo de Determinantes.

Operações com Matrizes

1. Soma Algébrica de Matrizes:

Se $C_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n}$, então:

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

- MATLAB:

Operações com Matrizes

2. Produto de Matriz por um escalar (s):

Se $D = s \times A$, então:

$d_{ij} = s * a_{ij}$

- MATLAB:
  Array multiply .*

```
>> a=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
>> b=0.5.*a

b =

    0.5000    1.0000    1.5000
    2.0000    2.5000    3.0000
    3.5000    4.0000    4.5000

>>
```

Operações com Matrizes

3. Produto de duas matrizes:

Se E_m×p = A_m×n × B_n×p, então:

$$e_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} \cdot b_{jk} \right)$$

- MATLAB:

```
>> e = a * b
```

Algo. Produto de matrizes

```
Executar Ler (A, lin_a, col_a);
Executar Ler (B, lin_b, col_b);
Se  ( col_a = lin_b) então:
     Para i = 1 até lin_a fazer:
        Para k = 1 até col_b fazer:
           e( i, k ) = 0;
           Para j = 1 até col_a fazer:
                      e( i, k ) = e( i, k ) + a( i,  j) * b( j, k );
           Fim j
        Fim k
     Fim i
Fim Se
```

Operações com Matrizes

4. Transposta de uma matriz:

Se $T\_n \times m = A^T\_m \times n$, então:

$t\_ji = a\_ij$;

- MATLAB:

```
>> a=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
>> c=a'

c =

     1     4     7
     2     5     8
     3     6     9

>>
```

Operações com Matrizes

5. Inversa de uma matriz:

$A \rightarrow A^{-1} = 1/A$

Se $A \times B = C$, então: $B = A^{-1} \times C$

Lembrando de resolução de sistemas lineares:

Se $A \times X = B$, então:

$X = A^{-1} \times B$

Operações com Matrizes

5. Inversa de uma matriz:

$A \rightarrow A^{-1} = 1/A$

Se $A \times B = C$, então:

$B = A^{-1} \times C$

Lembrando de resolução de sistemas lineares:

Se $A \times X = B$, então:

$X = A^{-1} \times B$

- No MATLAB:

```
>> a=[1 2 2; 3 6 1; 2 6 -1];
>> e=inv(a)

e =

   -1.2000    1.4000   -1.0000
    0.5000   -0.5000    0.5000
    0.6000   -0.2000         0

>>
```

Resolução Sist. Lineares

Se $A \times X = B$, então:

$X = A^{-1} \times B$

- MATLAB:

```
>> a=[2 2 4 -2; 1 3 2 1; 3 1 3 1; 1 3 4 2]
a =
2 2 4 -2
1 3 2 1
3 1 3 1
1 3 4 2
>> >> b=[10 17 18 27]‘;
>> x=a\b'
x =
   1.0000
   2.0000
   3.0000
   4.0000
>>
```

Algo. Inversão de Matrizes

- Método do Pivotamento:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -6/5 & 7/5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3/5 & -1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

Algo.
Inversão de Matrizes

- Método do Pivotamento:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6/5 & 7/5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & -1/5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{3} & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} L_1/a_{11} \\ L_2-L_1.a_{21} \\ L_3-L_1.a_{31} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2 & -5/3 & 0 & -2/3 & 1 \end{array}\right]$$

- Pivoteamento:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 5/3 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -5/3 & 0 & -2/3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2 & -5/3 & 0 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 5/3 & 1 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} L_1-L_2.a_{12} \\ L_2/a_{22} \\ L_3-L_2.a_{32} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & 1 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} L_1-L_3.a_{13} \\ L_2-L_3.a_{23} \\ L_3/a_{33} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6/5 & 7/5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & -1/5 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, a inversa da matriz será:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} -1{,}2 & 1{,}4 & -1 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & -0{,}2 & 0 \end{bmatrix}$$

Algo.
Inversão de Matrizes

```
Algoritmo INVERSA (N,A)
  Início
    Para I de 1 até N executar
      Para J de 1 até N executar
        Se I = J então AI(I,J) ← 1
                  senão AI(I,J) ← 0
      Fim (J)
    Fim (I)
    DET ← 1  // Determinante //
    I ← 1
    Enquanto I ≤ N  e  DET ≠ 0  executar
      Executar PIVOT1
      P ← A(I,I)
      DET ← DET * P
      Se P ≠ 0 então
         Para J de 1 até N executar
            A(I,J) ← A(I,J) / P
            AI(I,J) ← AI(I,J) / P
         Fim (J)
         Para K de 1 até N executar
            Se K ≠ I então
               P ← A(K,I)
               Para J de 1 até N executar
                  A(K,J) ← A(K,J)-P*A(I,J)
                  AI(K,J) ← AI(K,J)-P*AI(I,J)
```

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{3} & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} L_1/a_{11} \\ L_2-L_1.a_{21} \\ L_3-L_1.a_{31} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2 & -5/3 & 0 & -2/3 & 1 \end{array}\right]$$

- Pivoteamento:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 5/3 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -5/3 & 0 & -2/3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2 & -5/3 & 0 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 5/3 & 1 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} L_1-L_2.a_{12} \\ L_2/a_{22} \\ L_3-L_2.a_{32} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & 1 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} L_1-L_3.a_{13} \\ L_2-L_3.a_{23} \\ L_3/a_{33} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6/5 & 7/5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & -1/5 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, a inversa da matriz será:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} -1,2 & 1,4 & -1 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,6 & -0,2 & 0 \end{bmatrix}$$

Algo.
Inversão de Matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{3} & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

```
Algoritmo INVERSA (N,A)
  Início
    Para I de 1 até N executar
      Para J de 1 até N executar
        Se I = J então AI(I,J) ← 1
                  senão AI(I,J) ← 0
      Fim (J)
    Fim (I)
    DET ← 1  // Determinante //
    I ← 1
    Enquanto I ≤ N  e  DET ≠ 0  executar
      Executar PIVOT1
      P ← A(I,I)
      DET ← DET * P
      Se P ≠ 0 então
        Para J de 1 até N executar
          A(I,J) ← A(I,J) / P
          AI(I,J) ← AI(I,J) / P
        Fim (J)
        Para K de 1 até N executar
          Se K ≠ I então
            P ← A(K,I)
            Para J de 1 até N executar
              A(K,J) ← A(K,J)-P*A(I,J)
              AI(K,J) ← AI(K,J)-P*AI(I,J)
              Fim (J)
            Fim (Se)
          Fim (K)
          I ← I + 1
        Fim (se)
      Fim (Enquanto)
      Se DET =  0  então
               escrever "MATRIZ NÃO INVERSÍVEL"
                 senão
             Para I de 1 até N executar
               Para J de 1 até N executar
                 excrever AI(I,J)
               Fim (J)
             Fim (I)
      Fim (Se)
    Fim.
```

```
Algoritmo Rotina PIVOT1
  Início
    C ← A(I,I)
    L ← I
    Para K de I+1 até N executar
      Se |C| <.|A(K,I)| então
                            C ← A(K,I)
                            L ← K
      Fim (Se)
    Fim (K)
```

$$\left.\begin{array}{c|ccc} /3 & 0 & 1/3 & 0 \\ /3 & 1 & -1/3 & 0 \\ /3 & 0 & -2/3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2 & -5/3 & 0 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 5/3 & 1 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 1 & -1 \\ /6 & 0 & -1/3 & 0 \\ /3 & 1 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{|ccc} -6/5 & 7/5 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/5 & -1/5 & 0 \end{array}\right]$$

riz será:

$$\left.\begin{array}{cc} 4 & -1 \\ 5 & 0,5 \\ 2 & 0 \end{array}\right]$$

Algo.
Inversão de Matrizes

```
Algoritmo INVERSA (N,A)
  Início
    Para I de 1 até N execu
      Para J de 1 até N exe
        Se I = J então AI(I
                  senão AI(I
      Fim (J)
    Fim (I)
    DET ← 1  // Determinant
    I ← 1
    Enquanto I ≤ N  e  DET
      Executar PIVOT1
      P ← A(I,I)
      DET ← DET * P
      Se P ≠ 0 então
        Para J de 1 até N
          A(I,J) ← A(I,J)
          AI(I,J) ← AI(I,
        Fim (J)
        Para K de 1 até N
          Se K ≠ I então
            P ← A(K,I)
            Para J de 1
              A(K,J) ←
              AI(K,J) ←
```

```
              Fim (J)
            Fim (Se)
          Fim (K)
          I ← I + 1
        Fim (se)
    Fim (Enquanto)
    Se DET = 0 então
          escrever "MATRIZ NÃO INVERSÍVEL"
             senão
        Para I de 1 até N executar
          Para J de 1 até N executar
            excrever AI(I,J)
          Fim (J)
        Fim (I)
    Fim (Se)
Fim.
```

```
Algoritmo Rotina PIVOT1
 Início
  C ← A(I,I)
  L ← I
  Para K de I+1 até N executar
    Se |C| < |A(K,I)| então
                C ← A(K,I)
                L ← K
    Fim (Se)
  Fim (K)
```

```
  Se L ≠ I então
        DET ← DET * (-1)
        Para J de 1 até N executar
          X ← A(I,J)
          A(I,J) ← A(L,J)
          A(L,J) ← X
          X ← AI(I,J)
          AI(I,J) ← AI(L,J)
          AI(L,J) ← X
        Fim (J)
  Fim (Se)
  Retornar
Fim.
```

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{3} & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & 1 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$$

ivo

a_{12}

a_{32}

$$\begin{array}{c} a_{13} \\ a_{23} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6/5 & 7/5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & -1/5 & 0 \end{array}\right]$$

sim, a inversa da matriz será:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} -1{,}2 & 1{,}4 & -1 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & -0{,}2 & 0 \end{bmatrix}$$

Algoritmo de Gauss...

Seja o sistema linear $Ax = b$, $A: n \times n$, $x: n \times 1$, $b: n \times 1$.

Supor que o elemento que está na posição a_{kk} é diferente de zero no início da etapa k.

Eliminação

$$
\left[\begin{array}{l}
\text{Para } k = 1, \ldots, n-1 \\
\left[\begin{array}{l}
\text{Para } i = k+1, \ldots, n \\
\quad m = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} \\
\quad a_{ik} = 0 \\
\quad \text{Para } j = k+1, \ldots n \\
\quad \left[\begin{array}{l} a_{ij} = a_{ij} - m a_{kj} \\ b_i = b_i - m b_k \end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Resolução do sistema:

$$
\left[\begin{array}{l}
x_n = b_n / a_{nn} \\
\text{Para } k = (n-1), \ldots 2,1 \\
\left[\begin{array}{l}
s = 0 \\
\text{Para } j = (k+1), \ldots, n \\
\left[s = s + a_{kj} x_j \right. \\
x_k = (b_k - s) / a_{kk}
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

O algoritmo acima efetua, na fase da eliminação, $(4n^3 + 3n^2 - 7n)/6$ operações e, para resolver o sistema triangular superior, o número de operações efetuadas é n^2.