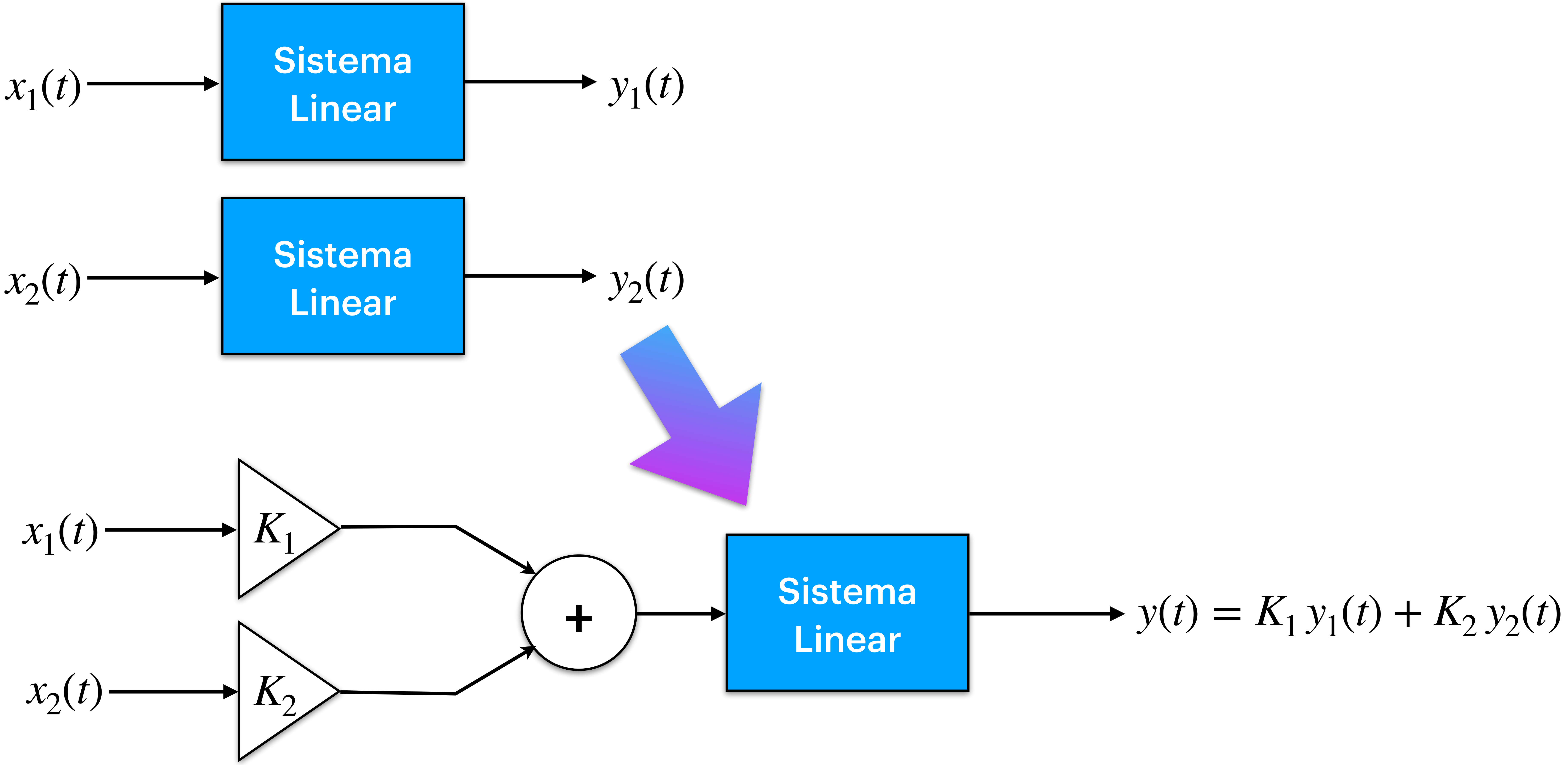
3) Sistemas

Sinais & Sistemas

Eng. Elétrica

Sistema
Linear



Segue 2 propriedades principais:

1. **Propriedade Aditiva (Superposição):**

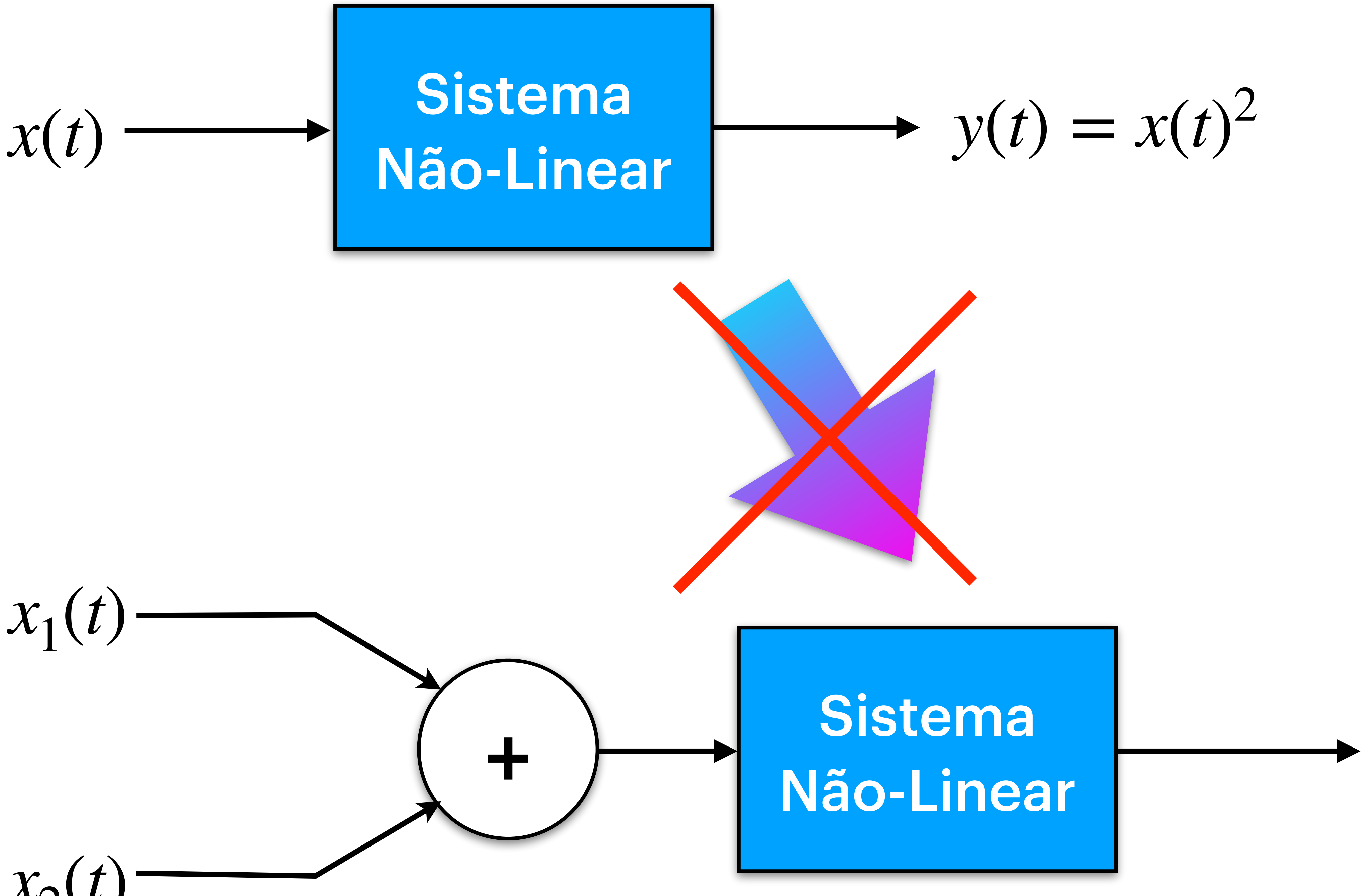
   Se: $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$ e $x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$, então: $x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_1(t) + y_2(t)$

2. **Propriedade de Escalonamento**:

   Se: $x(t) \longrightarrow y(t)$ então: $K \cdot x(t) \longrightarrow K \cdot y(t)$

Sistema

Não-Linear



$$y(x_1 + x_2) \neq y(x_1) + y(x_2)$$

$$\begin{aligned} y(2+3) &\neq y(2)+y(3) \\ & \quad 2^2+3^2 \\ & \quad 4+9 \\ & \quad 13 \\ &= y(5) \\ &= 5^2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Note também que:

$$y(a \cdot x) \neq a \cdot y(x)$$

$$\begin{aligned} y(2\cdot 3) &\neq 2\cdot y(3) \\ & \quad 2\cdot 3^2 \\ & \quad 2\cdot 9 \\ & \quad 18 \\ &= y(6) \\ &= 6^2 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Não satisfaz as propriedades de adição e escalonamento.

1. **Propriedade Aditiva (Superposição):**
   Se: $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$ e $x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$, então: $x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_1(t) + y_2(t)$
2. **Propriedade de Escalonamento**:
   Se: $x(t) \longrightarrow y(t)$ então: $K \cdot x(t) \longrightarrow K \cdot y(t)$

Sistema

Invariante no tempo

- Um sistema é invariante no tempo se a saída do sistema para a entrada $x(t)$ é $y(t)$, então a saída para a entrada $x(t-\tau)$ é $y(t-\tau)$, onde τ é um deslocamento no tempo:

$$x(t) \xrightarrow{\text{Resulta}} y(t) \qquad \textbf{Invariante:} \qquad x'(t) = x(t+\tau) \xrightarrow{\text{Resulta}} y'(t) = y(t+\tau)$$

- A resposta do sistema a um deslocamento no tempo do sinal de entrada é uma cópia deslocada no tempo da resposta original, ou;
- Um sistema é invariante no tempo se a relação entre a entrada e a saída do sistema não muda à medida que o tempo avança.
- Exemplo de sistema invariante no tempo:
- Um exemplo clássico de sistema invariante no tempo é o sistema de filtragem linear. Se um sistema realiza uma média móvel em um sinal de entrada, por exemplo, a saída será a média dos valores do sinal de entrada em um intervalo de tempo, independentemente de quando essa média móvel é calculada. A resposta do sistema não muda se o sinal de entrada for deslocado no tempo.

Sistema

Invariante no tempo

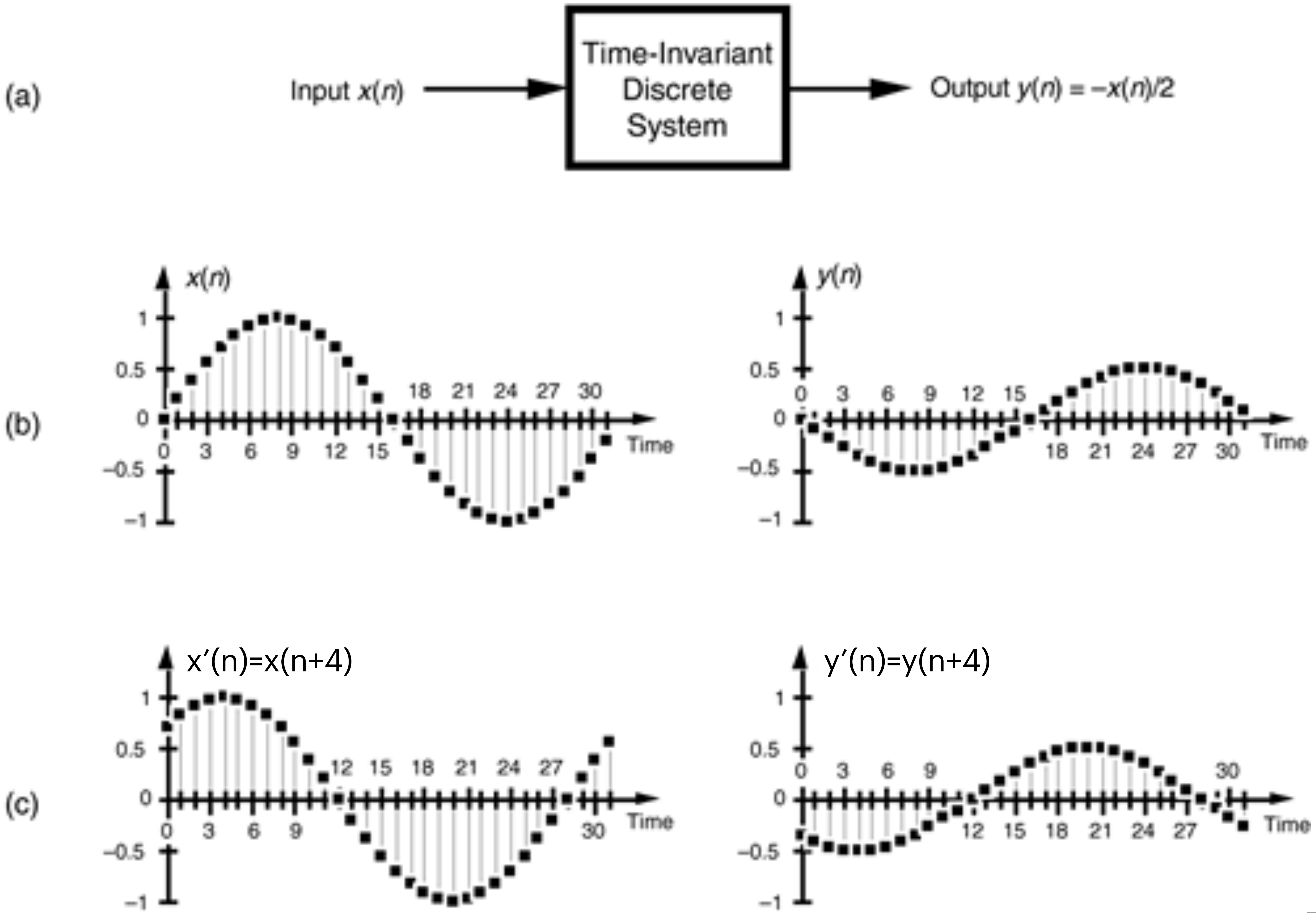
- Um sistema é invariante no tempo se a saída do sistema para a entrada $x(t)$ é $y(t)$, então a saída para a entrada $x(t-\tau)$ é $y(t-\tau)$, onde τ é um deslocamento no tempo:

$$x(t) \xrightarrow{\text{Resulta}} y(t)$$

Invariante:

$$x'(t) = x(t+\tau) \xrightarrow{\text{Resulta}} y'(t) = y(t+\tau)$$

- Exemplo de sistema invariante no tempo:



Ref.: https://flylib.com/books/en/2.729.1/discrete_linear_systems.html

Sistema

Variante no tempo

- Sua resposta à mesma entrada muda com o tempo.

$$x(t) \xrightarrow{\text{Resulta}} y(t)$$

Variante (no tempo):

$$x'(t) = x(t+\tau) \xrightarrow{\cancel{\text{Resulta}}} y'(t) = y(t+\tau)$$

- Exemplo:
  Um filtro cuja resposta muda com o tempo. Imagine um filtro que modifica a amplitude das frequências do sinal de entrada, mas essa modificação não é constante ao longo do tempo. Se o sinal de entrada for deslocado no tempo, a resposta do sistema será diferente, pois a modificação aplicada pelo filtro também muda.

Sistema

Variante no tempo

- Sua resposta à mesma entrada muda com o tempo.

$$x(t) \xrightarrow{\text{Resulta}} y(t)$$

Variante (no tempo):

$$x'(t) = x(t+\tau) \xrightarrow{\cancel{\text{Resulta}}} y'(t) = y(t+\tau)$$

- Outro exemplo:
  Considere um sistema de **equalização adaptativa em um ambiente de comunicação sem fio**. Nesse contexto, a equalização adaptativa é usada para compensar os efeitos da interferência do canal de comunicação, como atenuação, desvanecimento seletivo de frequência e ruído. O sistema ajusta automaticamente os parâmetros de equalização com base nas condições do canal. Neste caso:

  1. **Cenário**: Um sinal é transmitido de um transmissor para um receptor através de um canal sem fio.
  2. **Canal Variante no Tempo**: O canal sem fio está sujeito a variações temporais devido a vários fatores, como obstáculos em movimento, mudanças nas condições atmosféricas e interferência de outros dispositivos. Essas variações causam mudanças nas características de propagação do sinal, resultando em variações na atenuação e atrasos.
  3. **Equalização Adaptativa**: Um sistema de equalização adaptativa é usado no receptor para mitigar os efeitos do canal variante no tempo. Esse sistema ajusta continuamente seus parâmetros de equalização com base nas características do sinal recebido e nas condições do canal.
  4. **Parâmetros de Equalização:** Os parâmetros de equalização, como coeficientes de filtro adaptativo, são ajustados em tempo real à medida que o sinal é recebido. Esses coeficientes são modificados de acordo com algoritmos adaptativos para compensar as variações no canal. Os ajustes são feitos em tempo real, de modo que os coeficientes do filtro mudam conforme o sinal é recebido.
  5. **Resposta do Sistema:** A resposta do sistema de equalização adaptativa varia conforme as condições do canal mudam ao longo do tempo. Os coeficientes do filtro são atualizados para acomodar essas variações, o que significa que a relação entre o sinal de entrada e a saída do sistema de equalização adaptativa muda à medida que o tempo avança.

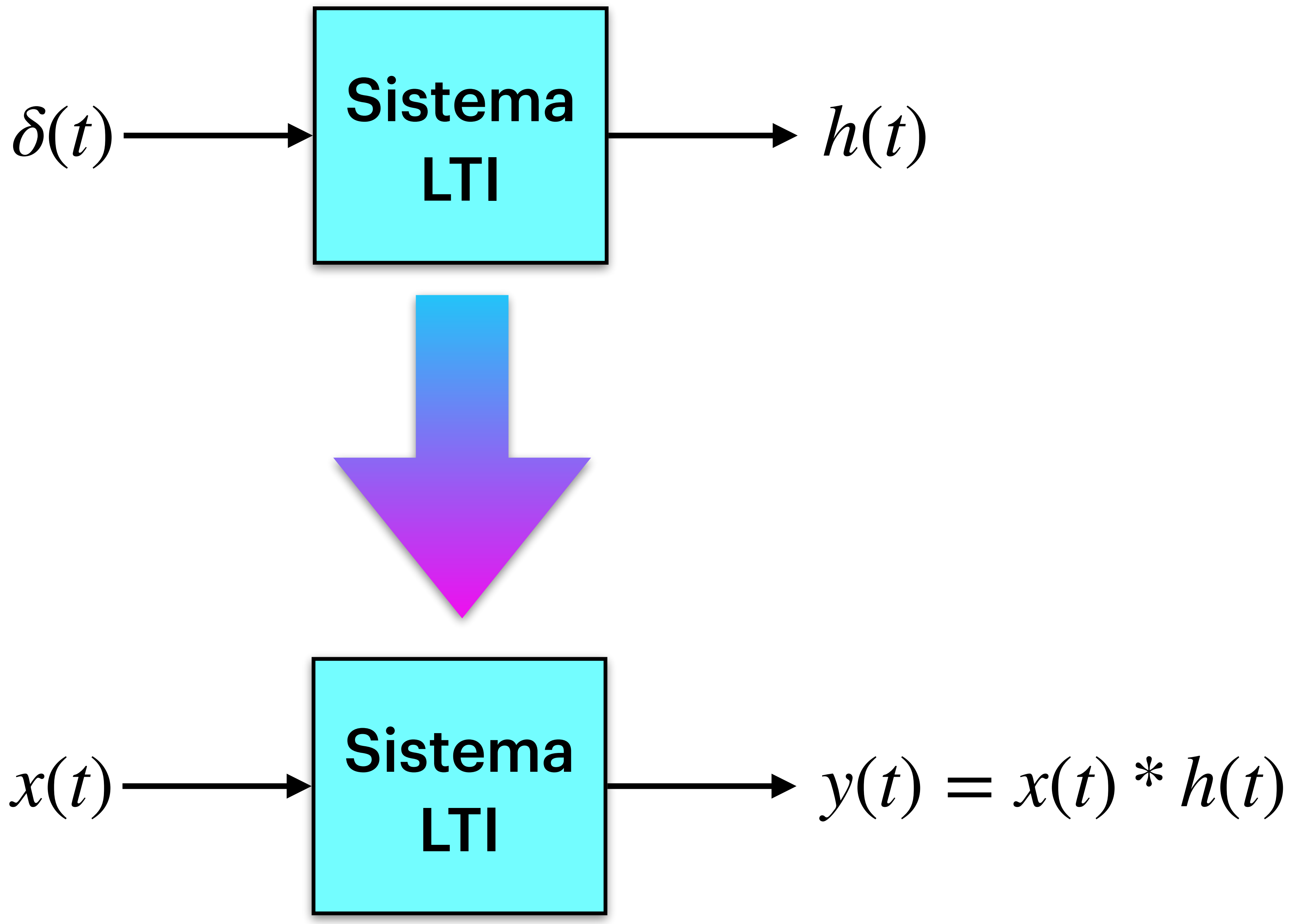
Sistema LTI

Linear Invariante no tempo

- Sua resposta à entrada não muda com o tempo. Isso significa que a resposta do sistema é constante ao longo do tempo, independentemente do momento em que a entrada é aplicada.
- Este tipo de sistema segue as 3 propriedades:
  1. **Propriedade de Adição** (Superposição):
     Se: $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$ e $x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$, então: $x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow y_1(t) + y_2(t)$
  2. **Propriedade de Escalonamento:**
     Se: $x(t) \longrightarrow y(t)$ então: $K \cdot x(t) \longrightarrow K \cdot y(t)$
  3. **Propriedade de Invariância no tempo**:
     Se: $x(t) \longrightarrow y(y)$ então: $x(t-\tau) \longrightarrow y(t-\tau)$
- Exemplo:
  Sistema com Filtro Passa Baixa. A saída do sistema é uma versão filtrada da entrada, onde as frequências mais altas são atenuadas. O comportamento invariante no tempo é ilustrado porque, independentemente do momento em que o sinal de entrada é aplicado, o mesmo filtro produzirá a mesma resposta de saída ao longo do tempo.

Resposta ao Impulso

Convolução...



- Descreve a saída de um sistema, $h(t)$, quando um impulso unitário de Dirac, $\delta(t)$ (ou função delta) é aplicada à entrada de um sistema.

- A resposta ao impulso de um sistema LTI permite prever a saída, $y(t)$, para qualquer entrada arbitrária, $x(t)$, usando a teoria da **convolução**, ou:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau, \quad \text{ou, de forma discreta:} \quad y[k] = x[k] * h[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot h[k-n]$$

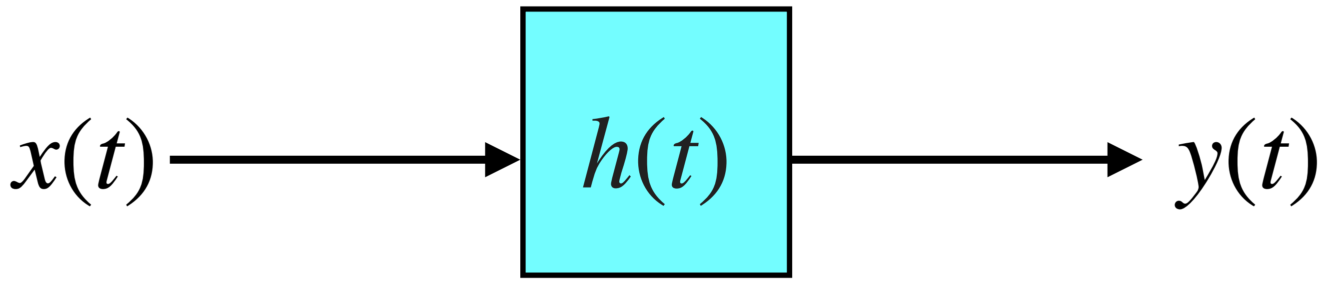
Convolução

Introdução

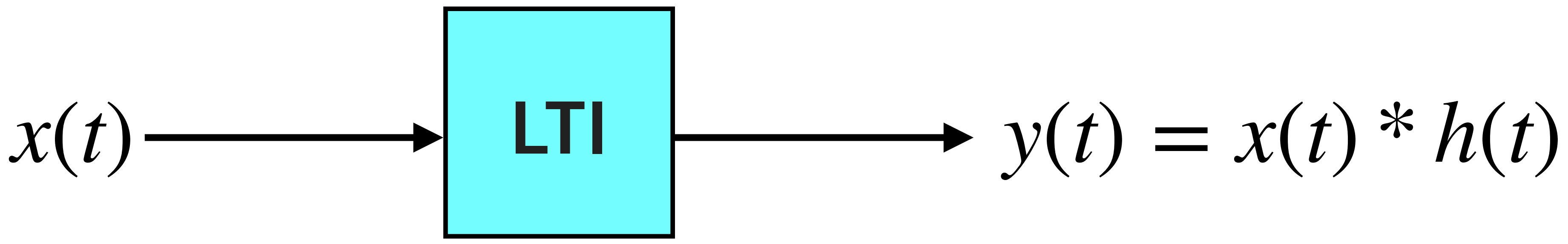
- O resultado da convolução, $y(t)$, envolvendo os sinais $x(t)$ e $h(t)$ é dado por:

  $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau,$ ou, de forma discreta:

  $y[k] = x[k] * h[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot h[k-n]$:

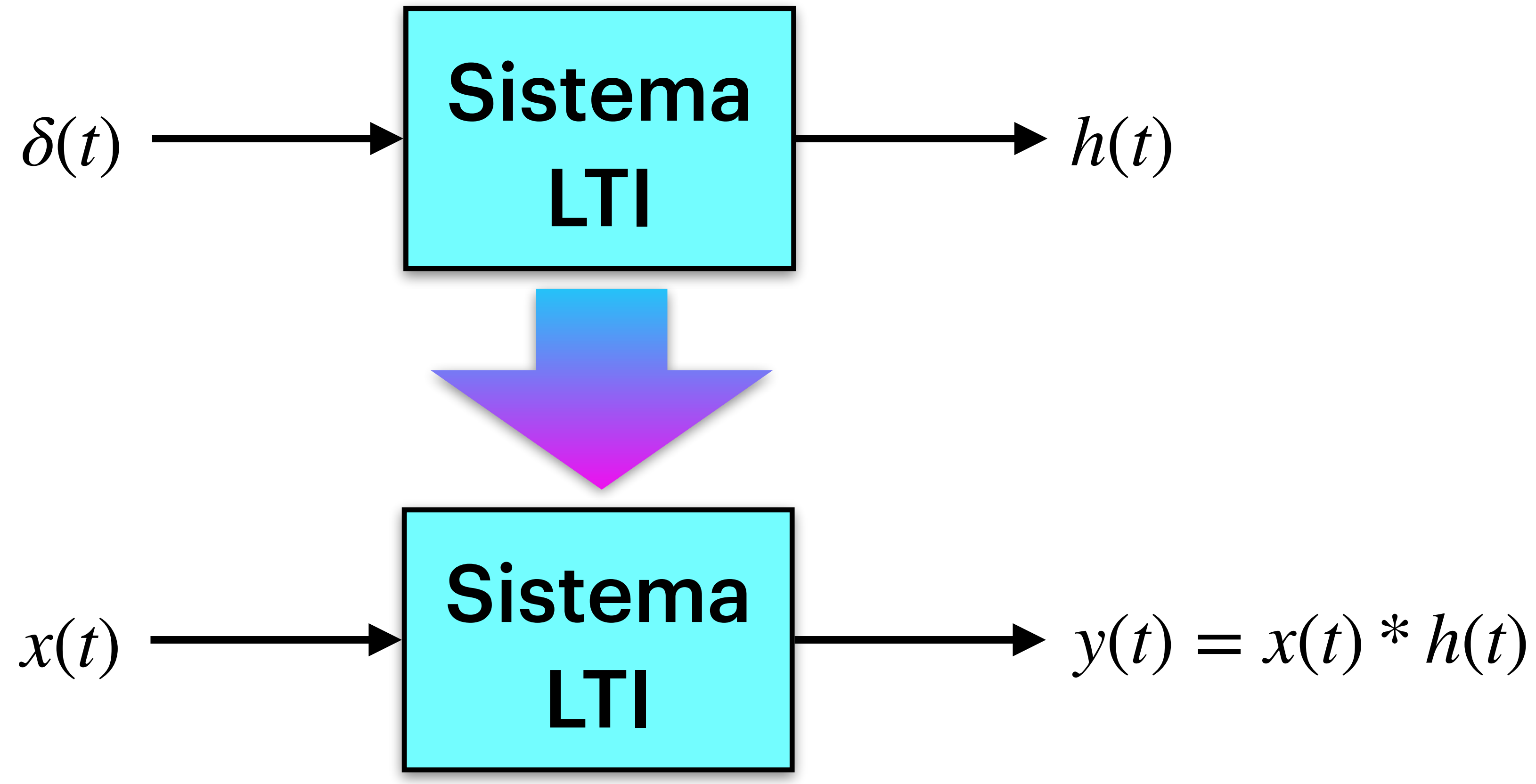


- A saída de qualquer sistema LTI pode ser determinada pela convolução do sinal de entrada $x(t)$, com sua resposta ao impulso unitário, $h(t)$:



Convolução

Propriedades



- Comutativa:

$$h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$$

- Associativa:

$$\left[x(t) * h_1(t)\right] * h_2(t) = x(t) * \left[h_1(t) * h_2(t)\right]$$

- Distributiva:

$$x(t) * \left[h_1(t) + h_2(t)\right] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

- Deslocamento:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

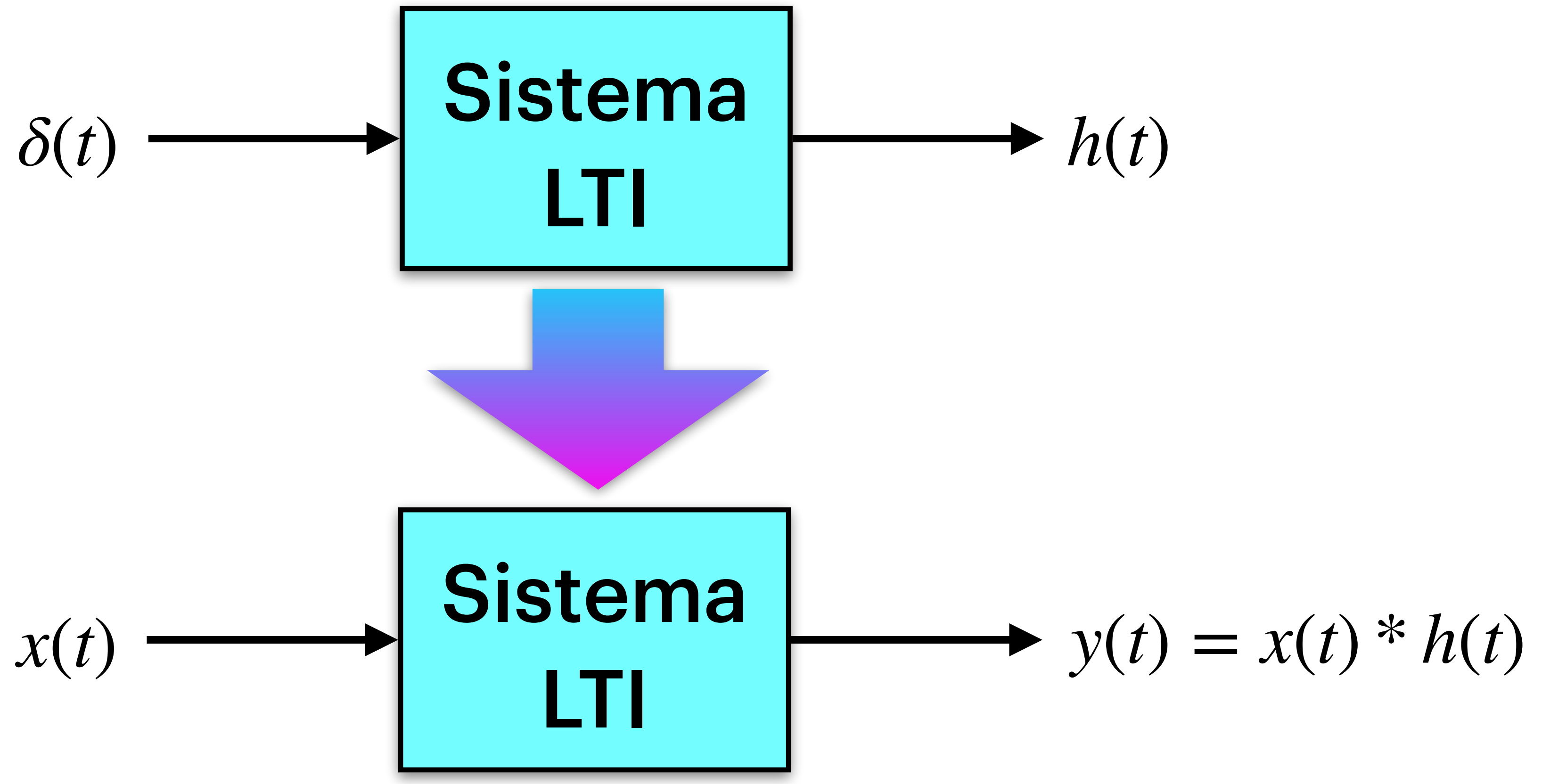
$$x(t) * h(t - \tau) = y(t - \tau)$$

- Elemento Neutro:

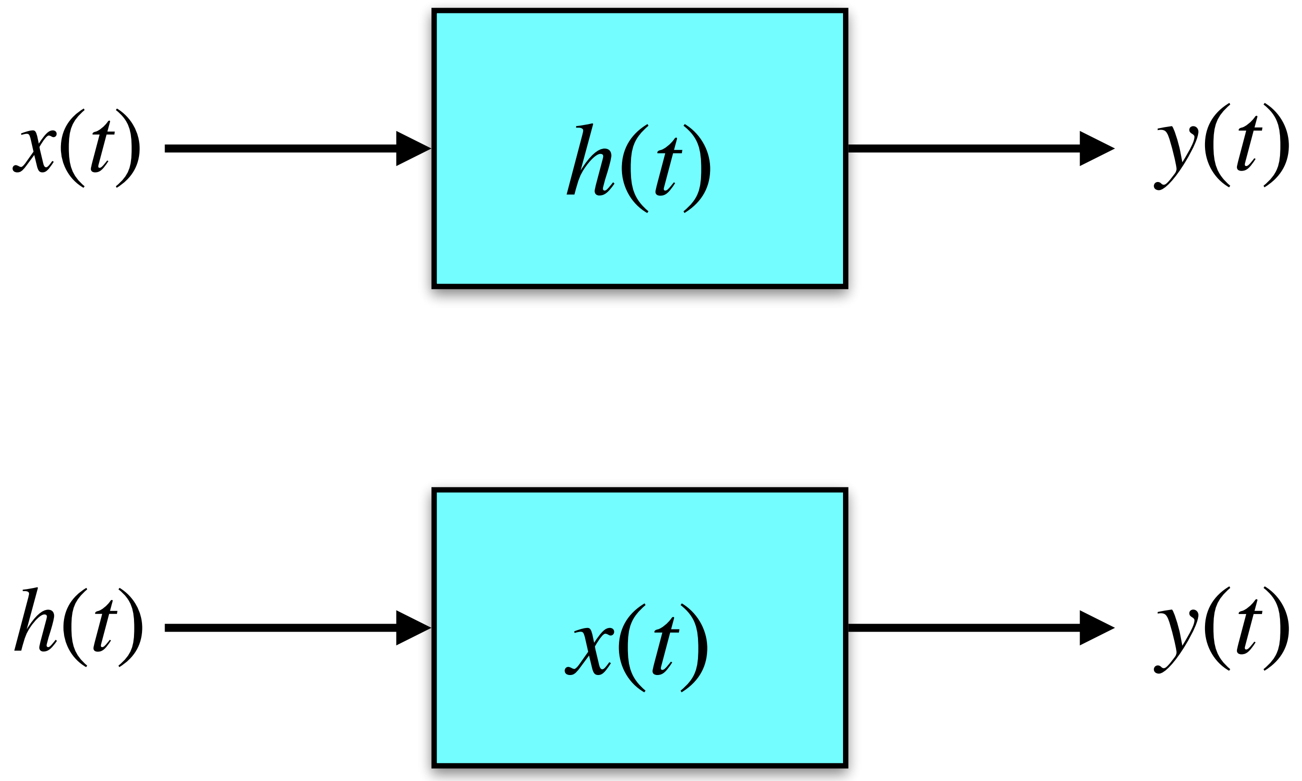
$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Convolução

Propriedade Comutativa

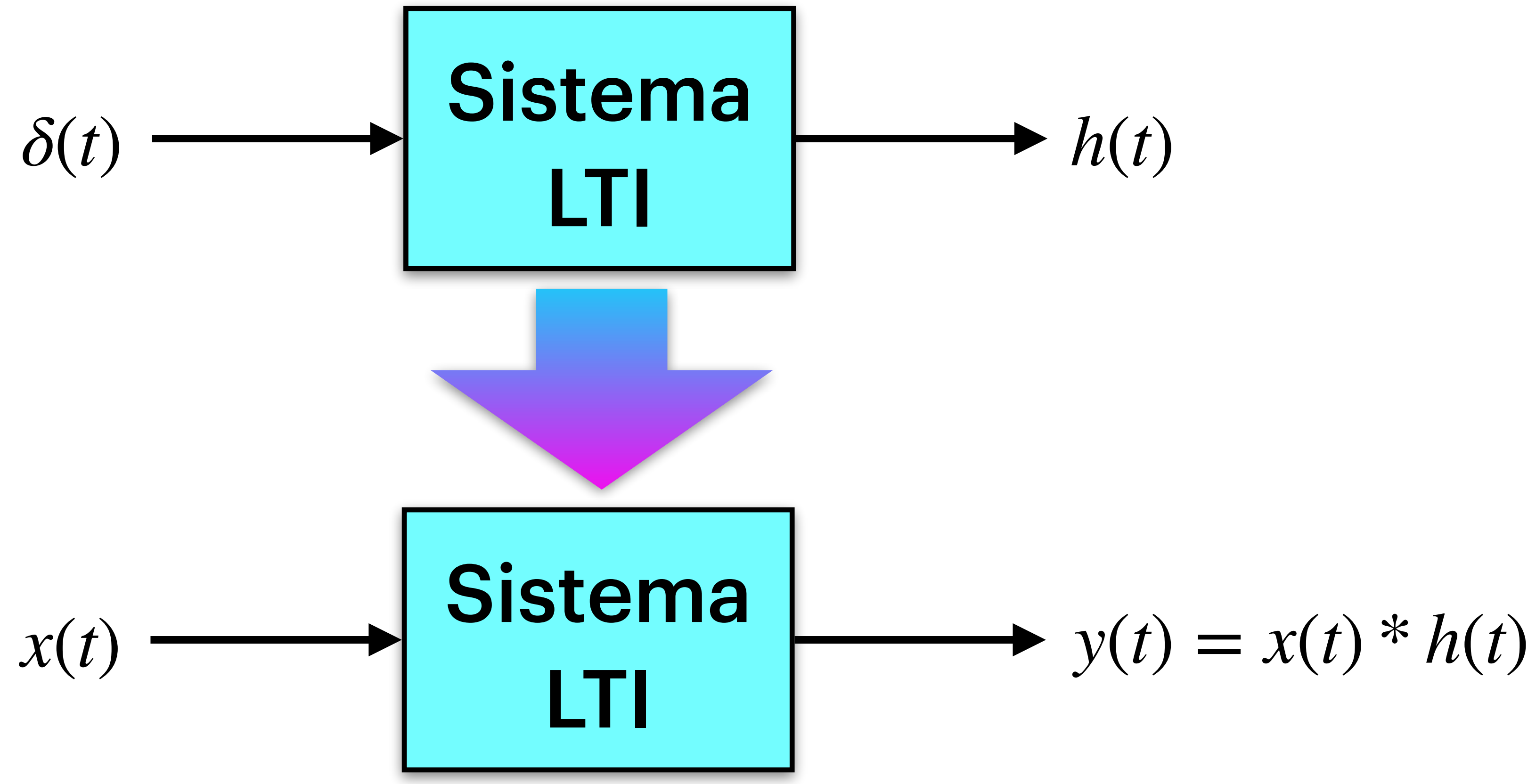


- $h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$

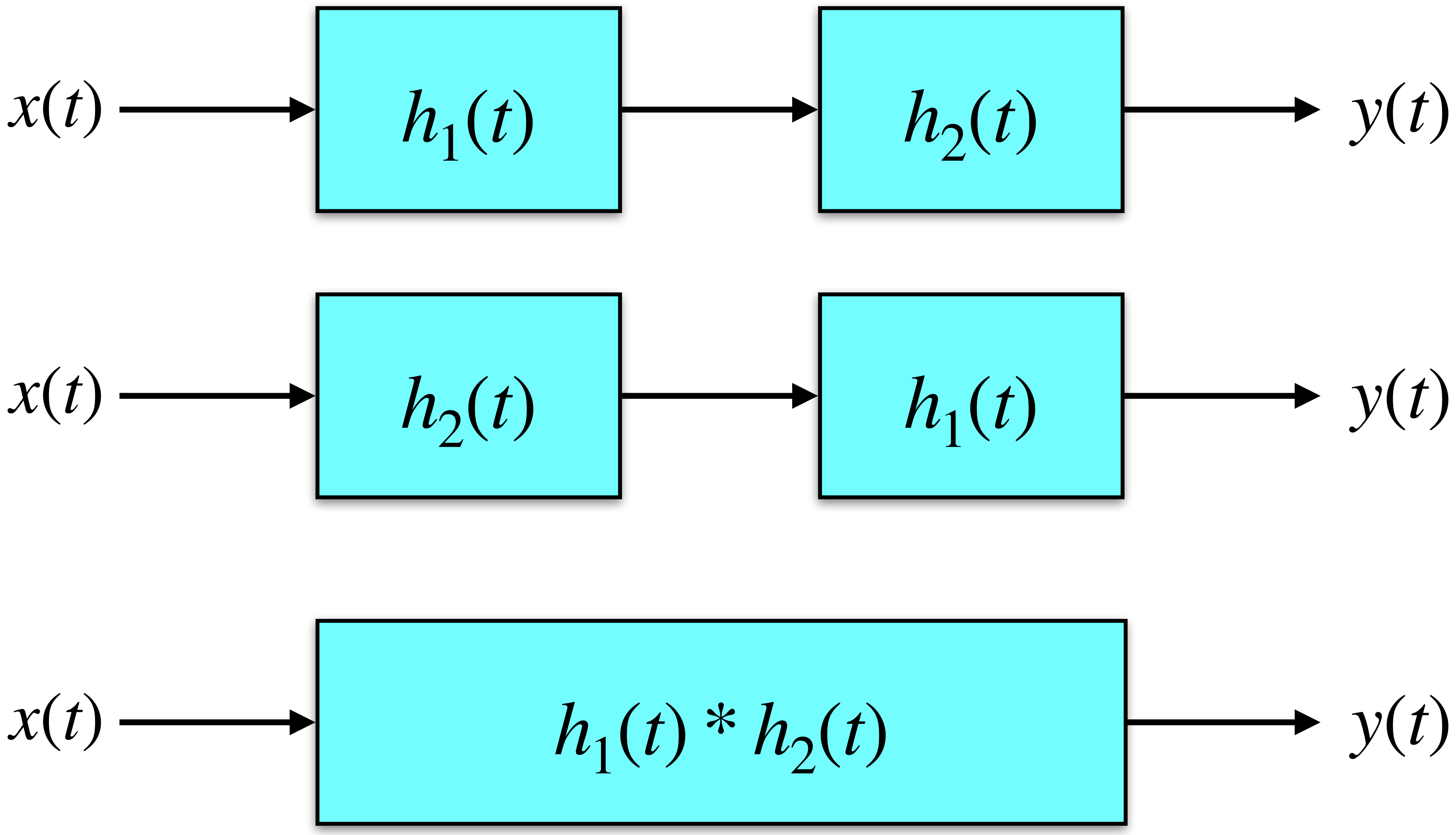


Convolução

Propriedade Associativa (série ou cascata):

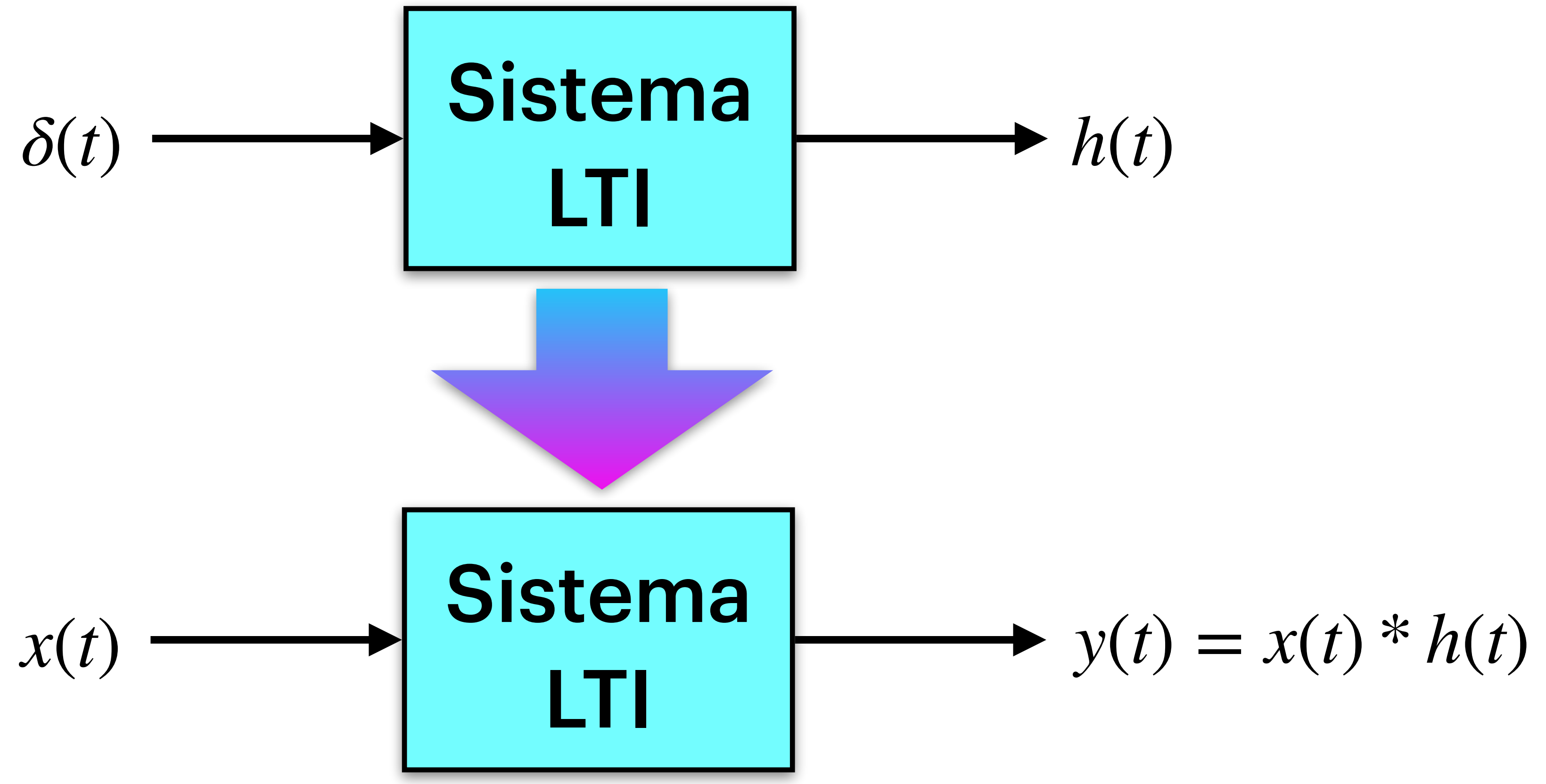


- $\left[x(t) * h_1(t)\right] * h_2(t) = x(t) * \left[h_1(t) * h_2(t)\right]$

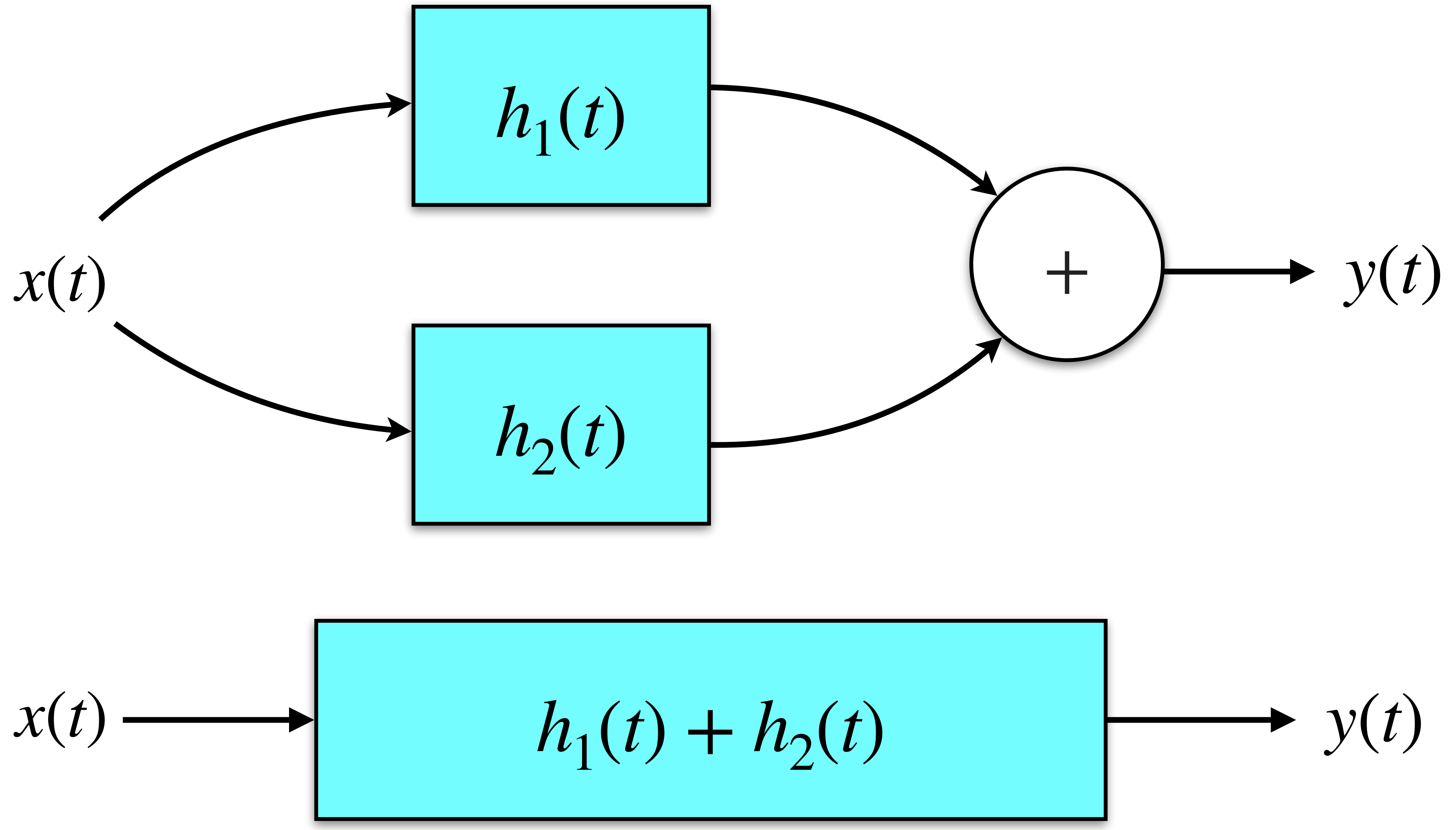


Convolução

Propriedade Distributiva (paralelo):

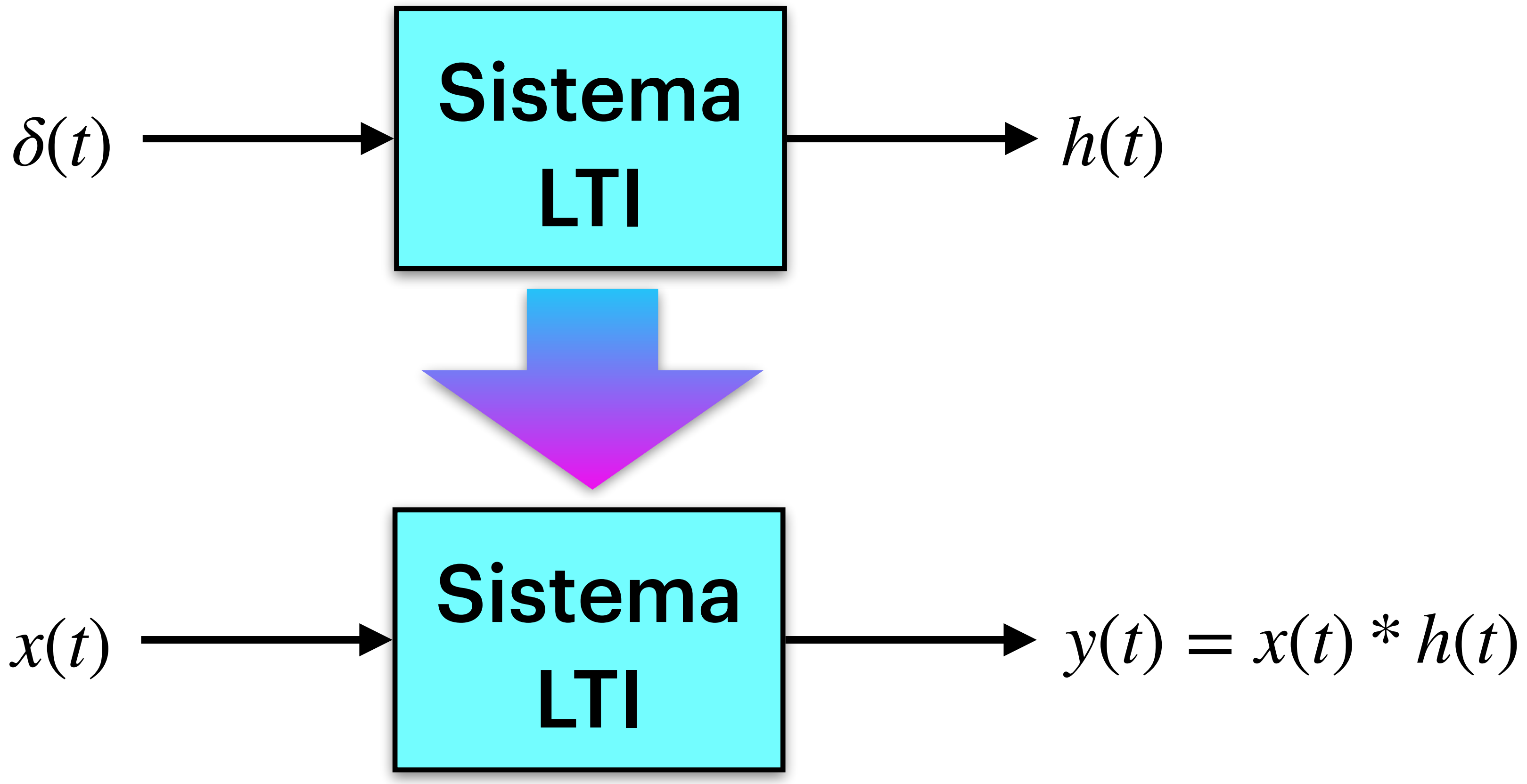


- $x(t) * \left[h_1(t) + h_2(t)\right] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$

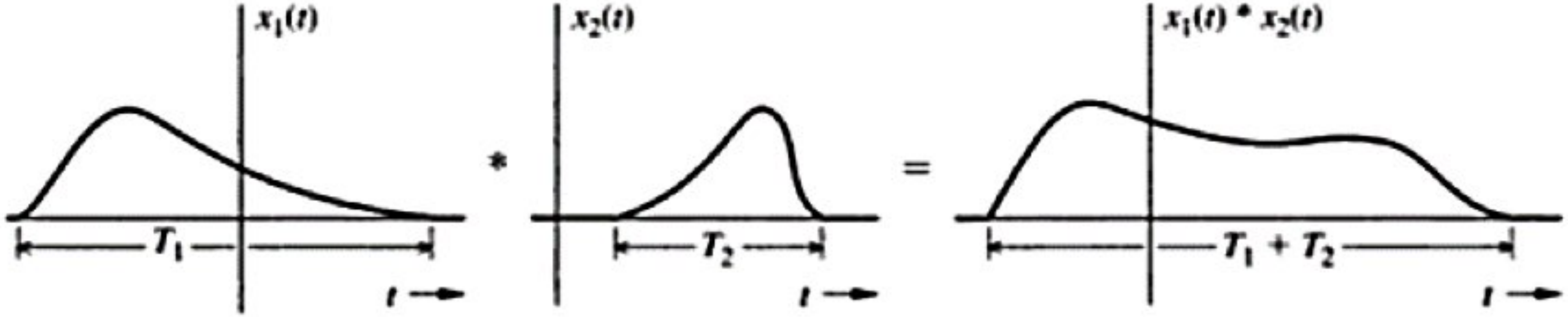


Convolução

Propriedade Casualidade:



- Se $x(t)$ e $h(t)$ são sinais causais, então: $x(t) * h(t)$ também será causal
- “Largura”:



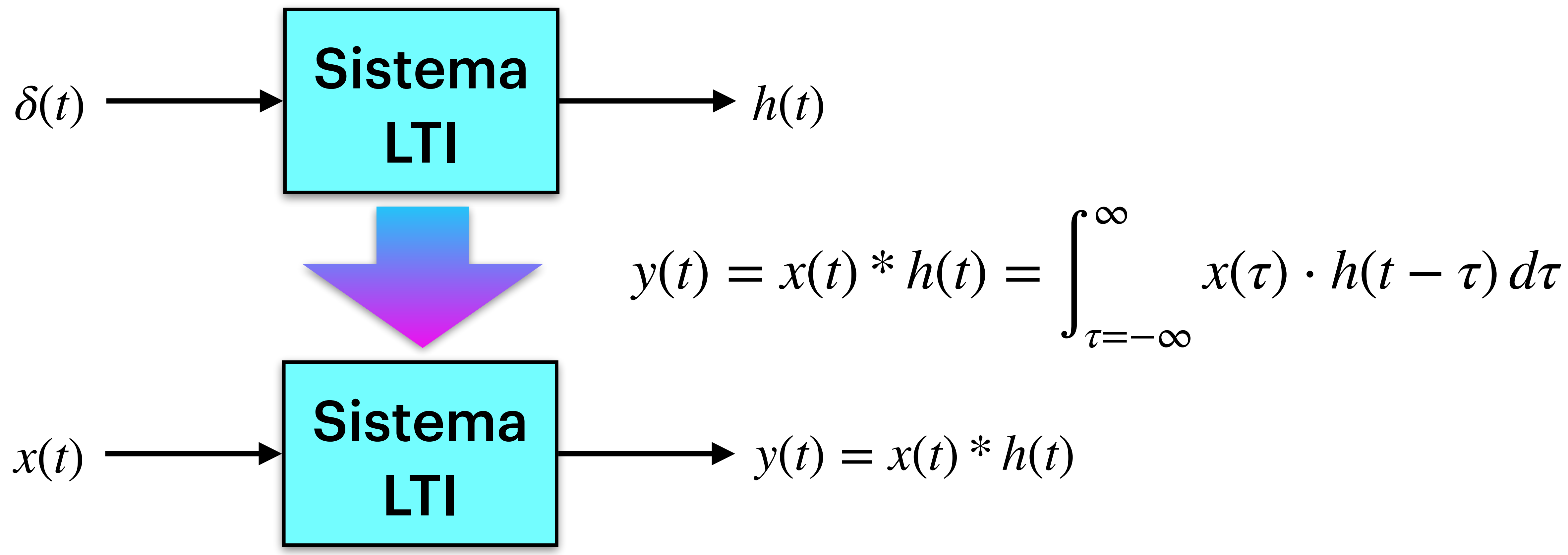
Convolução

Cálculo

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau, \quad \text{ou, (forma discreta):} \quad y[k] = x[k] * h[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot h[k-n]$$

1. Reversão temporal (rebatimento em relação ao eixo vertical) da resposta impulsiva $h(t)$ para se obter $h(-\tau)$.
2. Multiplicação dos sinais $x(t)$ e $h(t_0 - \tau)$ para todos os valores de τ, com $t = t_0$.
3. Integração do produto $x(\tau) \cdot h(t-\tau)$ para todos os valores de τ, obtendo-se um valor unitário para $y(t_0)$.
4. Repetição dos passos anteriores para $-\infty < t < \infty$ para produzir a saída para todos os instantes de tempo, $y(t)$.

Convolução
Aplicações



- Ex_1: Seja $x(t) = u(t)$ (Degrau unitário) e $h(t) = e^{-at}u(t)$, com $a > 0$ (função exponencial convergente). Determine $y(t)$.
- Resolução analítica:

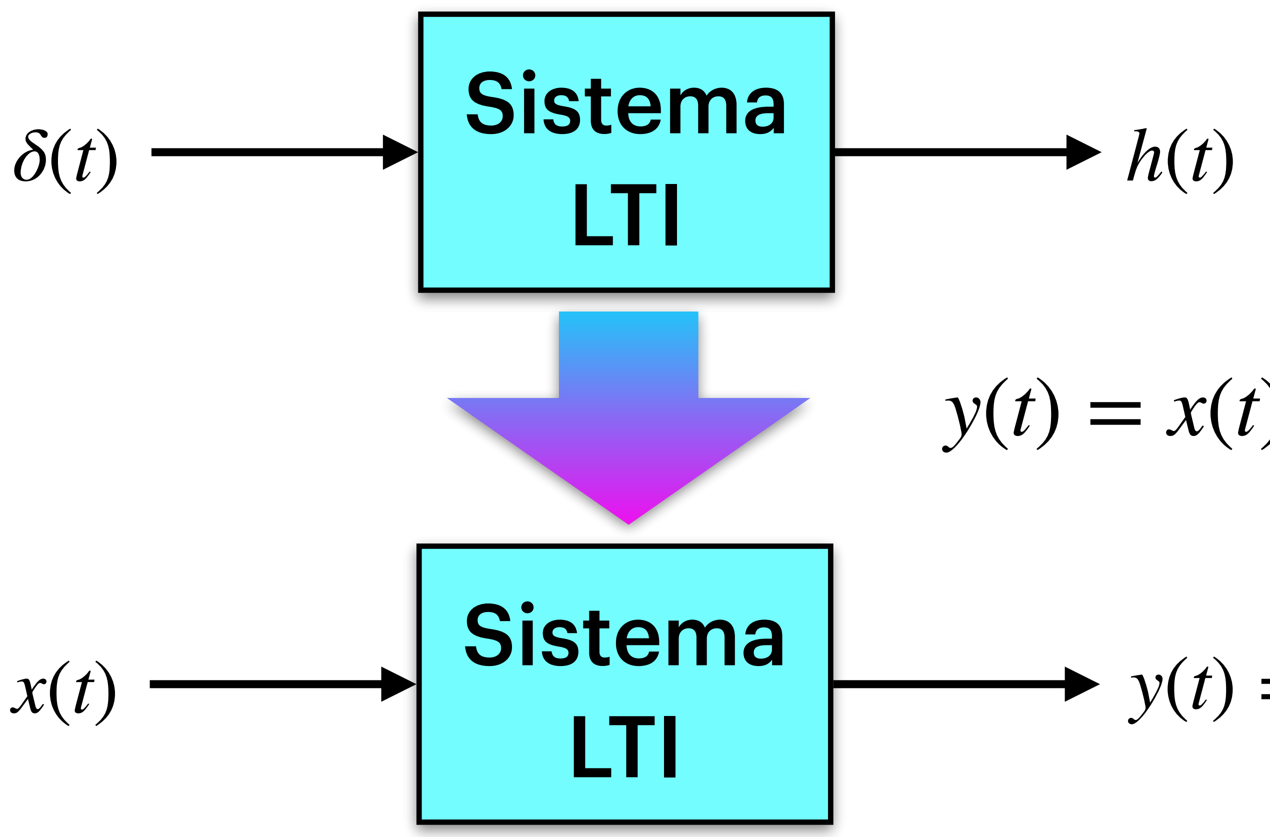
$$y(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)}\, d\tau = e^{-at}\int_0^t e^{a\tau}\, d\tau = e^{-at} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)\left(e^{at} - 1\right)$$

$$y(t) = \frac{1 - e^{-at}}{a}, \quad \text{para } t \geq 0$$

Ou:

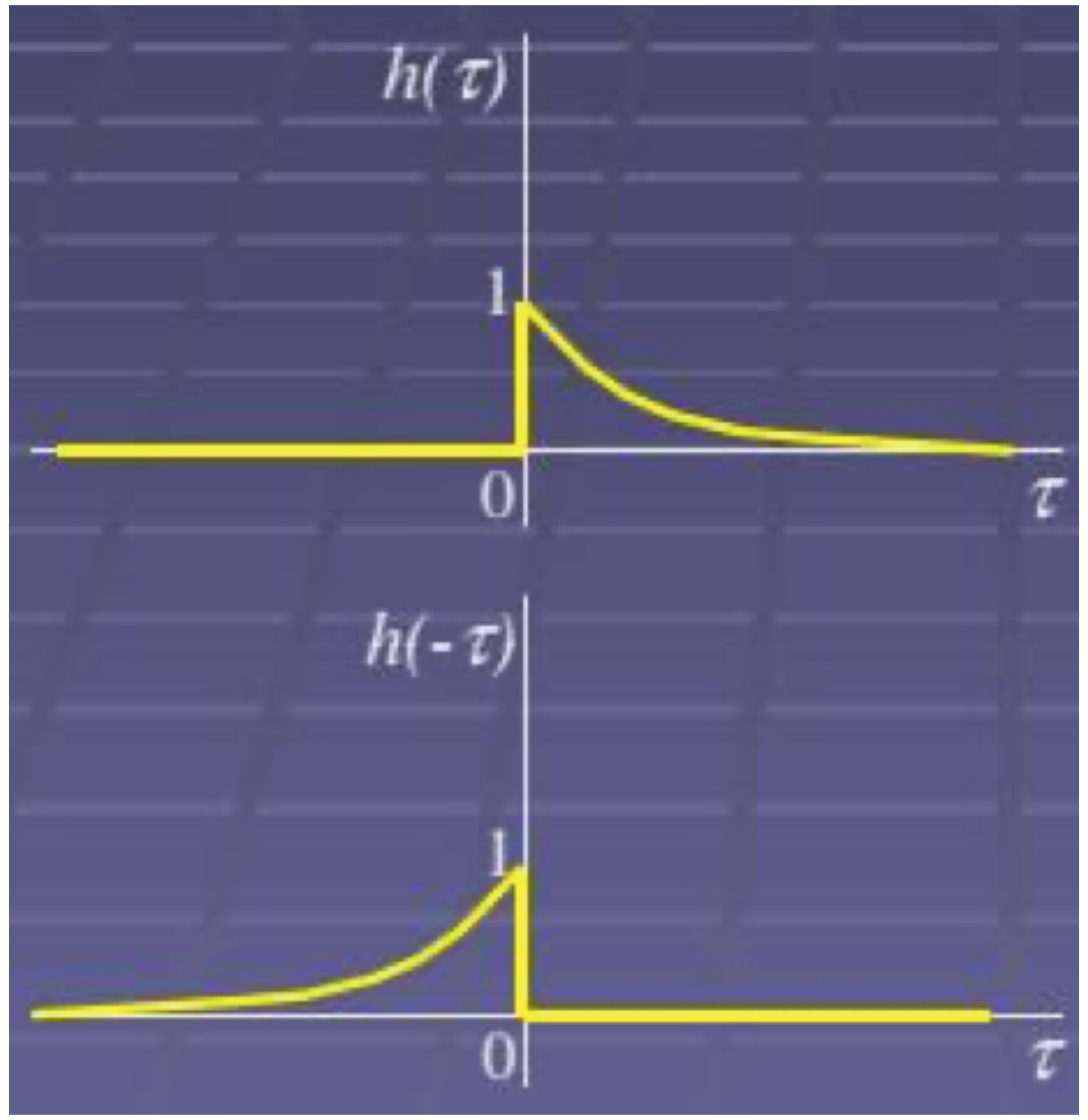
$$y(t) = \left(\frac{1 - e^{-at}}{a}\right) u(t)$$

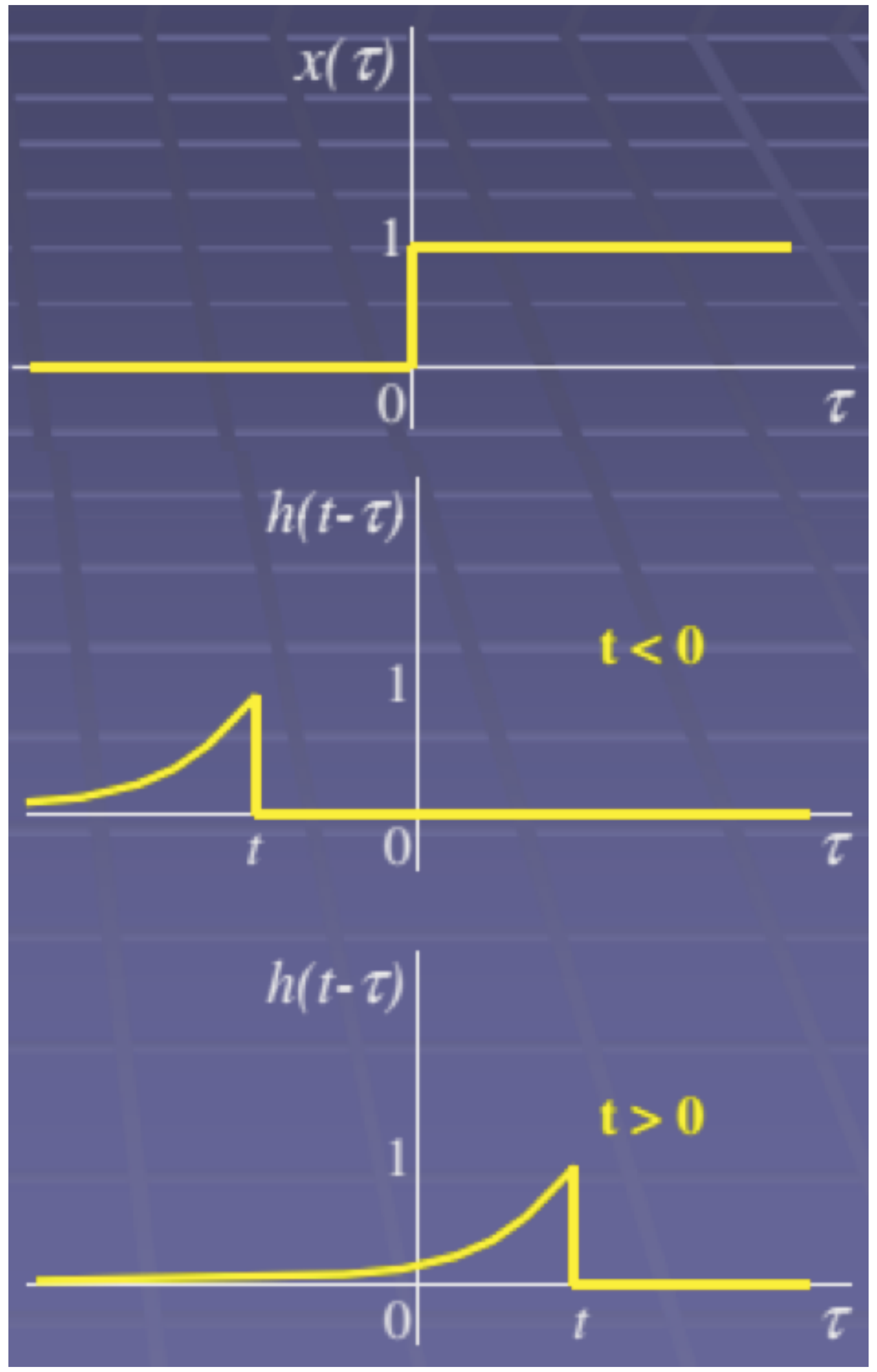
Convolução
Aplicações



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

- Ex_1: Seja $x(t) = u(t)$ (Degrau unitário) e $h(t) = e^{-at}u(t)$, com $a > 0$ (função exponencial converge). Determine $y(t)$.
- Resolução gráfica:

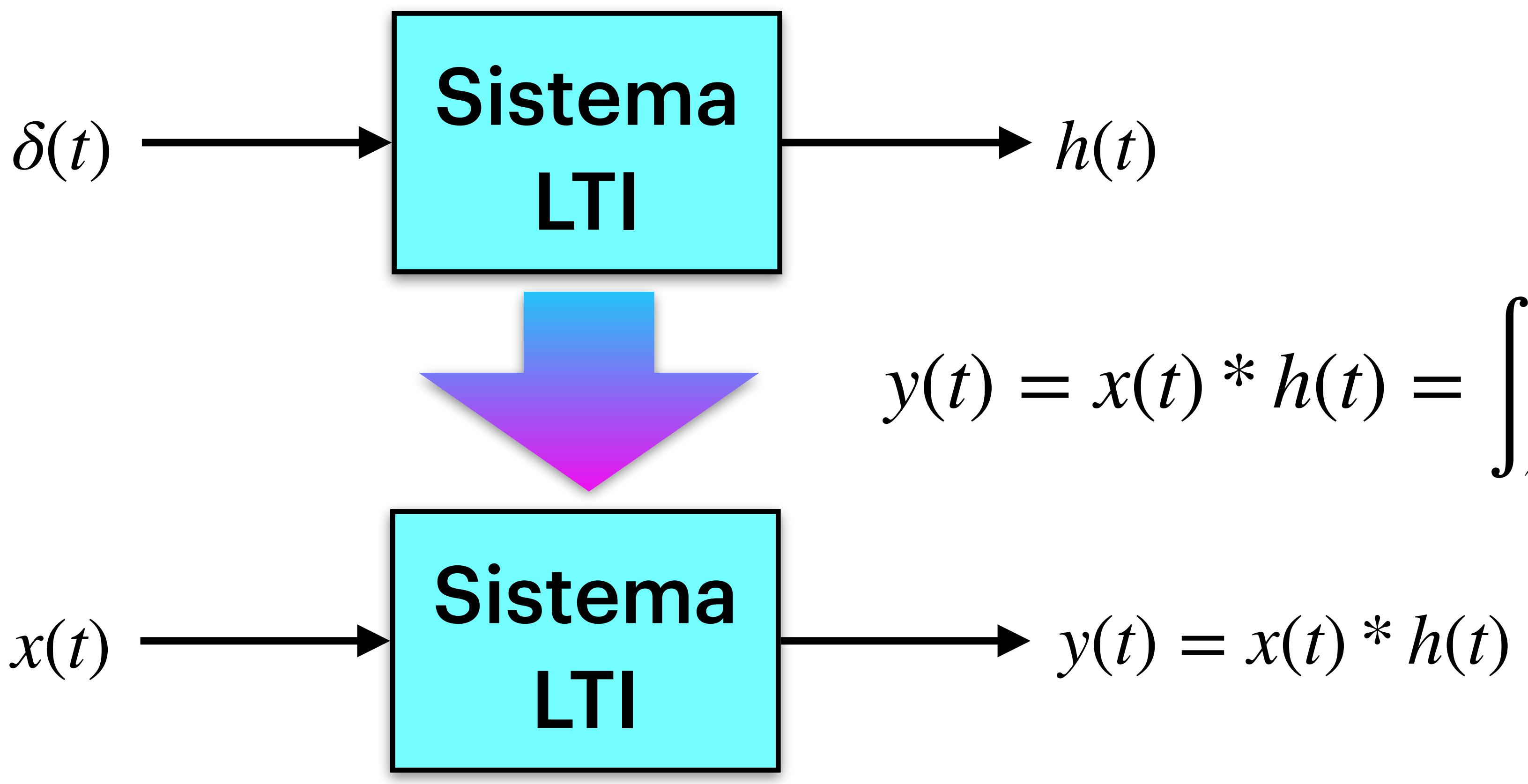




Ou: $y(t) = \left(\dfrac{1 - e^{-at}}{a}\right) u(t)$

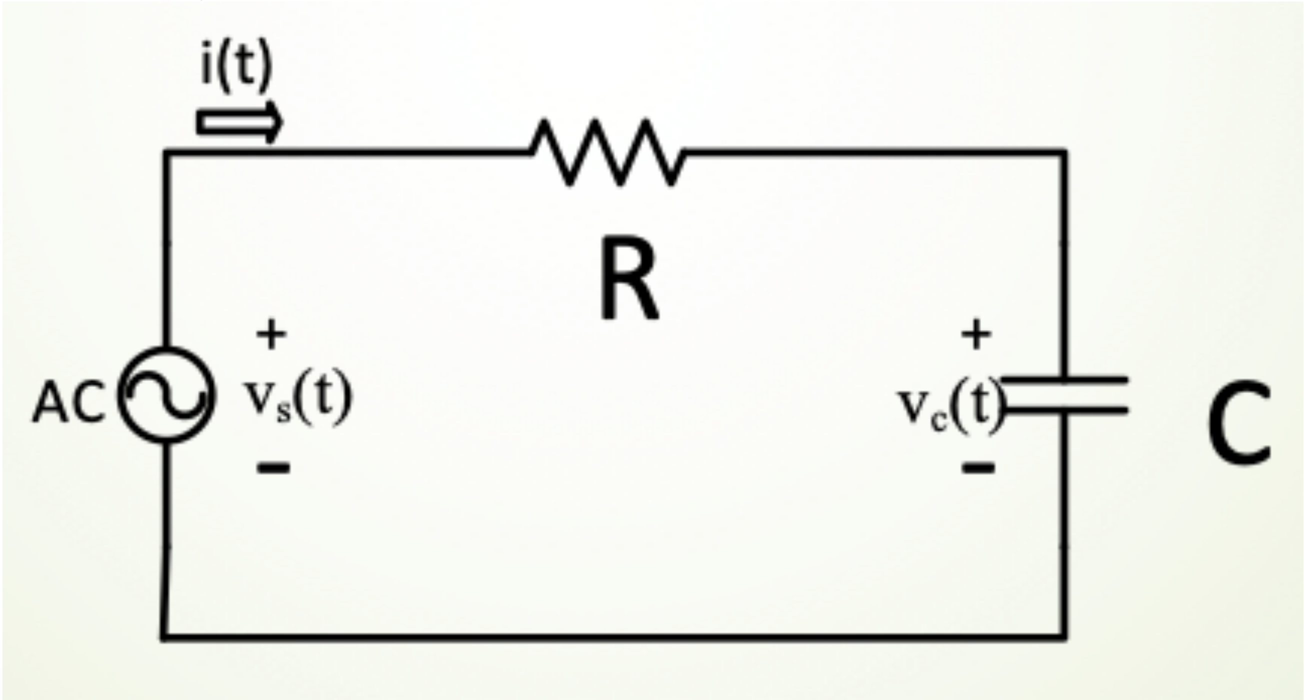
Convolução

Aplicações

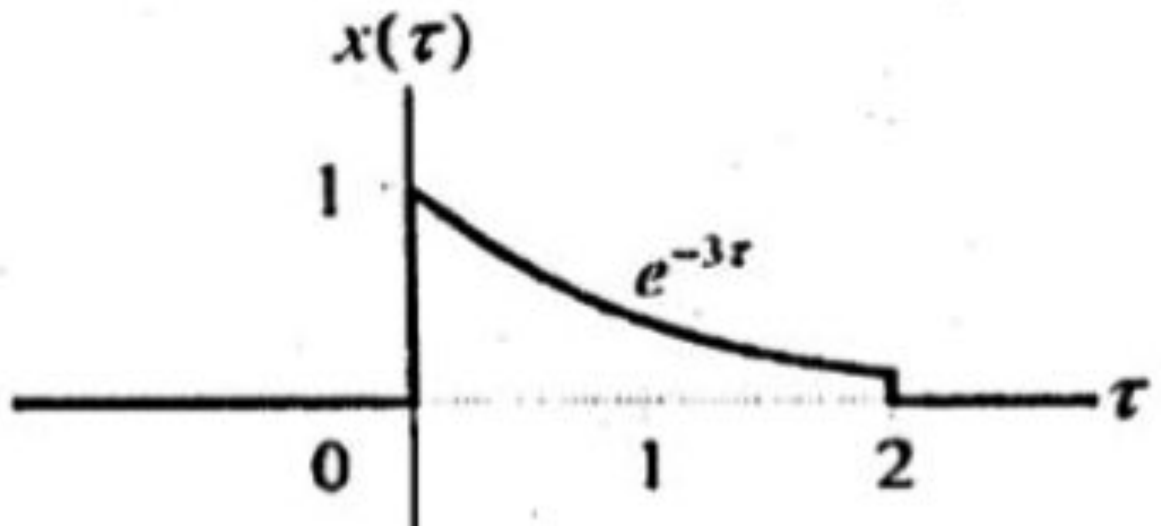


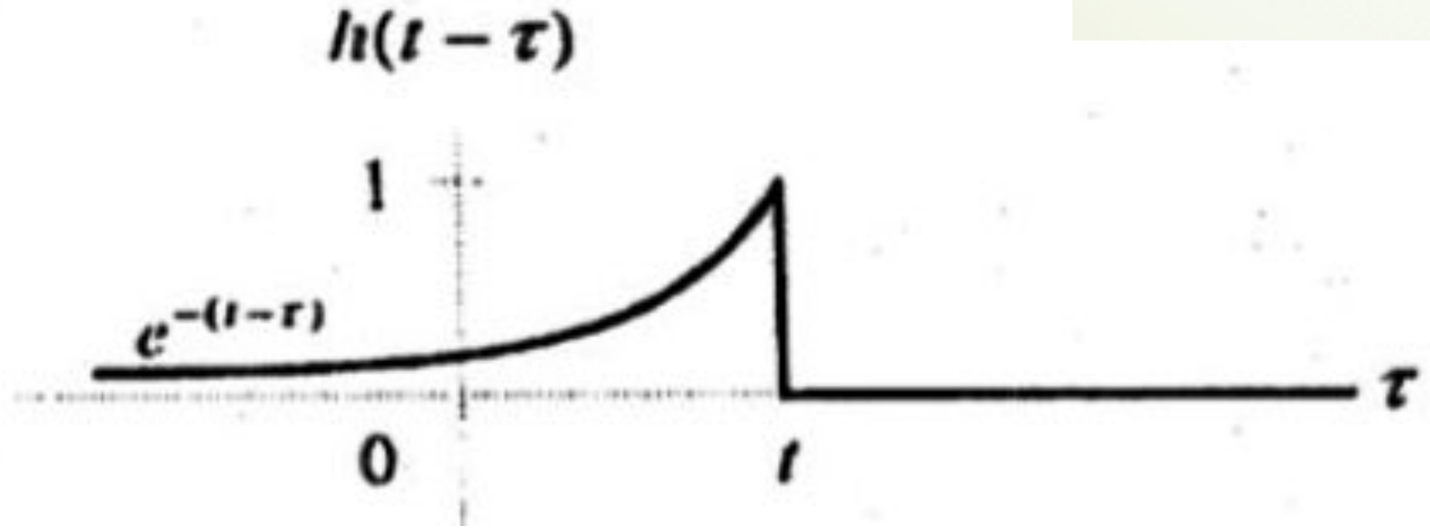
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

- Ex_2: Um circuito RC, tem a resposta impulsiva: $h(t) = e^{-t}u(t)$. Determina a tensão no capacitor, $y(t)$, resultante da tensão de entrada: $x(t) = e^{-3t}\left[u(t) - u(t-2)\right]$



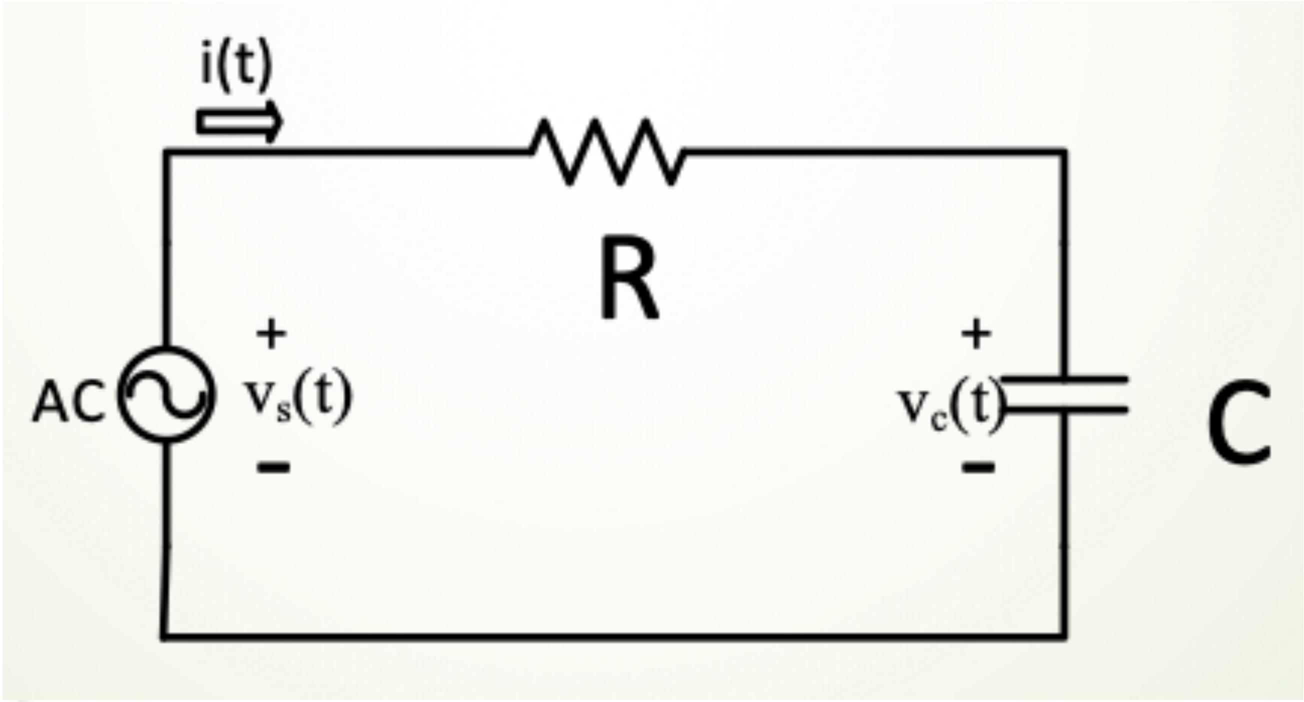
- Resolução: como se trata se um LIT, podemos aplicar convolução, ou seja:
  $y(t) = h(t) * x(t) = \left\{e^{-t} \cdot u(t)\right\} * \left\{e^{-3t} \cdot \left[u(t) - u(t-2)\right]\right\}$
- Traçar $x(\tau)$ e $h(t-\tau)$ em função da variável dependente τ:





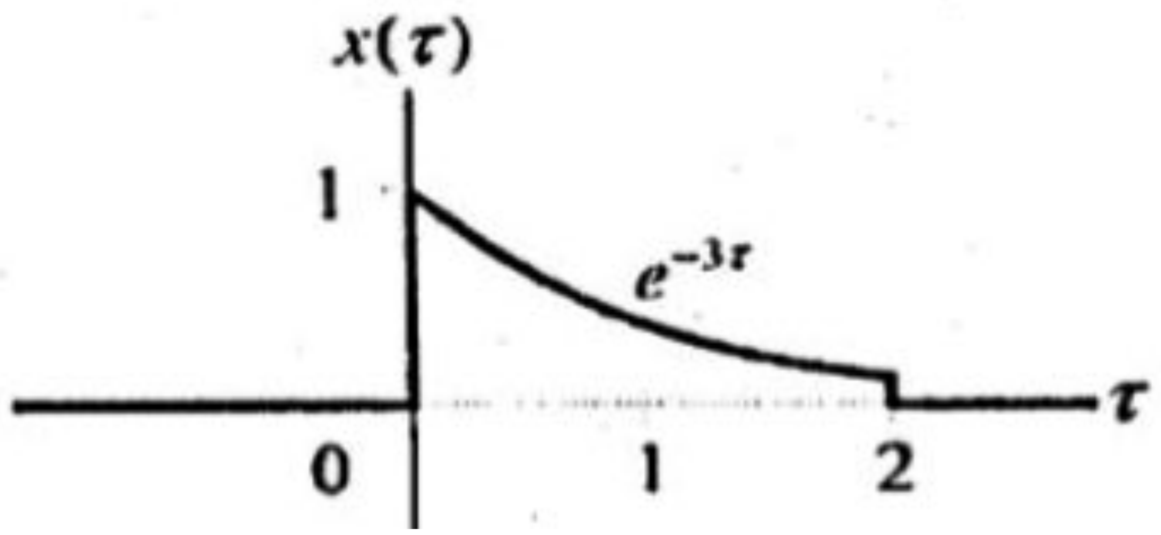
- Obs.: Inicie a constante τ muito grande negativamente e faça-a crescer até valores muito grandes positivamente, identificando os intervalos ops quais a multiplicação dos sinais seja nula, e os intervalos nos quais o produto não se anule.

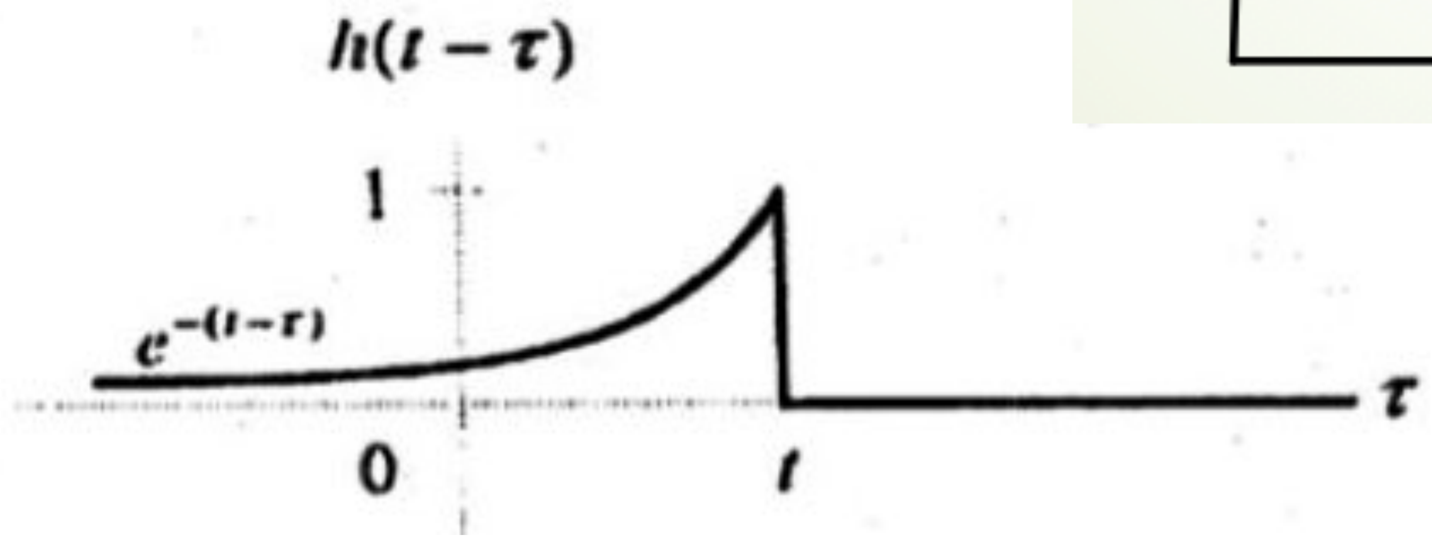
- Ex_1: Um circuito RC, tem a resposta impulsiva: $h(t) = e^{-t}u(t)$. Determina a tensão no capacitor, $y(t)$, resultante da tensão de entrada: $x(t) = e^{-3t}\left[u(t) - u(t-2)\right]$



- Resolução: como se trata se um LIT, podemos aplicar convolução, ou seja: $y(t) = h(t) * x(t) = \left\{e^{-t} \cdot u(t)\right\} * \left\{e^{-3t} \cdot \left[u(t) - u(t-2)\right]\right\}$

- Traçar $x(\tau)$ e $h(t-\tau)$ em função da variável dependente τ:





- Obs.: Inicie a constante τ muito grande negativamente e faça-a crescer até valores muito grandes positivamente, identificando os intervalos ops quais a multiplicação dos sinais seja nula, e os intervalos nos quais o produto não se anule.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

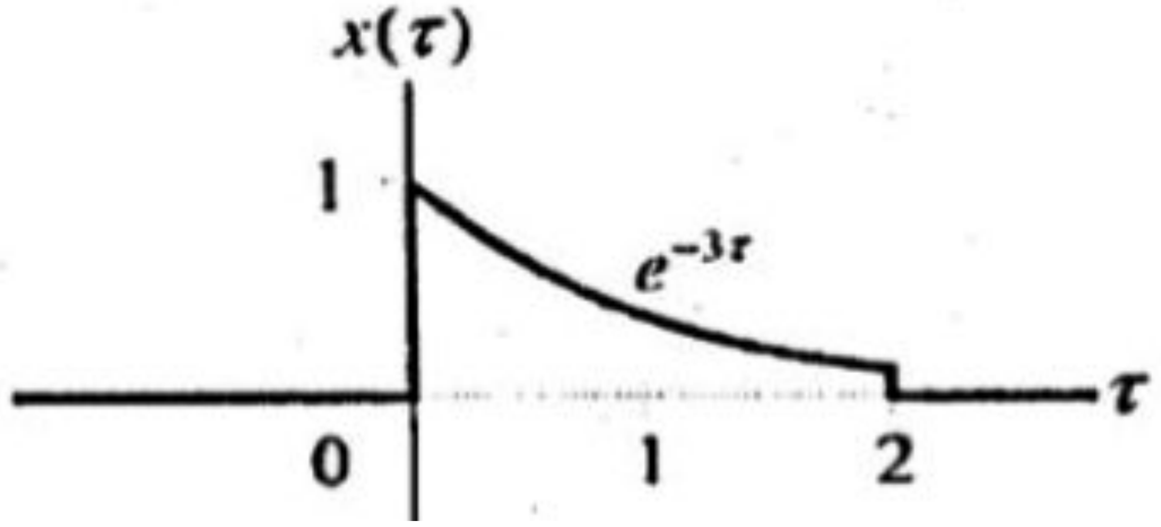
- Para $t < 0$: os sinais não se sobrepõem, resultando em produto nulo, e consequentemente a integral de convolução também se anula: $y(t) = 0$.

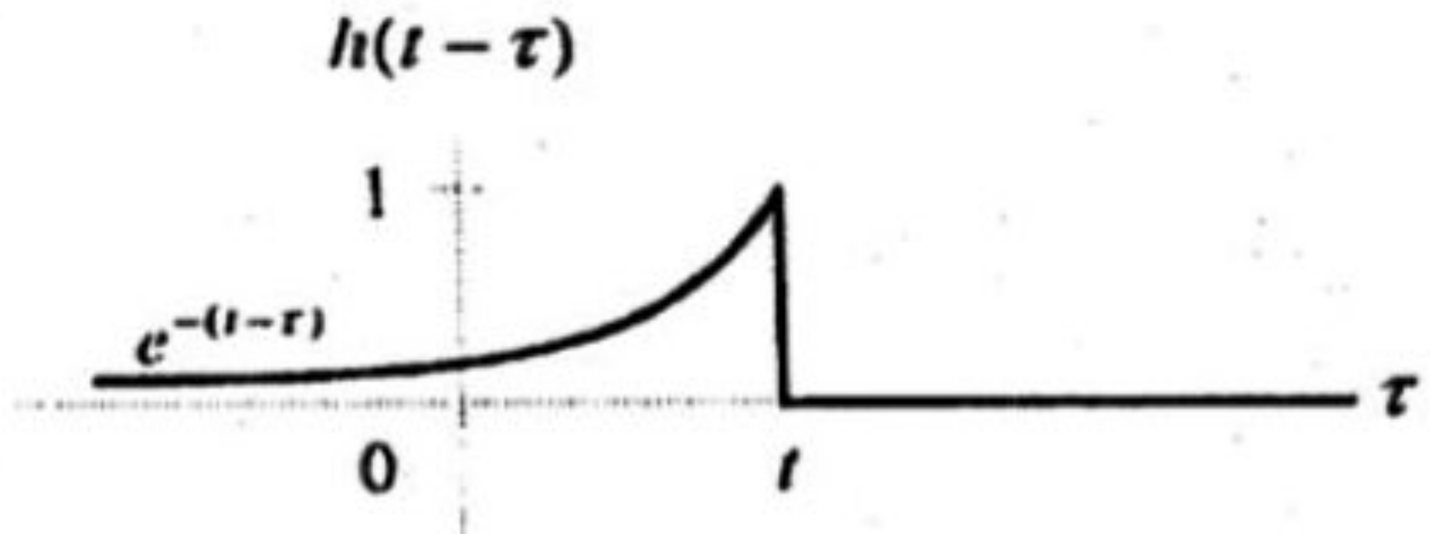
- Para $t > 0$: os sinais $x(\tau)$ e $h(t-\tau)$ sobrepõem-se para $0 < t < 2$:

$$y(t) = x(\tau) \cdot h(t-\tau) = e^{-t-2\tau}$$

- Para $0 < \tau < 2$: os sinais $x(\tau)$ e $h(t-\tau)$ sobrepõem-se, de forma a ter uma produto resultante crescente, dado por:

$$y(t) = \int_0^t e^{-t-2\tau}\, d\tau = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right)$$





$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

- Para $t < 0$: os sinais não se sobrepõem, resultando em produto nulo, e consequentemente a integral de convolução também se anula: $y(t) = 0$.
- Para $t > 0$: os sinais $x(\tau)$ e $h(t-\tau)$ sobrepõem-se para $0 < t < 2$:

$$y(t) = x(\tau) \cdot h(t-\tau) = e^{-t-2\tau}$$

- Para $0 < \tau < 2$: os sinais $x(\tau)$ e $h(t-\tau)$ sobrepõem-se, de forma a ter uma produto resultante crescente, dado por:

$$y(t) = \int_0^t e^{-t-2\tau}\, d\tau = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right)$$

- Para $t \geq 2$: os sinais $x(\tau)$ e $h(t-\tau)$ continuam sobrepondo-se, mas agora de forma a ter um produto resultante decrescente, dado por:

$$y(t) = \int_0^2 e^{-t-2\tau}\, d\tau = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-4}\right) e^{-t}$$

- Dai temos o resultado da convolução através da junção de todos os intervalos:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right), & 0 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2}\left(1 - e^{-4}\right) e^{-t} & t \geq 2 \end{cases}$$

Convolução Discreta

Exemplo

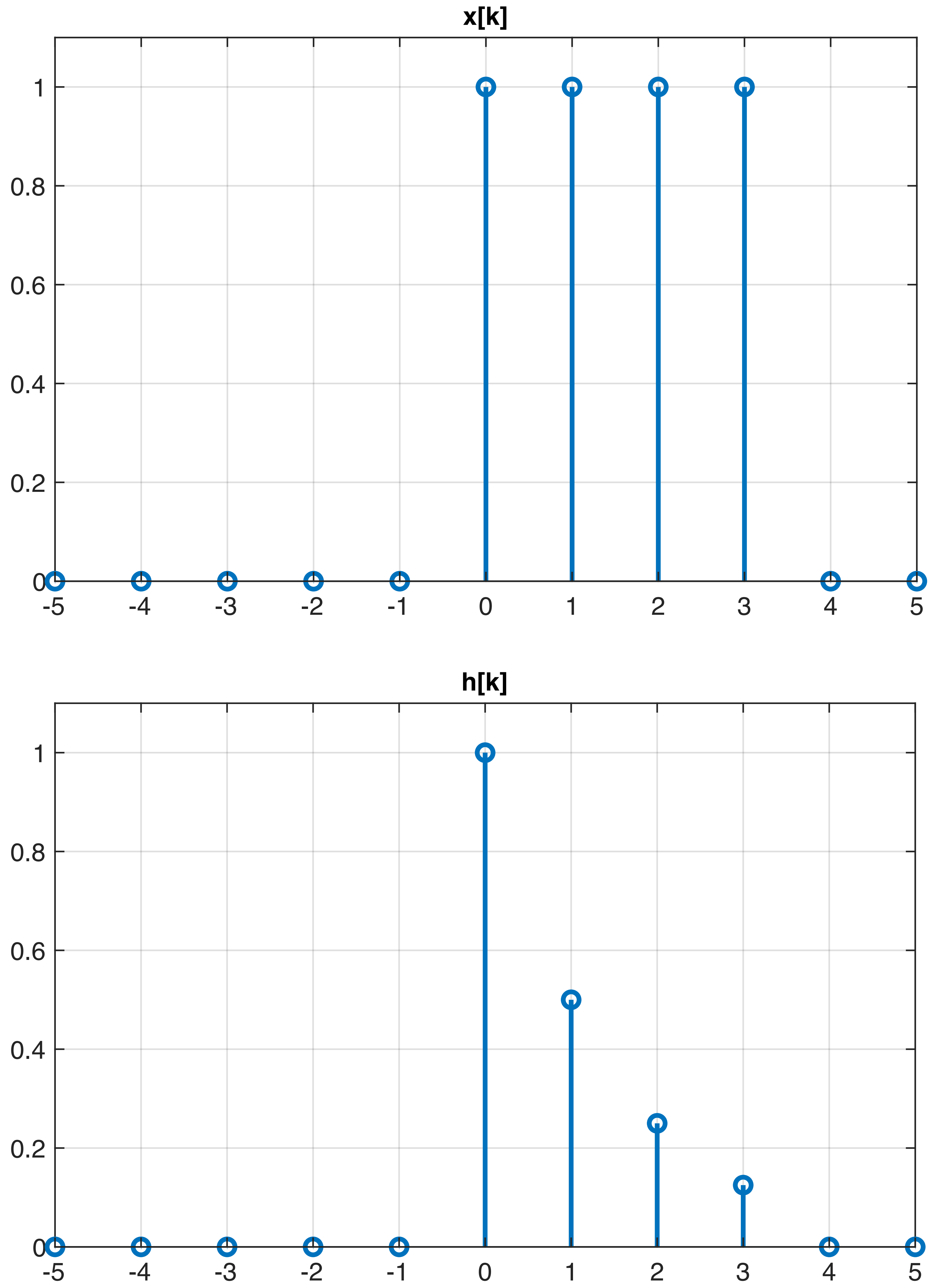
- Seja:

$$x[k] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & 0 \leq k \leq 2 \\ 0, & k > 3 \end{cases}$$

$$h[k] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ (0{,}5)^k, & 0 \leq k \leq 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$$

- Determine: $y(t) = x(t) * h(t)$

Resolvendo: visualizando sinais originais...



Convolução Discreta

Exemplo

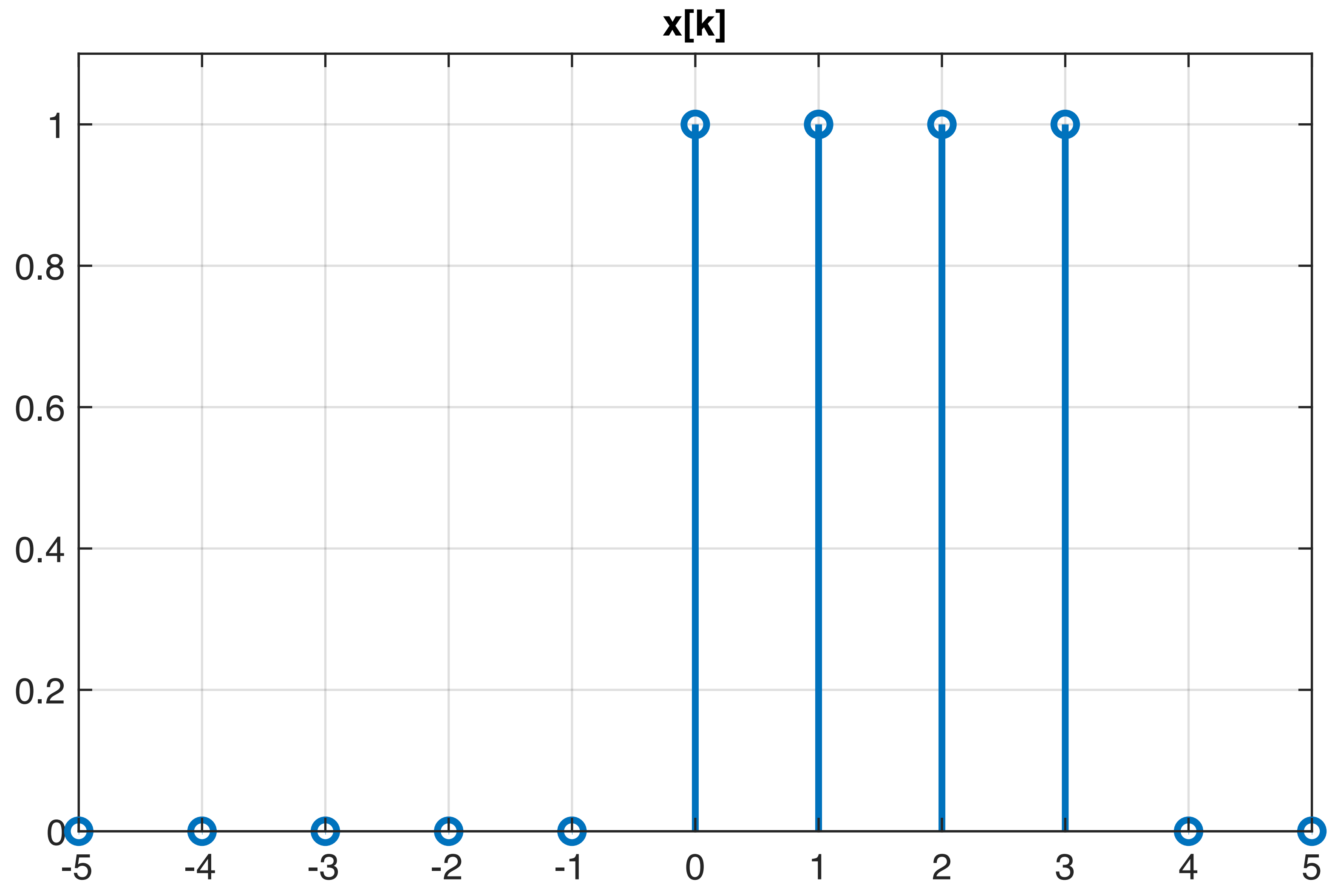
- Seja:

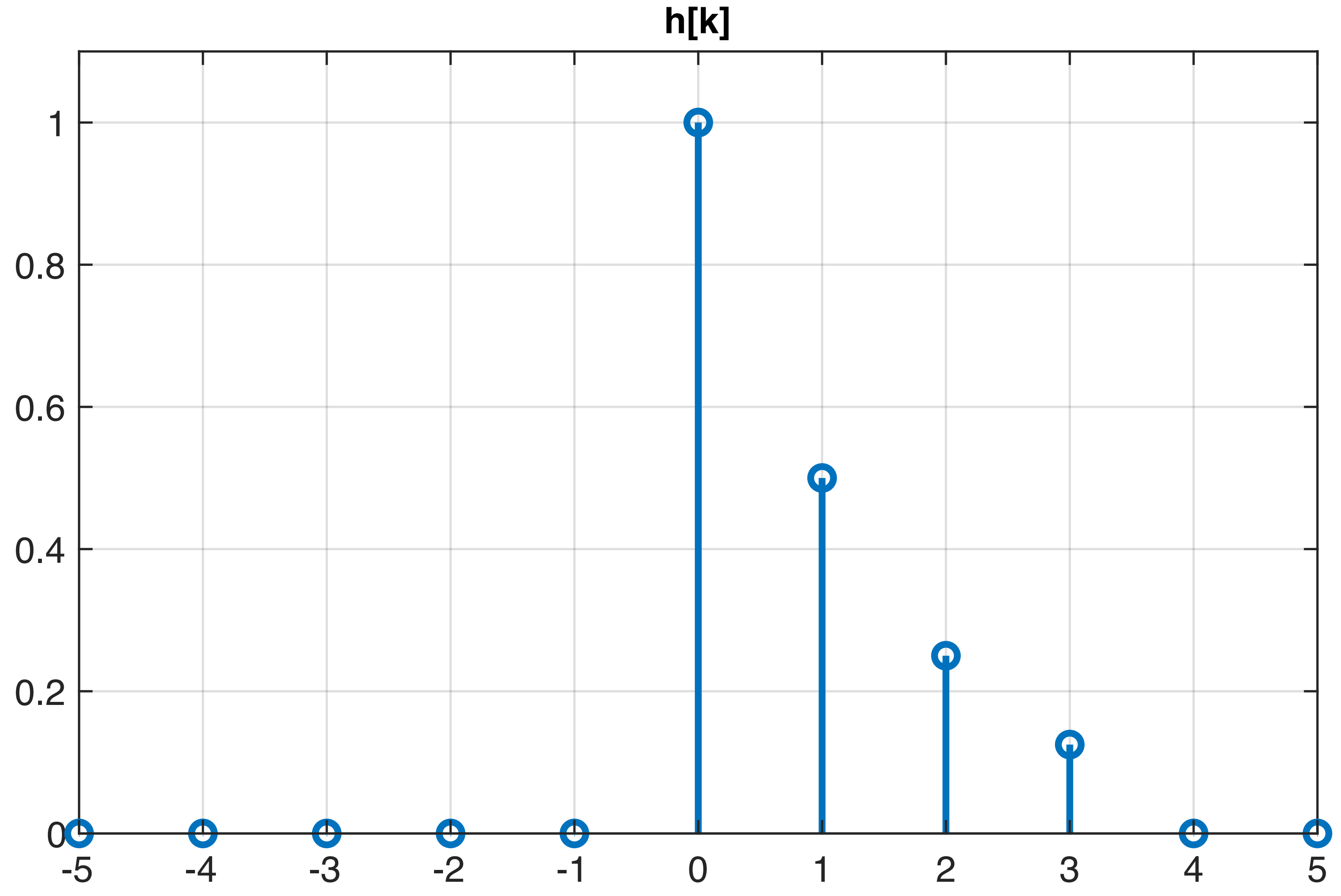
$$x[k] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & 0 \leq k \leq 2 \\ 0, & k > 3 \end{cases}$$

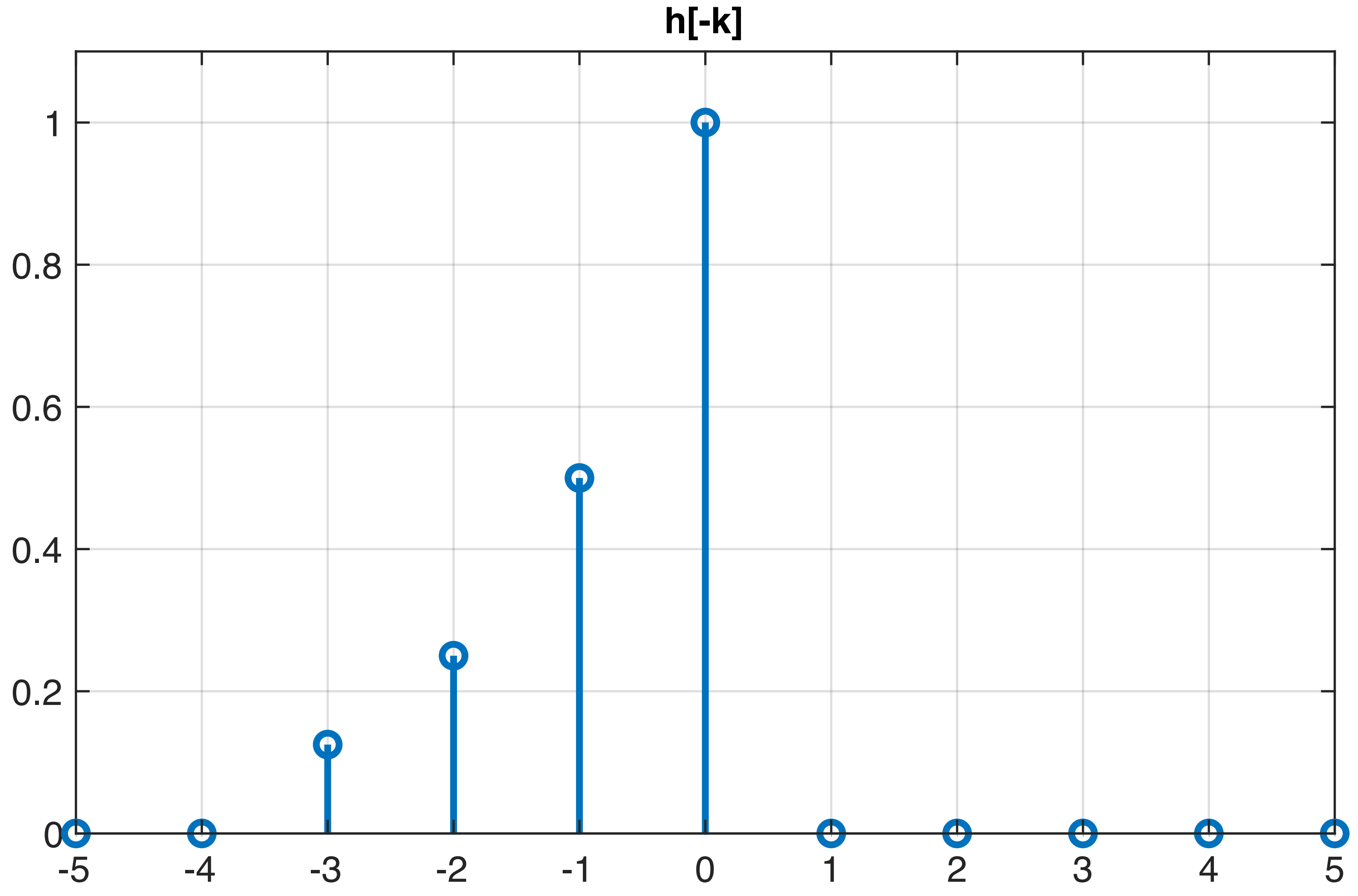
$$h[k] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ (0{,}5)^k, & 0 \leq k \leq 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$$

- Determine: $y(t) = x(t) * h(t)$

Resolvendo: 1) Revertendo amostras de $h[k]$ para obter $h[-k]$:





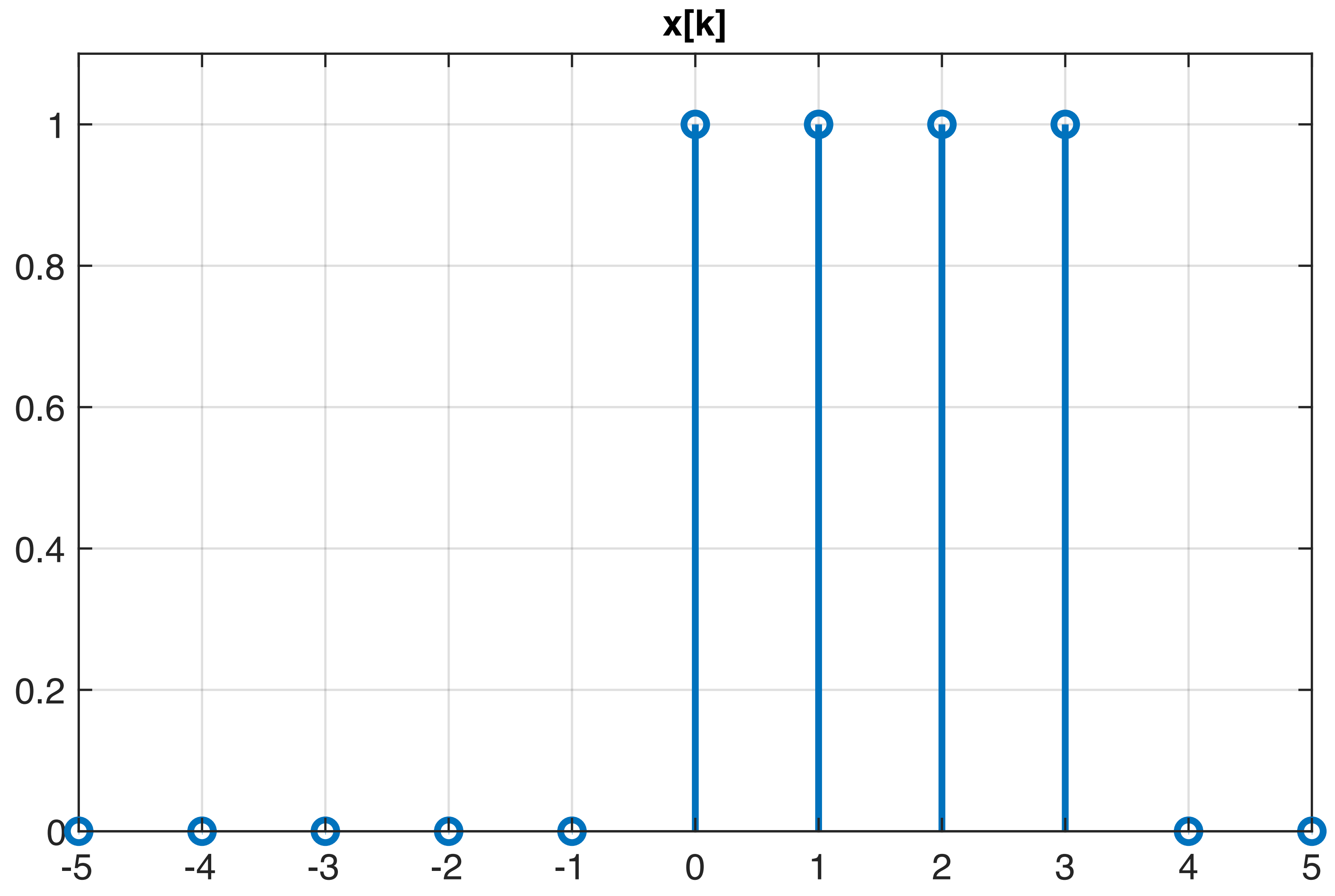


Convolução Discreta

Exemplo

Resolvendo: 2) Resolvendo $y[k] = x[k] * h[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot h[k-n]$ quando $k = 0$

(sistemas causais)

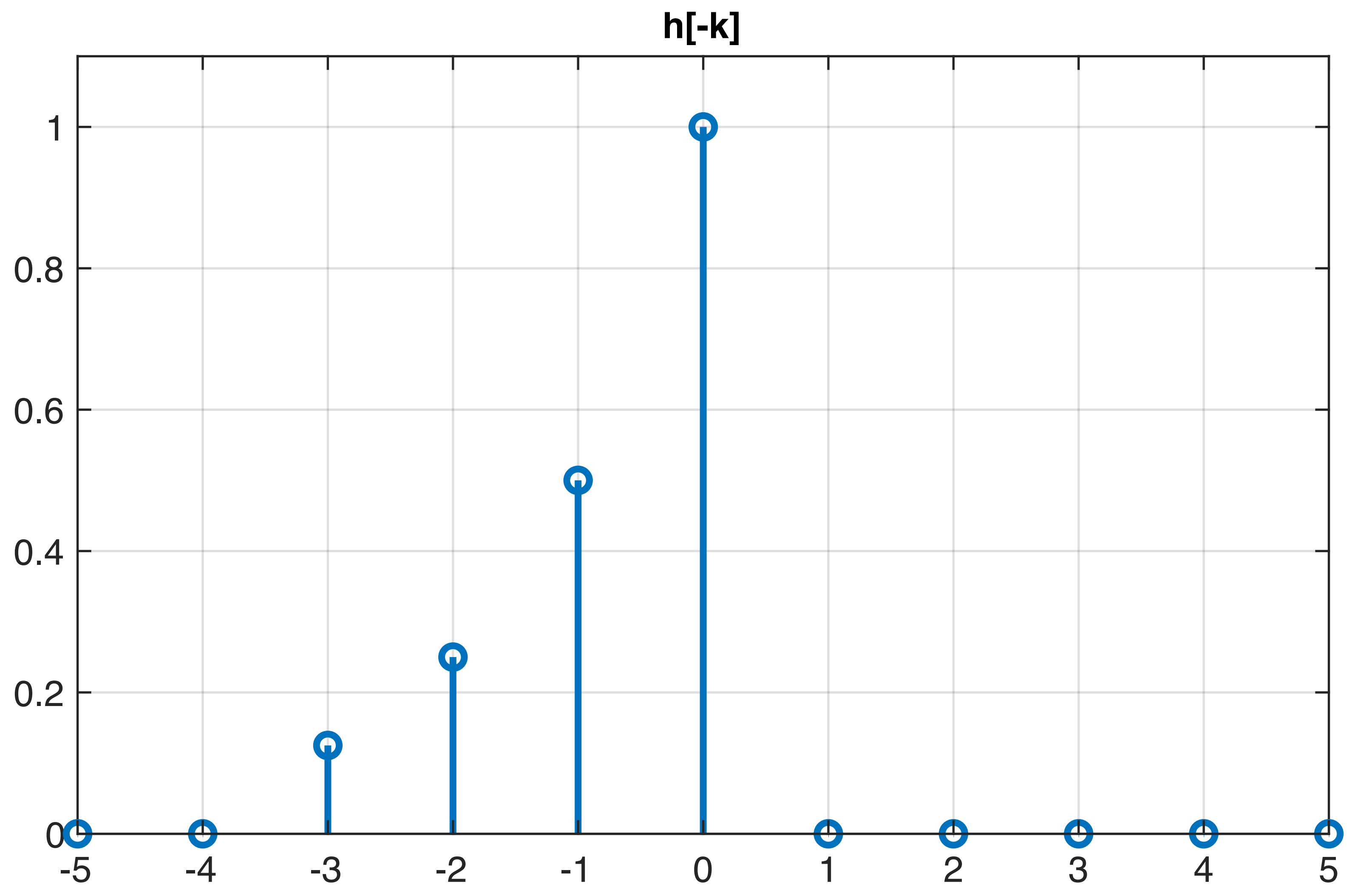


- Seja:

$$x[k] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & 0 \leq k \leq 2 \\ 0, & k > 3 \end{cases}$$

$$h[k] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ (0{,}5)^k, & 0 \leq k \leq 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$$

- Determine: $y(t) = x(t) * h(t)$



Convolução

Exemplo

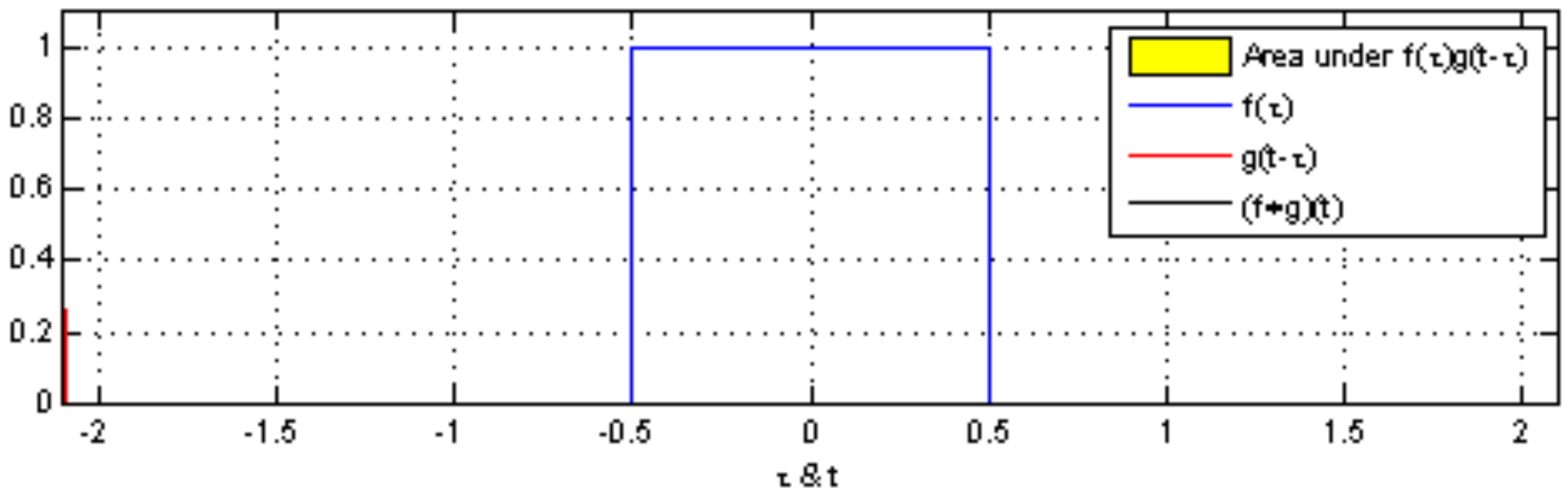
Ref.: https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution

- Seja:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -0,5 \\ 1, & 0,5 \leq t < 0,5 \\ 0, & t \geq 0,5 \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < -0,5 \\ 1, & 0,5 \leq t < 0,5 \\ 0, & t \geq 0,5 \end{cases}$$

- Determine: $y(t) = x(t) * h(t)$

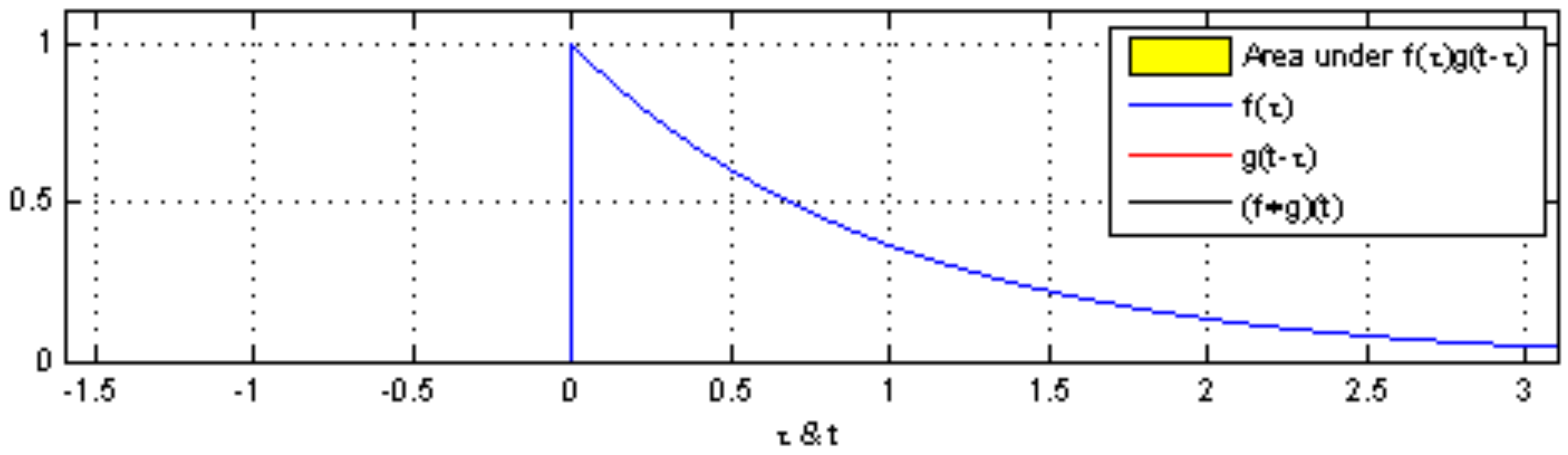


By Convolution_of_box_signal_with_itself.gif: Brian Ambergderivative work: Tinos (talk) - Convolution_of_box_signal_with_itself.gif, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11003835

Convolução
Exemplo

Ref.: https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution

- Outro exemplo

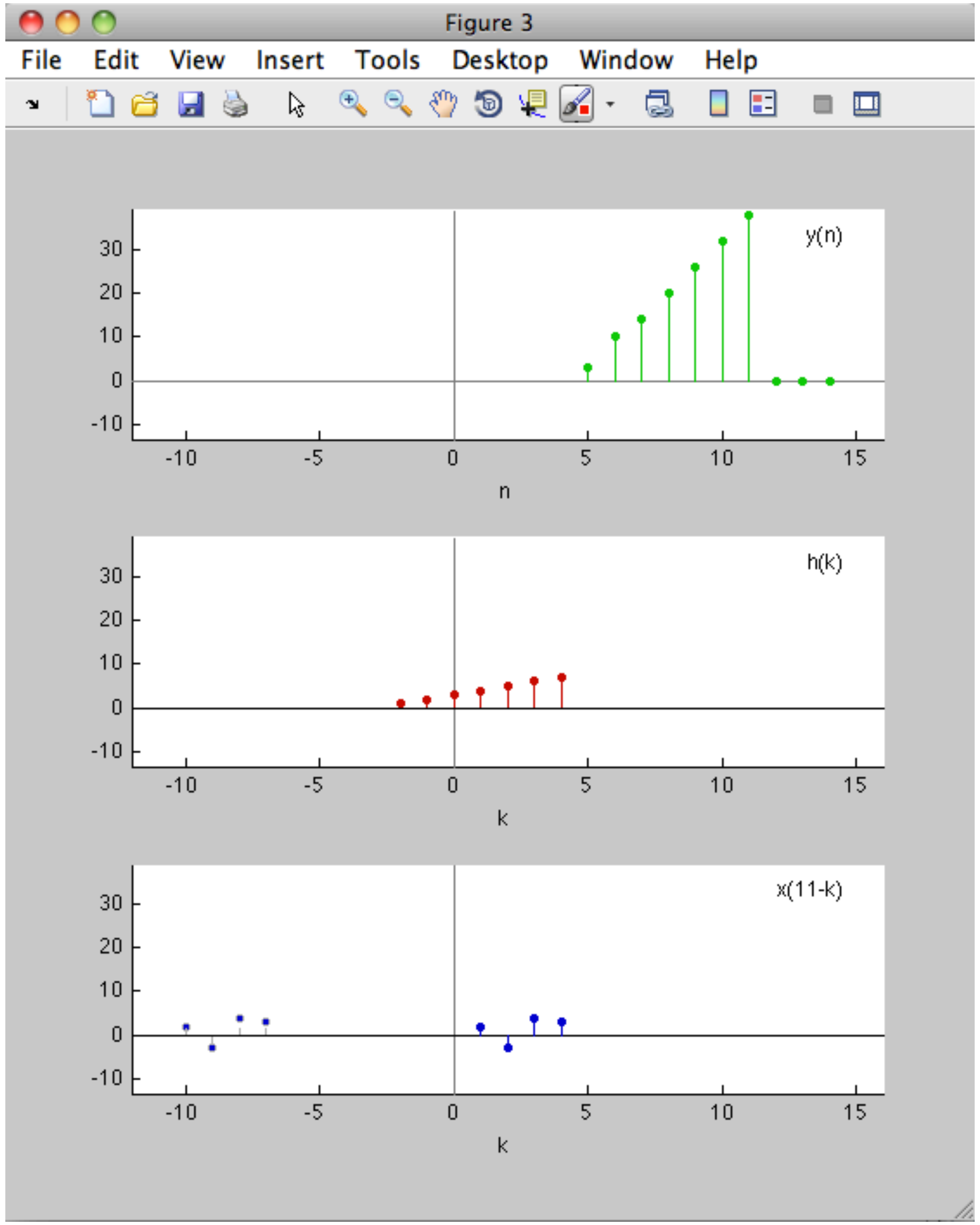


By Convolution_of_box_signal_with_itself.gif: Brian Ambergderivative work: Tinos (talk) - Convolution_of_box_signal_with_itself.gif, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11003835

Convolução Discreta

Animação usando MATLAB

```
>> x = [3 4 -1 2];
>> h = 1:7;
>> gconv(x,h,[7 -2]);
```

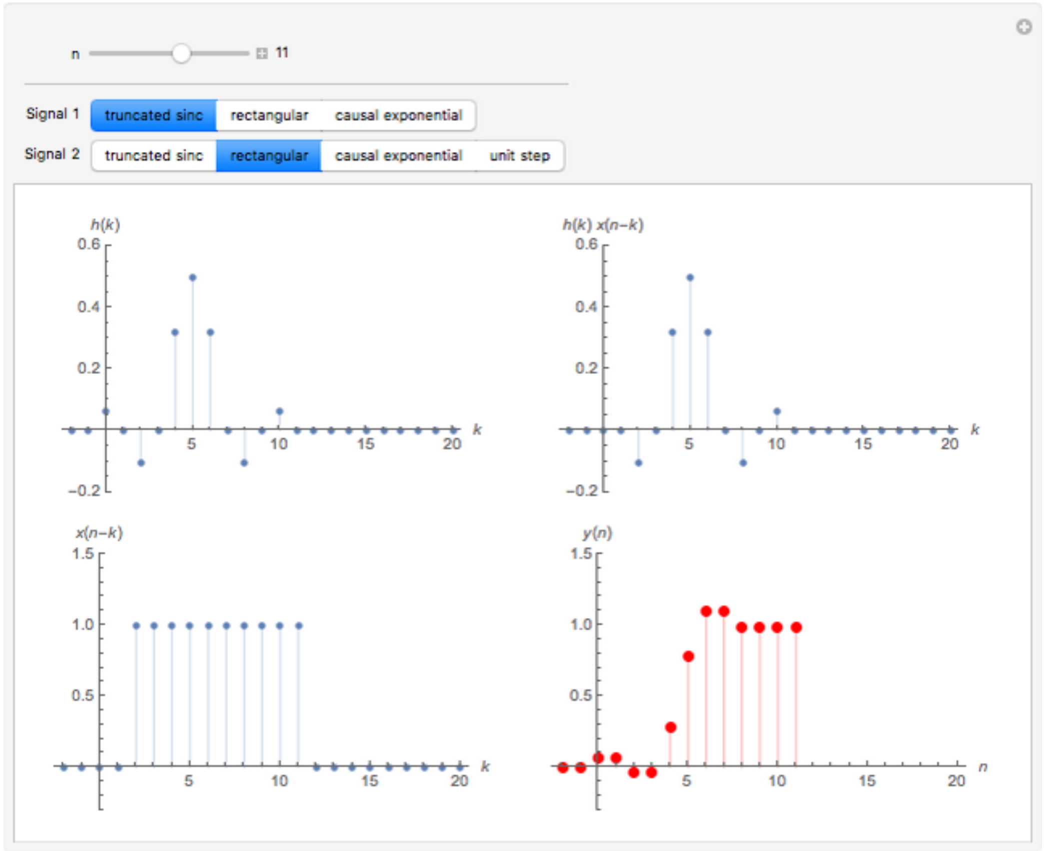


- **Fonte**: Christos Saragiotis (2023). Graphical convolution animation (https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27229-graphical-convolution-animation), **MATLAB Central File Exchange**. Acessado August 31, 2023. Arquivos atualizados em 12 Apr 2010 (Matlab 2009b).

Convolução

Outros sites Internet

- Matlab: xen0f0n/animateConvolutionD.m: https://gist.github.com/xen0f0n/088d5fda244f72af1fcdfd3618dfba54 (animateConvolutionD.m)
- Python: https://github.com/spatialaudio/signals-and-systems-lecture/blob/master/systems_time_domain/animation.py
- Matemathica/Wolfram: https://demonstrations.wolfram.com/DiscreteTimeConvolution/



“Convolução 2D”

Processamento de Imagens

- Usado na camada de entrada de redes CNN