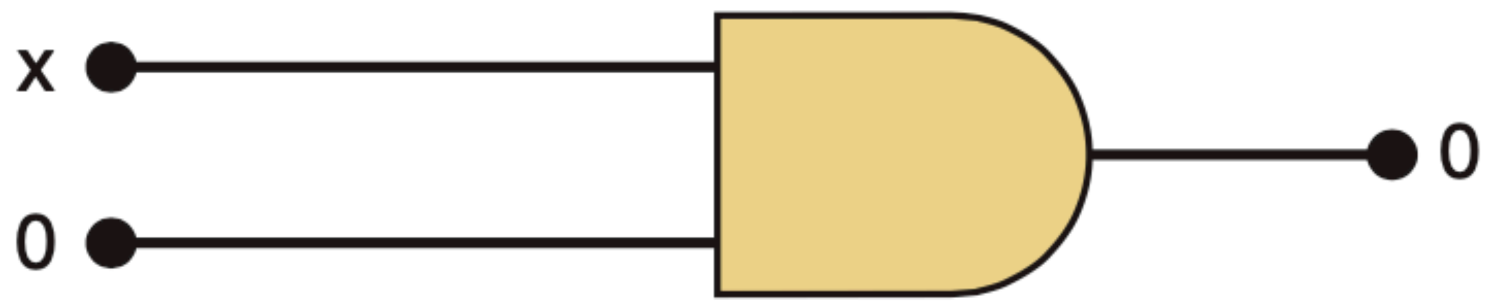
Álgebra Booleada

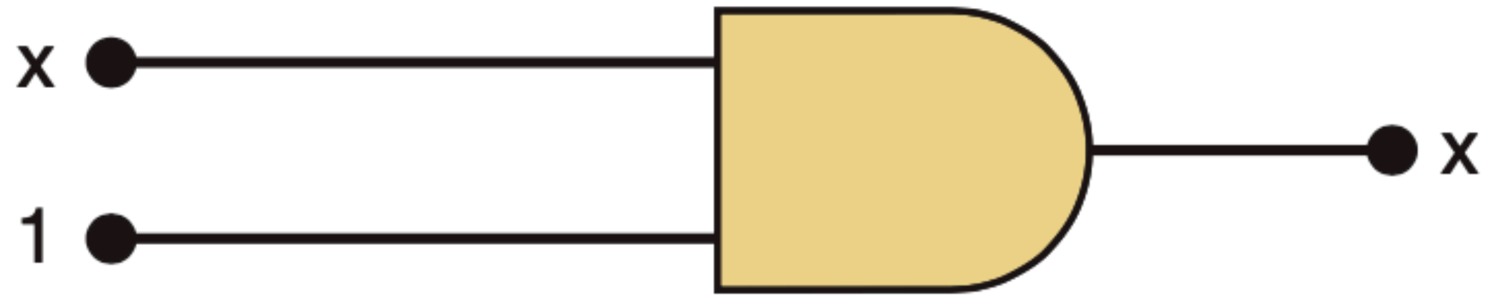
Circuitos Digitais I
Prof. Fernando Passold

Teoremas (iniciais)

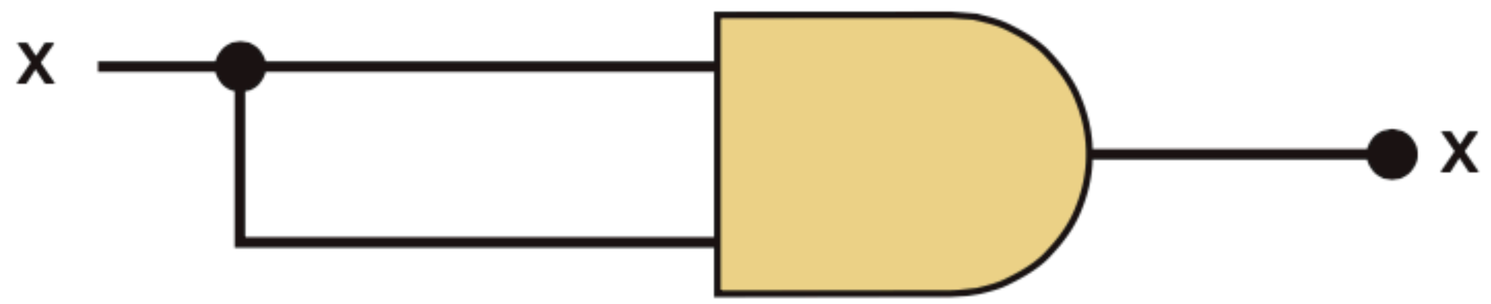
- Portas AND:



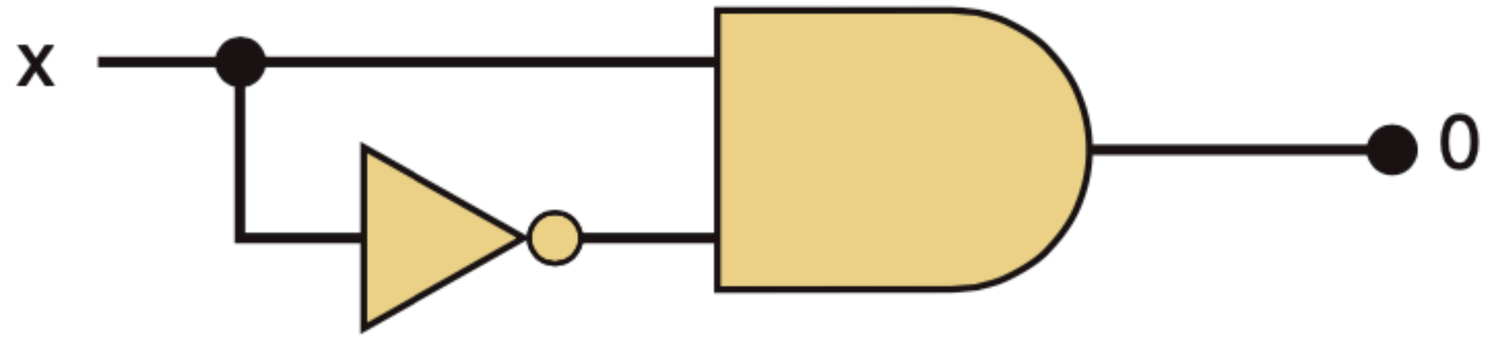
(1) $x \cdot 0 = 0$



(2) $x \cdot 1 = x$

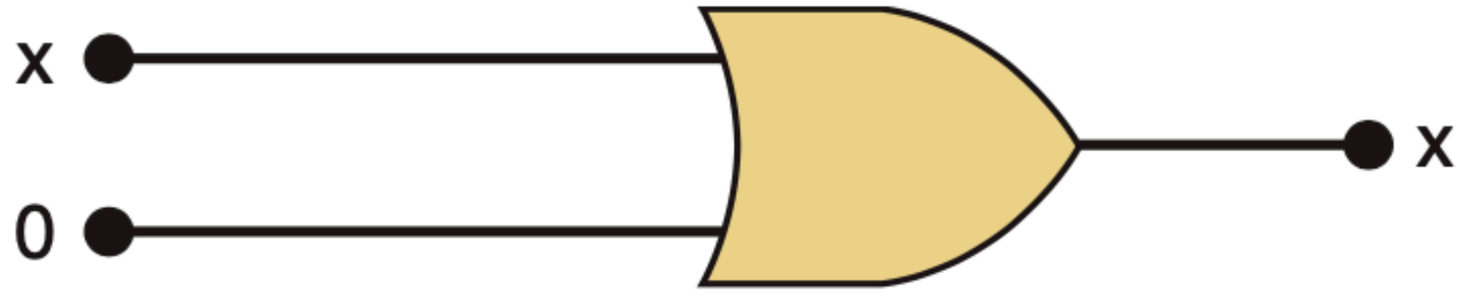


(3) $x \cdot x = x$

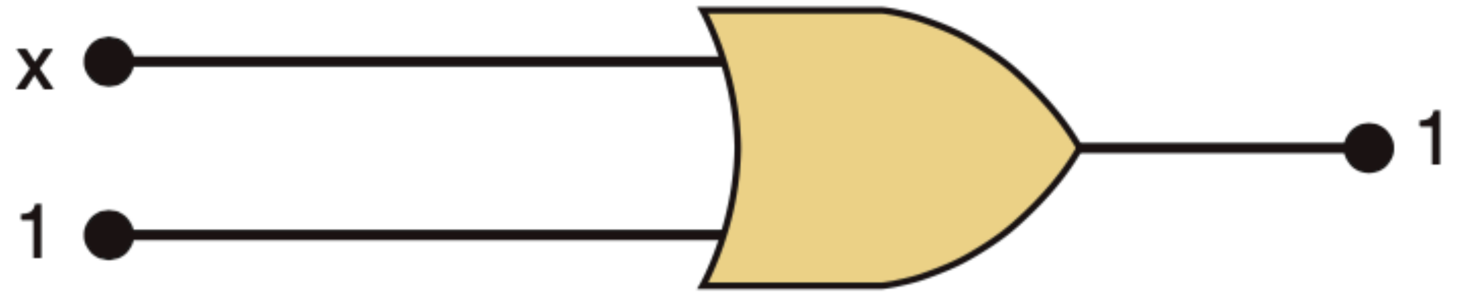


(4) $x \cdot \overline{x} = 0$

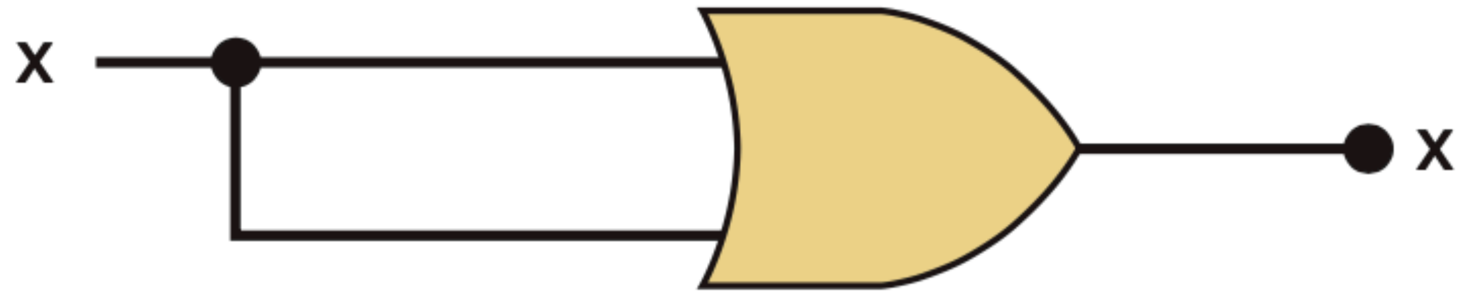
- Portas OR:



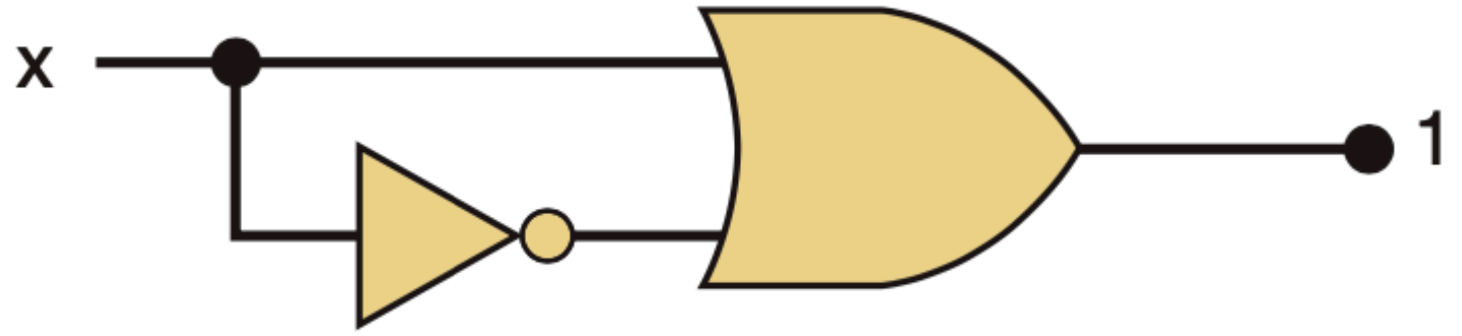
(5) $x + 0 = x$



(6) $x + 1 = 1$



(7) $x + x = x$



(8) $x + \overline{x} = 1$

Teoremas Multivariáveis

Teoremas:

(1) $x \cdot 0 = 0$

(2) $x \cdot 1 = x$

(4) $x \cdot \bar{x} = 0$

(5) $x + 0 = x$

(6) $x + 1 = 1$

(8) $x + \bar{x} = 1$

(14) $x + xy = x$

(15a) $x + \bar{x}y = x + y$

(15b) $\bar{x} + xy = \bar{x} + y$

Comutativas

(9) $x + y = y + x$

(10) $x \cdot y = y \cdot x$

Associativas

(11) $x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$

(12) $x(yz) = (xy)z = xyz$

Distributivas

(13a) $x(y + z) = xy + xz$

(13b) $(w + x)(y + z) = wy + xy + wz + xz$

(14) $x + xy = x$

(15a) $x + \bar{x}y = x + y$

(15b) $\bar{x} + xy = \bar{x} + y$

Únicas: presentes como material consulta em provas.

Teoremas Multivariáveis

Teoremas:
(1) $x \cdot 0 = 0$
(2) $x \cdot 1 = x$
(4) $x \cdot \overline{x} = 0$
(5) $x + 0 = x$
(6) $x + 1 = 1$
(8) $x + \overline{x} = 1$
(14) $x + xy = x$
(15a) $x + \overline{x}\,y = x + y$
(15b) $\overline{x} + xy = \overline{x} + y$

(11)	$x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$	Associativas
(12)	$x(yz) = (xy)z = xyz$	
(13a)	$x(y + z) = xy + xz$	Distributivas
(13b)	$(w + x)(y + z) = wy + xy + wz + xz$	
(14)	$x + xy = x$	
(15a)	$x + \overline{x}y = x + y$	
(15b)	$\overline{x} + xy = \overline{x} + y$	

x	y	xy	x + xy
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Ou:

$$\begin{aligned} x + xy &= x(1 + y) \\ &= x \cdot 1 \\ &= x \end{aligned}$$

Note:
$x + 1 = 1$

Exemplos de uso:

- Ex_1: $y = A \cdot \overline{B} \cdot D + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{D}$

1xOR(2) + 2xAND(3) + 2xNOT

- Solução:

  Notamos termos em comum na expressão (A):

  Teorema (13): Distribuitivo): colocamos $A\overline{B}$ em evidência:

  $$y = A\,\overline{B}\,\left(D + \overline{D}\right)$$

  Usando Teorema (8): $x + \overline{x} = 1$, obtemos:

  $$y = A\overline{B} \cdot 1$$

  $$y = A\,\overline{B}$$

Teoremas:

(1) $x \cdot 0 = 0$

(2) $x \cdot 1 = x$

(4) $x \cdot \overline{x} = 0$

(5) $x + 0 = x$

(6) $x + 1 = 1$

(8) $x + \overline{x} = 1$

(14) $x + xy = x$

(15a) $x + \overline{x}\,y = x + y$

(15b) $\overline{x} + xy = \overline{x} + y$

Exemplos de uso:

Teoremas:
(1) $x \cdot 0 = 0$
(2) $x \cdot 1 = x$
(4) $x \cdot \overline{x} = 0$
(5) $x + 0 = x$
(6) $x + 1 = 1$
(8) $x + \overline{x} = 1$
(14) $x + xy = x$
(15a) $x + \overline{x}\,y = x + y$
(15b) $\overline{x} + xy = \overline{x} + y$

- Ex_2: $z = (\overline{A} + B)(A + B)$
- Solução: $z = B$

Exemplos de uso:

- Ex_2: $z = (\overline{A} + B)(A + B)$

- Solução:
  Usando teorema 13: distributiva:
  $z = \overline{A} \cdot A + \overline{A} \cdot B + B \cdot A + B \cdot B$
  Usando teorema (4): $\overline{A} \cdot A = 0$ e teorema (3): $B \cdot B = B$:
  $z = 0 + \overline{A} \cdot B + B \cdot A + B = \overline{A}B + AB + B$
  Usando teoremas (2) e (6):
  $z = B(\overline{A} + A + 1)$
  Finalmente:
  $z = B$

Teoremas:
(1) $x \cdot 0 = 0$
(2) $x \cdot 1 = x$
(4) $x \cdot \overline{x} = 0$
(5) $x + 0 = x$
(6) $x + 1 = 1$
(8) $x + \overline{x} = 1$
(14) $x + xy = x$
(15a) $x + \overline{x}y = x + y$
(15b) $\overline{x} + xy = \overline{x} + y$

Problemas

Simplifique:

1) $y = A\overline{C} + AB\,\overline{C}$

2) $y = \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$

3) $y = \overline{A}\,D + ABD$

$= A\cdot\overline{C}(1+B)$, $(1+B) = 1$

$y = A\cdot\overline{C}$

$y = D\cdot(\overline{A} + A\cdot B)$

$\overline{x} + xy = \overline{x} + y$

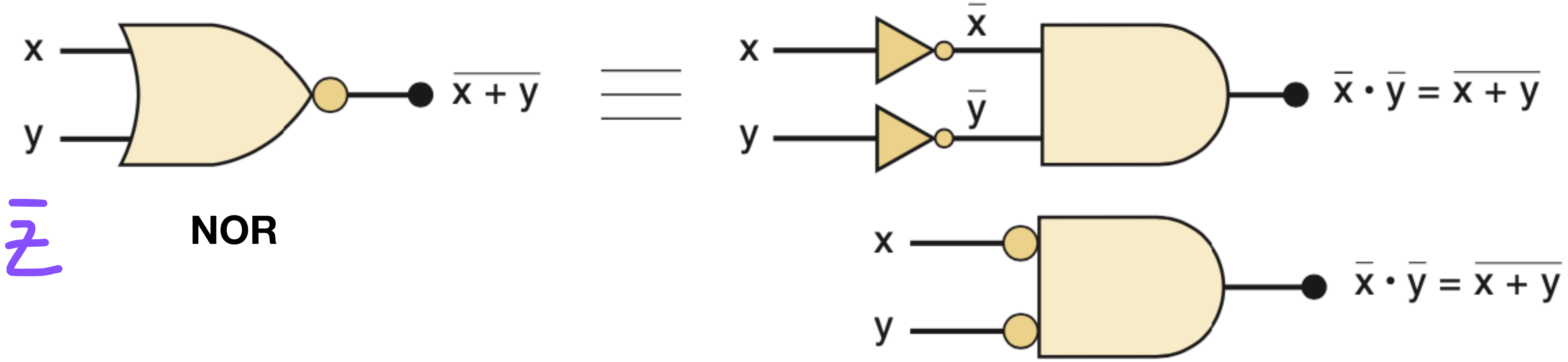
$y = D(\overline{A} + B)$

Teoremas de Demorgan's

- Associados com portas **NOR** e **NAND** !

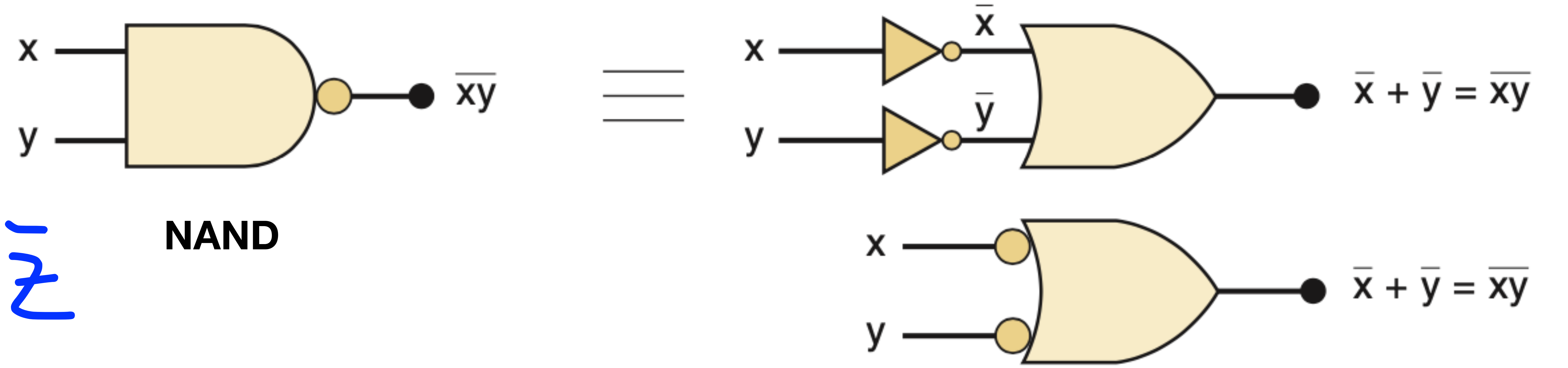
(16) $\left(\overline{x+y}\right) = \bar{x} \cdot \bar{y}$

$\overline{x+y+z} = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$



(17) $\left(\overline{x \cdot y}\right) = \bar{x} + \bar{y}$

$\overline{x \cdot y \cdot z} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$



Exemplo

- Simplifique a expressão (ou o circuito):

$$z = \overline{\left(\overline{A} + C\right) \cdot \left(B + \overline{D}\right)}$$

NAND(2)

- Solução: $z = A\,\overline{C} + \overline{B}\,D$

$$z = \overline{\left(\overline{A}+C\right)} + \overline{\left(B+\overline{D}\right)}$$

$$= \left(\overline{\overline{A}} \cdot \overline{C}\right) + \left(\overline{B} \cdot \overline{\overline{D}}\right)$$

$$= A \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot D$$

Teoremas:

(1) $x \cdot 0 = 0$

(2) $x \cdot 1 = x$

(4) $x \cdot \overline{x} = 0$

(5) $x + 0 = x$

(6) $x + 1 = 1$

(8) $x + \overline{x} = 1$

(14) $x + xy = x$

(15a) $x + \overline{x}\,y = x + y$

(15b) $\overline{x} + xy = \overline{x} + y$

(16) $\left(\overline{x + y}\right) = \overline{x} \cdot \overline{y}$

(17) $\left(\overline{x \cdot y}\right) = \overline{x} + \overline{y}$

Exemplo

- Simplifique a expressão (ou o circuito):

$$z = \overline{\left(\overline{A} + C\right) \cdot \left(B + \overline{D}\right)}$$

- Solução:

$$z = \left(\overline{\overline{A} + C}\right) + \left(\overline{B + \overline{D}}\right)$$

Teorema (17)

$$z = \left(\overline{\overline{A}} \cdot \overline{C}\right) + \left(\overline{B} \cdot \overline{\overline{D}}\right)$$

Teorema (16)

$$z = A\,\overline{C} + \overline{B}\,D$$

Teoremas:

(1) $x \cdot 0 = 0$

(2) $x \cdot 1 = x$

(4) $x \cdot \overline{x} = 0$

(5) $x + 0 = x$

(6) $x + 1 = 1$

(8) $x + \overline{x} = 1$

(14) $x + xy = x$

(15a) $x + \overline{x}\,y = x + y$

(15b) $\overline{x} + xy = \overline{x} + y$

(16) $\left(\overline{x + y}\right) = \overline{x} \cdot \overline{y}$

(17) $\left(\overline{x \cdot y}\right) = \overline{x} + \overline{y}$

Exemplos

Teoremas:

(1) $x \cdot 0 = 0$

(2) $x \cdot 1 = x$

(4) $x \cdot \bar{x} = 0$

(5) $x + 0 = x$

(6) $x + 1 = 1$

(8) $x + \bar{x} = 1$

(14) $x + xy = x$

(15a) $x + \bar{x}y = x + y$

(15b) $\bar{x} + xy = \bar{x} + y$

(16) $\left(\overline{x + y}\right) = \bar{x} \cdot \bar{y}$

(17) $\left(\overline{x \cdot y}\right) = \bar{x} + \bar{y}$

Example 1

$$
\begin{aligned}
z &= \overline{A + \overline{B} \cdot C} \\
&= \overline{A} \cdot (\overline{\overline{B} \cdot C}) \\
&= \overline{A} \cdot (\overline{\overline{B}} + \overline{C}) \\
&= \overline{A} \cdot (B + \overline{C})
\end{aligned}
$$

Example 2

$$
\begin{aligned}
\omega &= \overline{(A + BC) \cdot (D + EF)} \\
&= (\overline{A + BC}) + (\overline{D + EF}) \\
&= (\overline{A} \cdot \overline{BC}) + (\overline{D} \cdot \overline{EF}) \\
&= [\overline{A} \cdot (\overline{B} + \overline{C})] + [\overline{D} \cdot (\overline{E} + \overline{F})] \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{D}\,\overline{E} + \overline{D}\,\overline{F}
\end{aligned}
$$

Note:

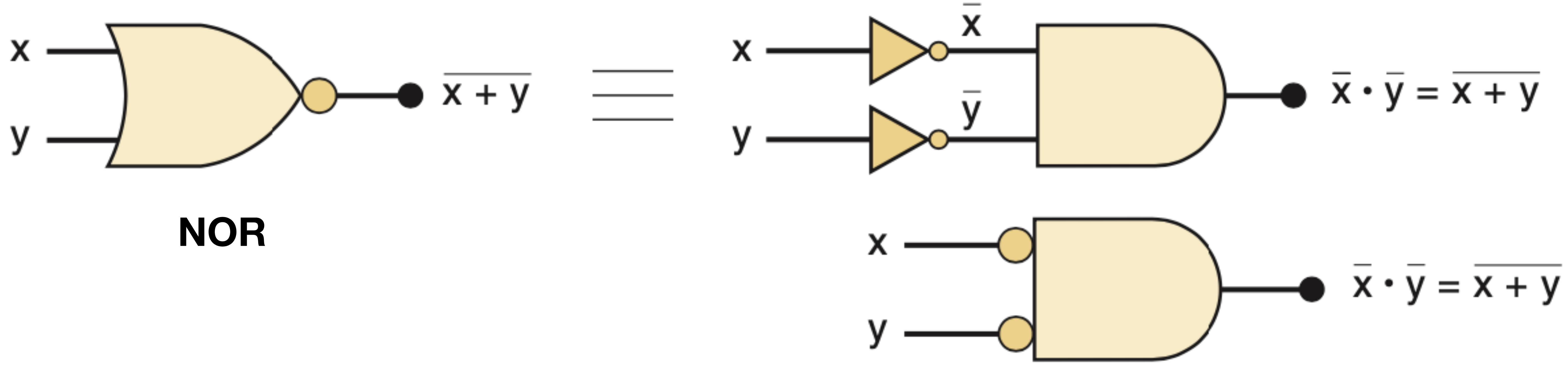
$\overline{x + y + z} = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$

$\overline{x \cdot y \cdot z} = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$

Implicações do Teoremas de Demorgan's

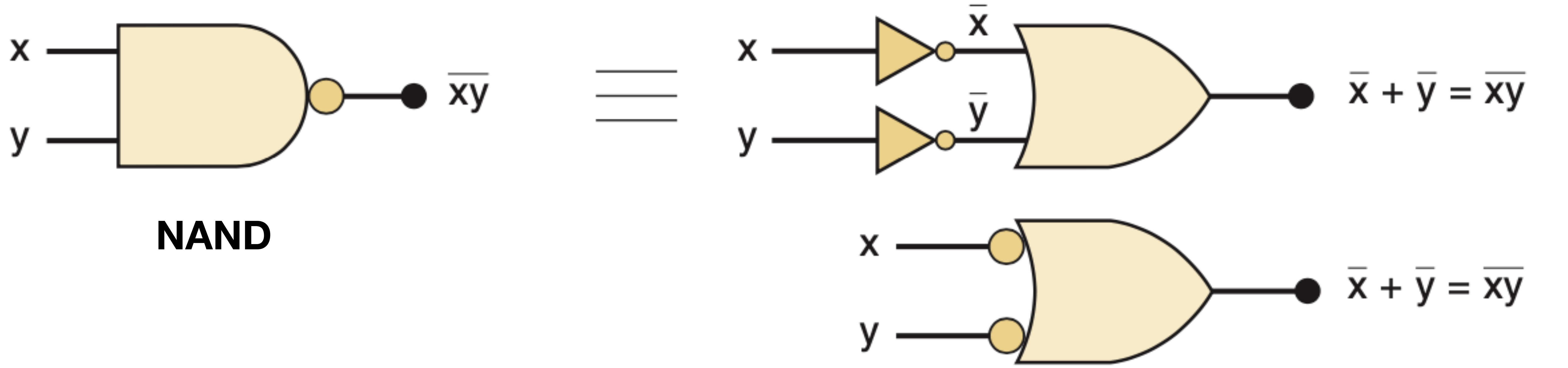
- Universalidade das portas **NOR** e **NAND:**

(16) $\left(\overline{x+y}\right) = \bar{x} \cdot \bar{y}$



NOR

(17) $\left(\overline{x \cdot y}\right) = \bar{x} + \bar{y}$

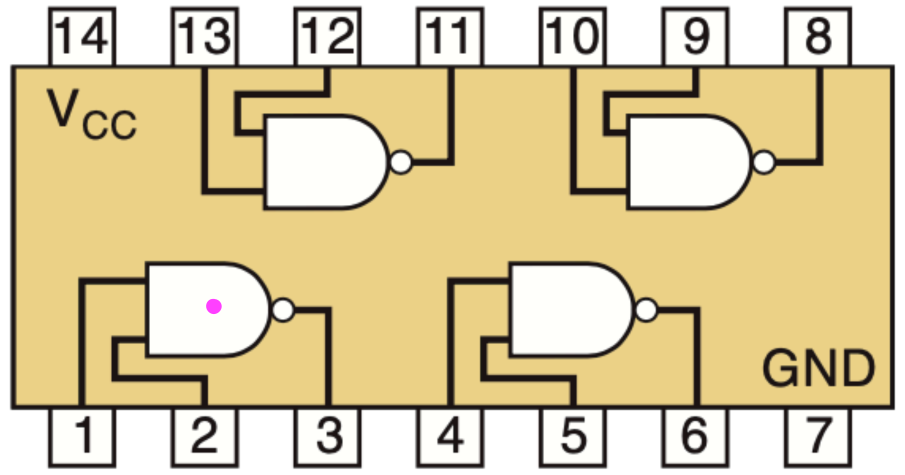


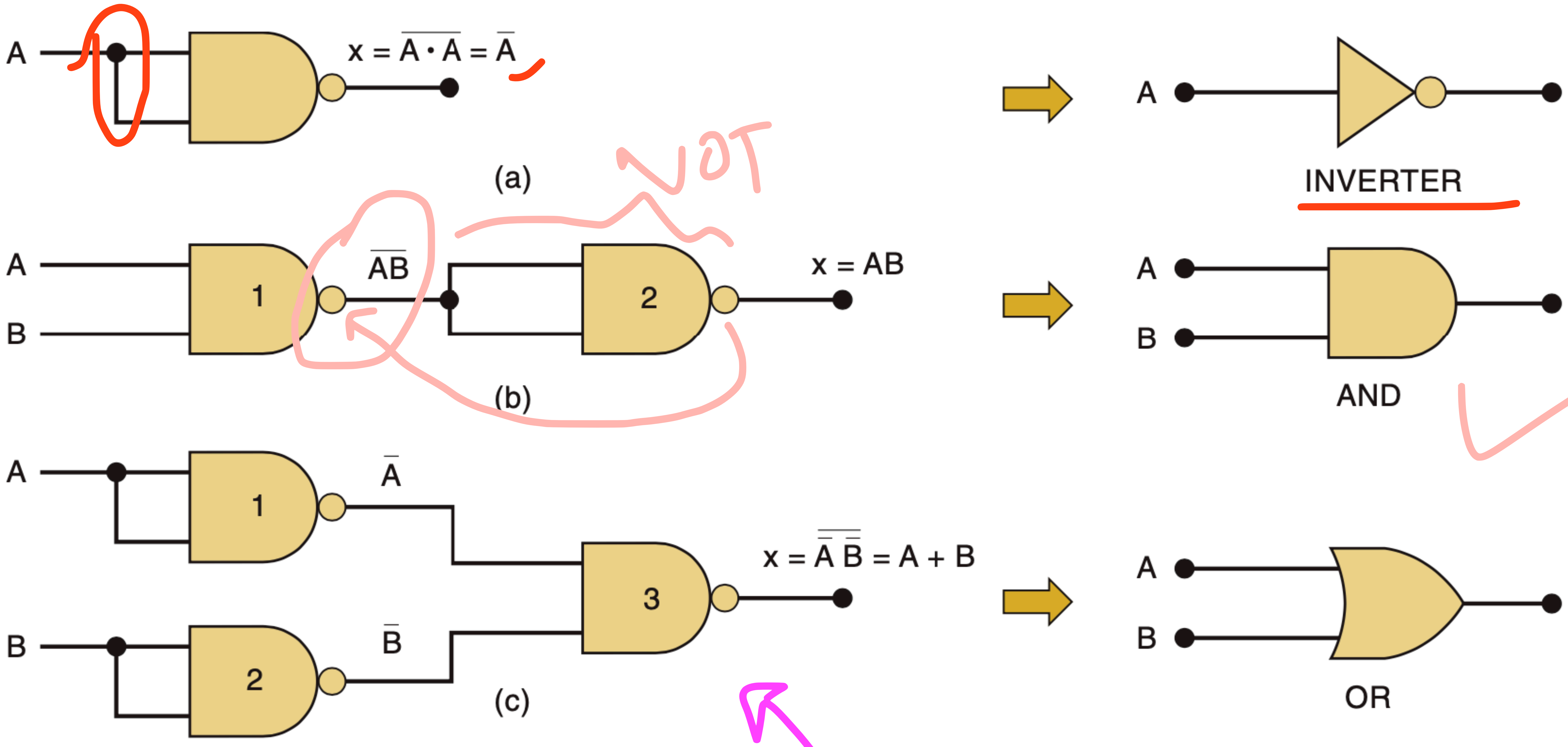
NAND

Implicações do Teoremas de Demorgan's

- Universalidade das portas **NAND:** (16) $\overline{(x+y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

74LS00



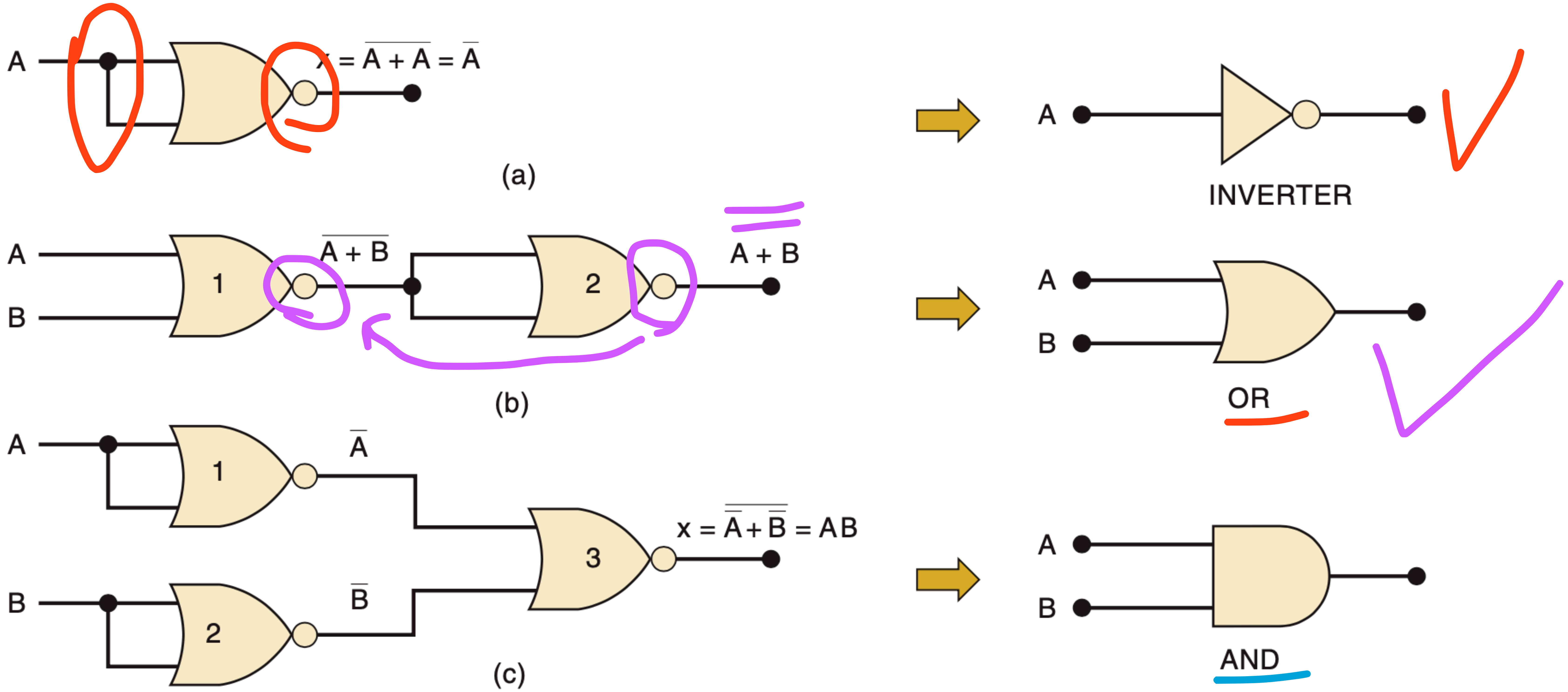


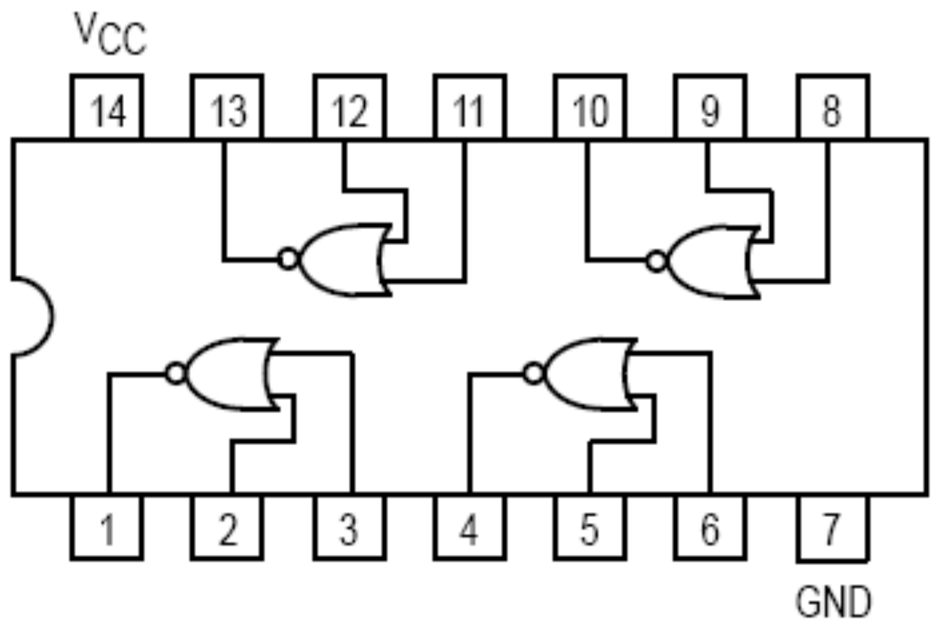
$$x = \overline{\overline{A+B}} = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$$

$$(17)\ \overline{(x \cdot y)} = \bar{x} + \bar{y}$$

Implicações do Teoremas de Demorgan’s

- Universalidade das portas **NOR:**





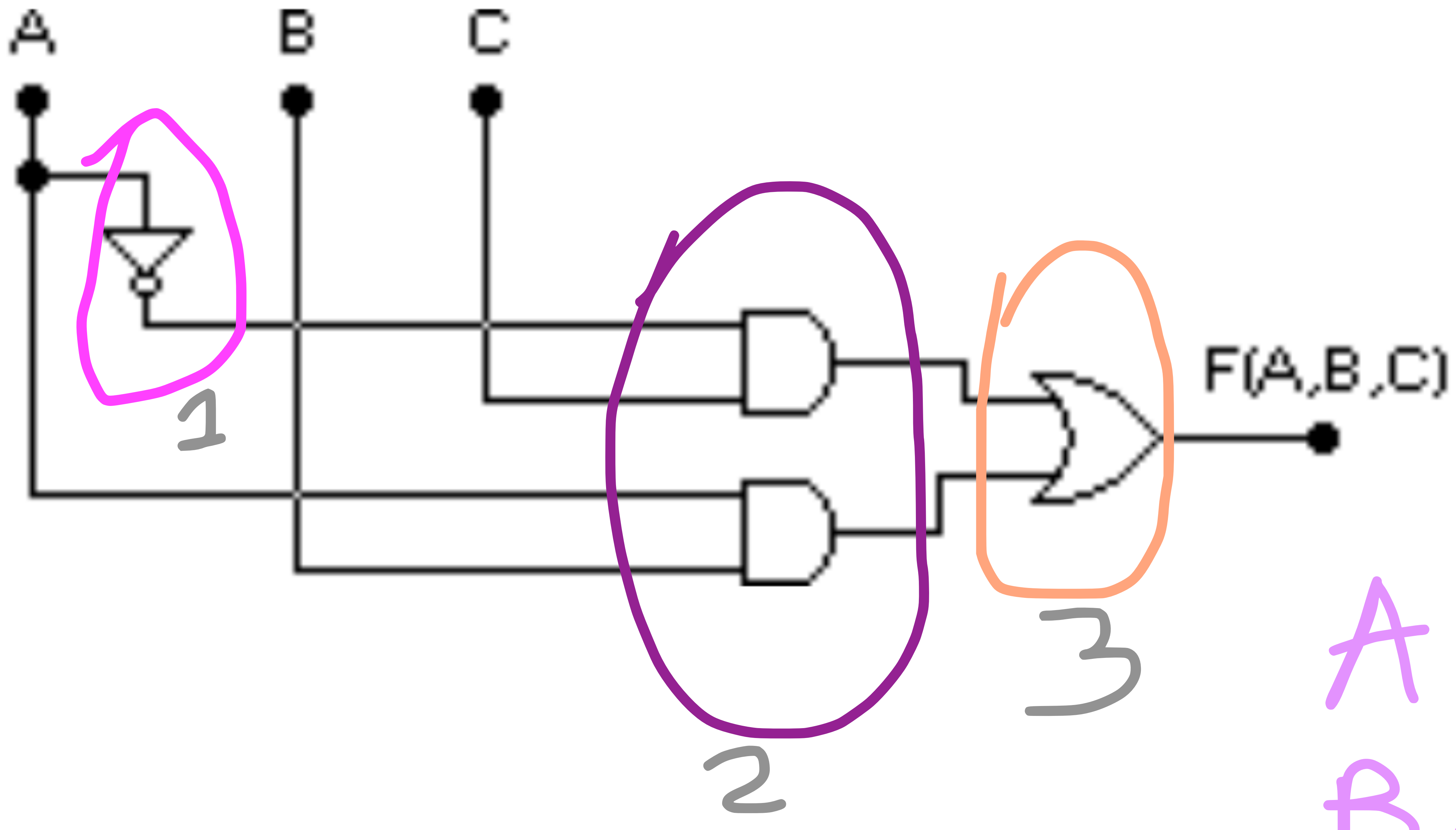
74LS02

$x=\overline{\overline{A\cdot B}}=\overline{\overline{A}+\overline{B}}$

$(16)\ \overline{x+y}=\overline{x}\cdot\overline{y}$

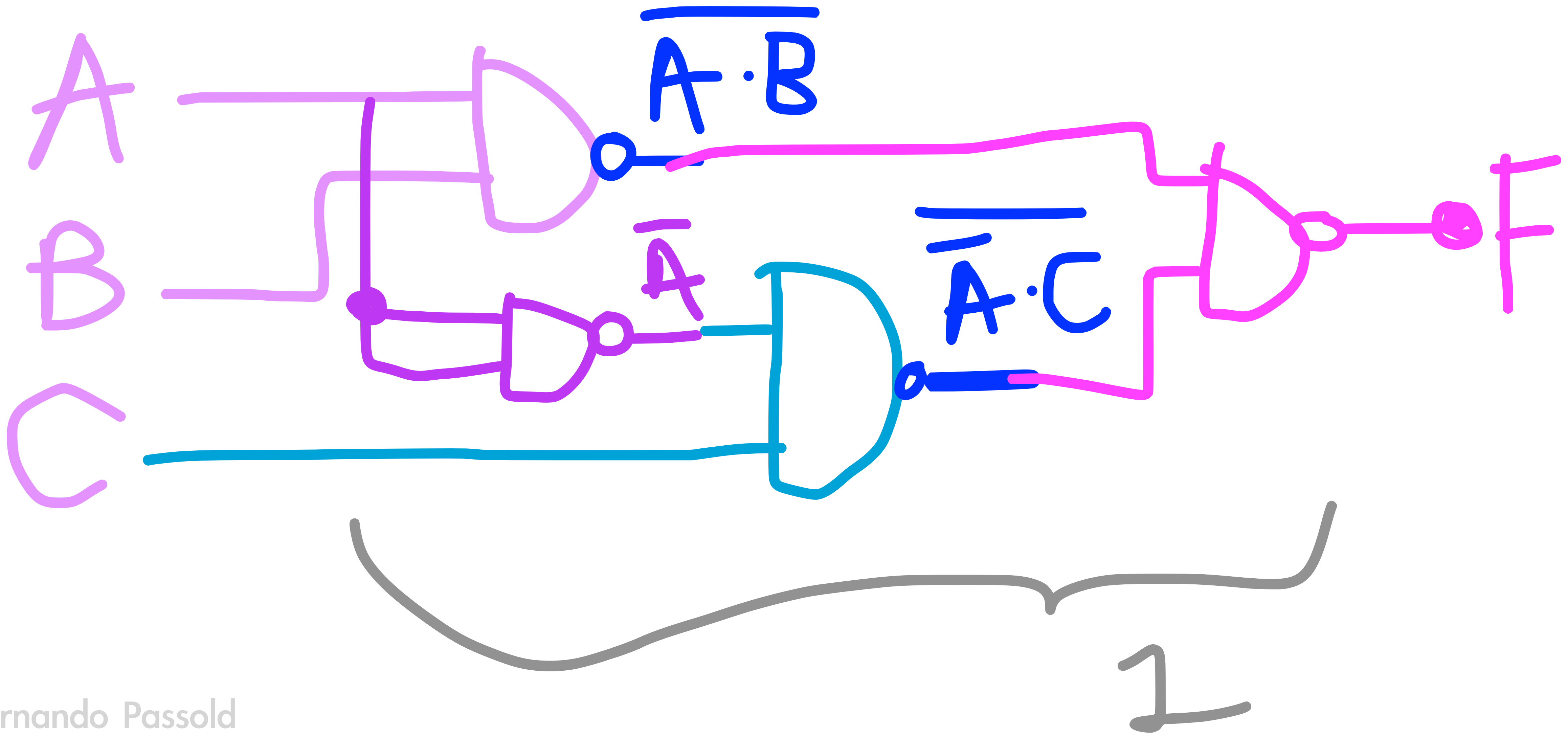
(Custo de) Síntese de Circuitos

- Comprove usando álgebra de Boole que o circuito abaixo pode ser realizado usando-se apenas 01 (um) CI 74LS00 (4 x NAND(2)):



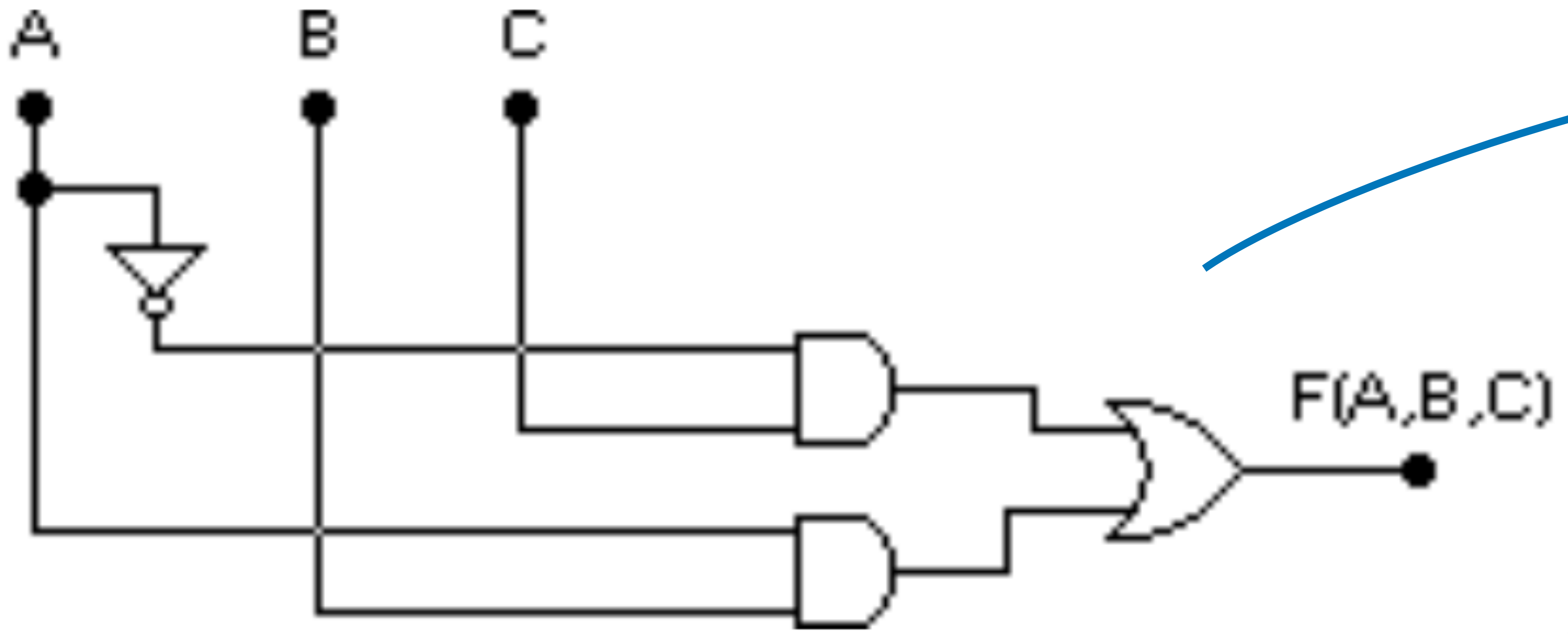
$$F = \overline{\overline{\overline{A} \cdot C + A \cdot B}}$$

$$F = \overline{\overline{A} C} \cdot \overline{A \cdot B}$$

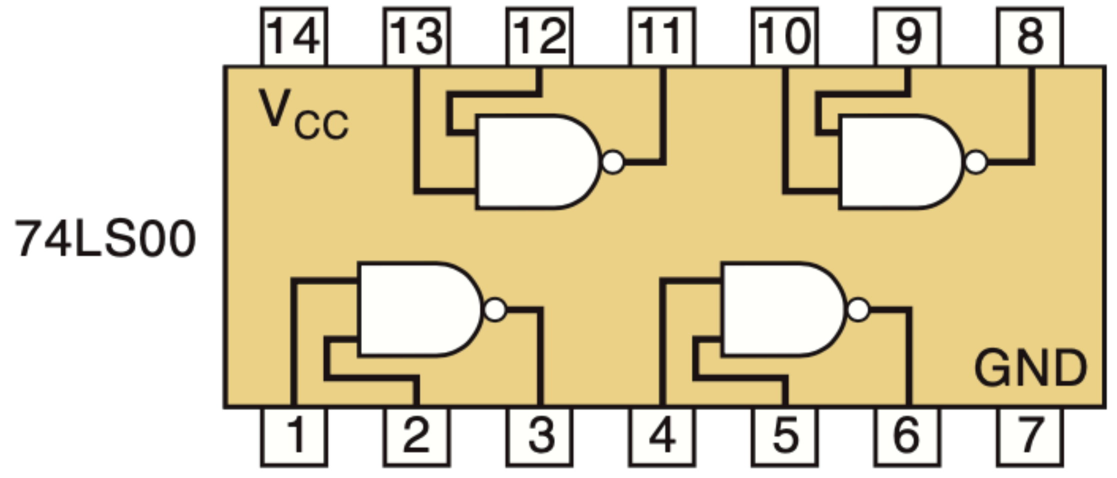


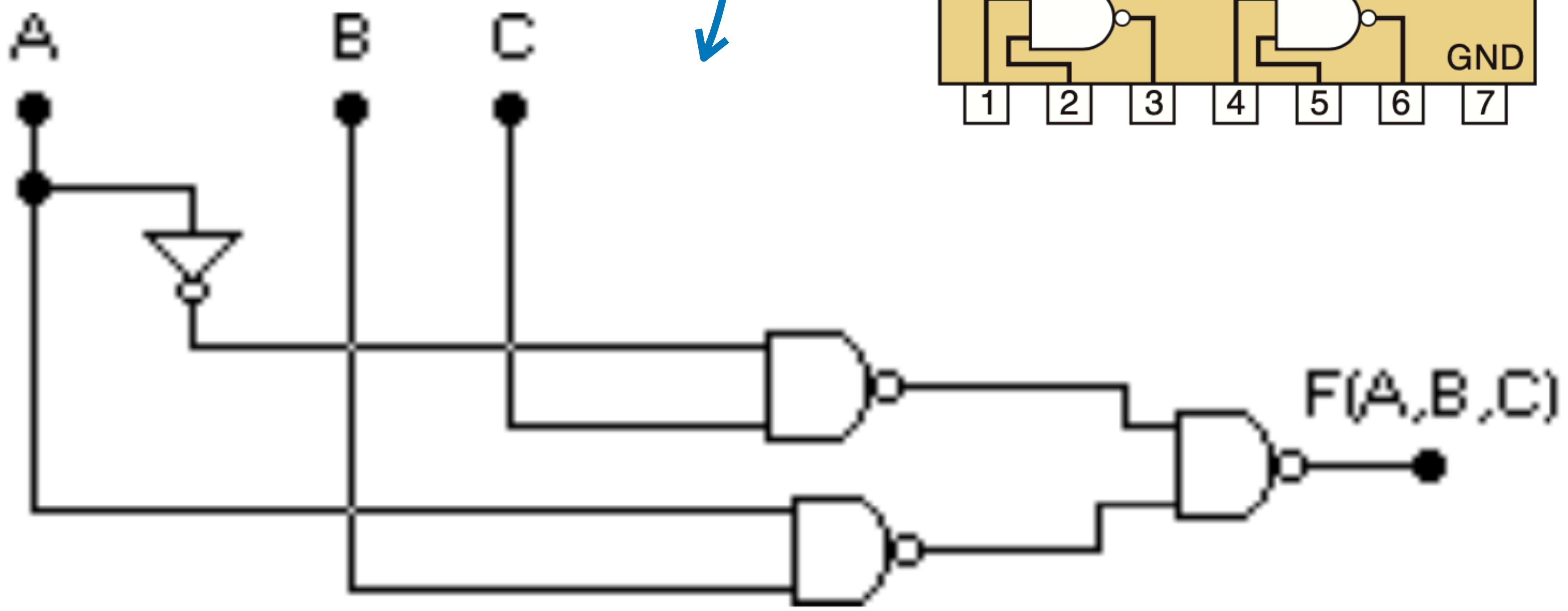
(Custo de) Síntese de Circuitos

- Comprove usando álgebra de Boole que o circuito abaixo pode ser realizado usando-se apenas 01 (um) CI 74LS00 (4 x NAND(2)):



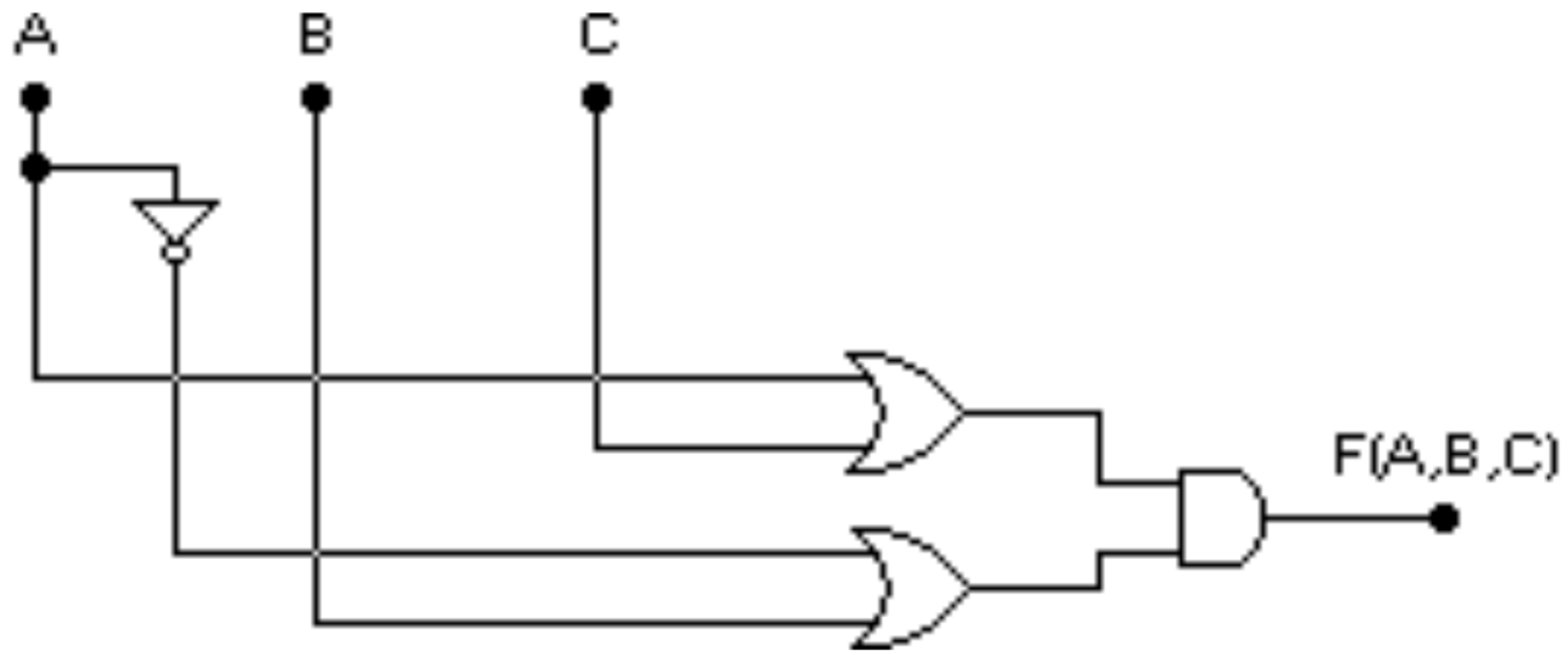
Solução:





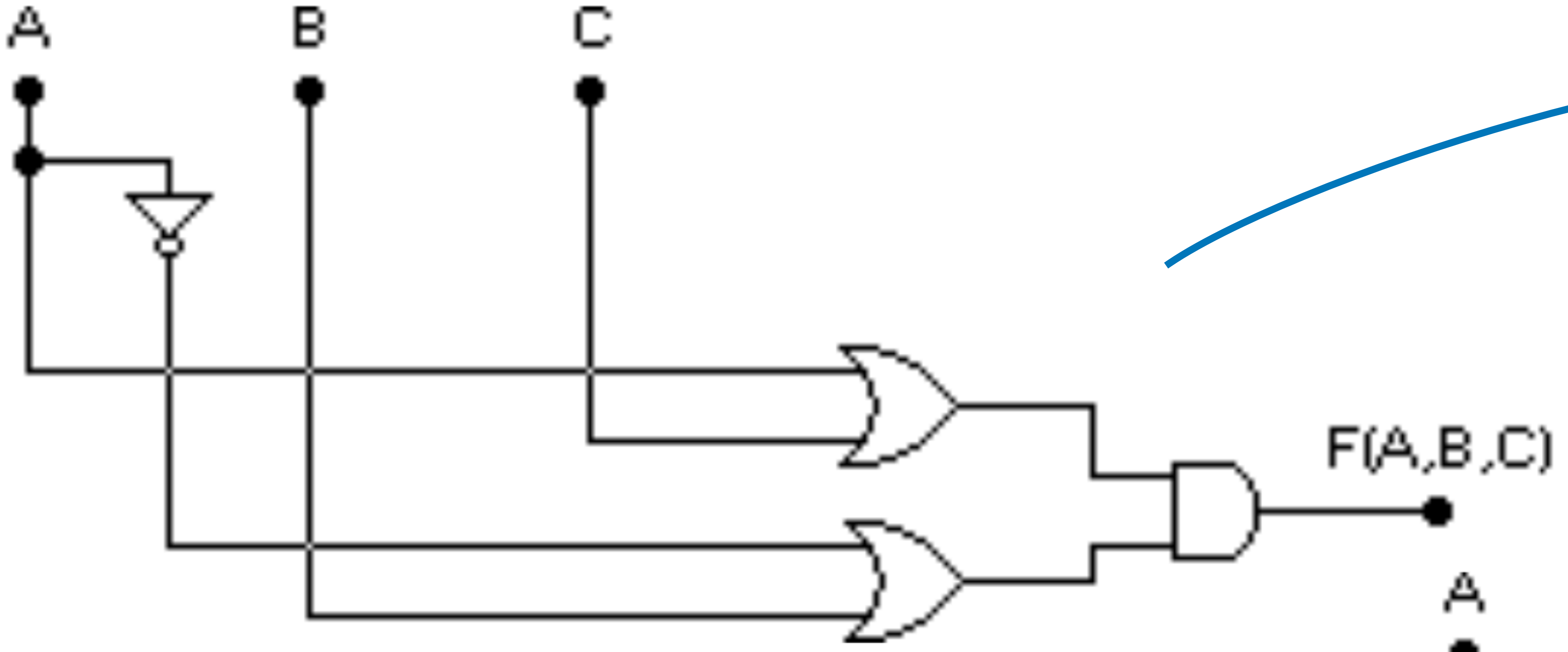
(Custo de) Síntese de Circuitos

- Comprove usando álgebra de Boole que o circuito abaixo pode ser realizado usando-se apenas 01 (um) CI 74LS02 (4 x NOR(2)):

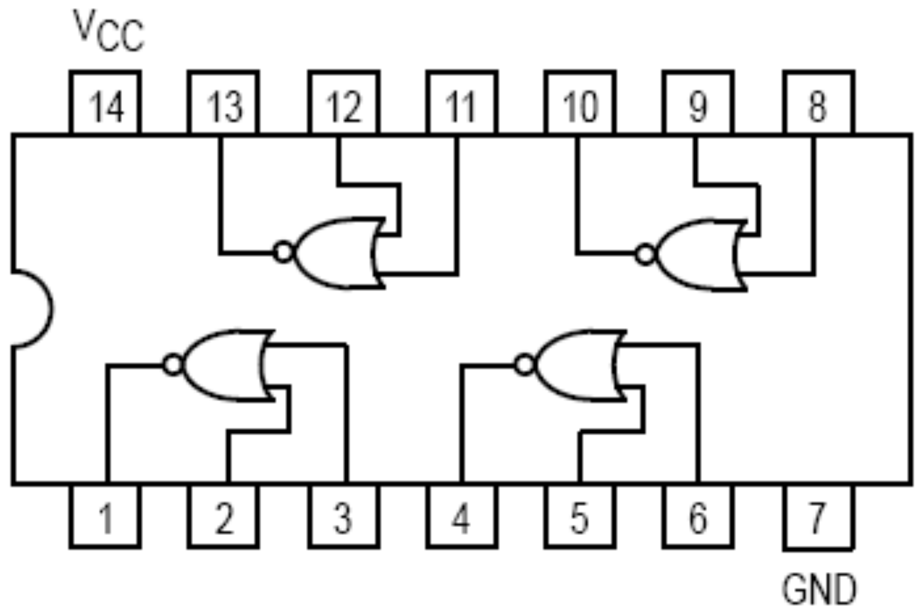


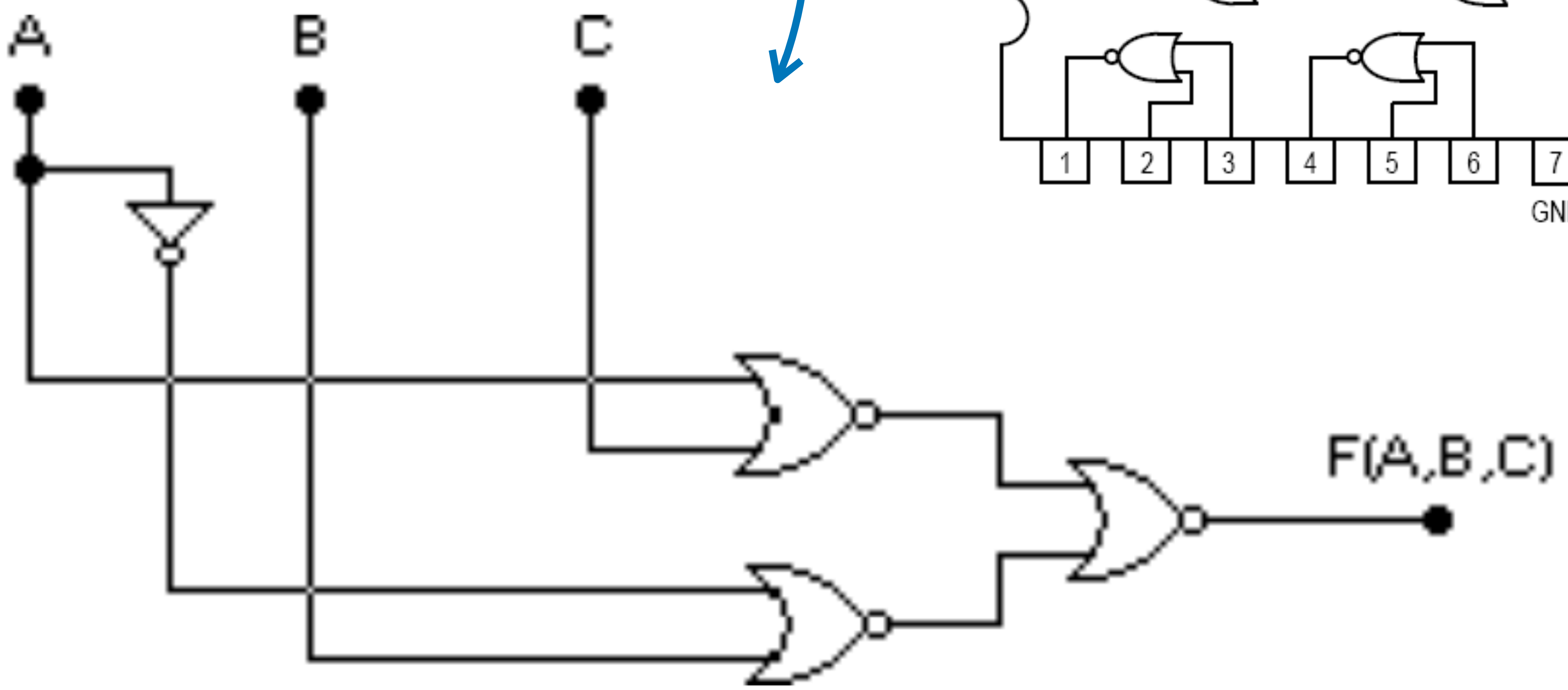
(Custo de) Síntese de Circuitos

- Comprove usando álgebra de Boole que o circuito abaixo pode ser realizado usando-se apenas 01 (um) CI 74LS02 (4 x NOR(2)):

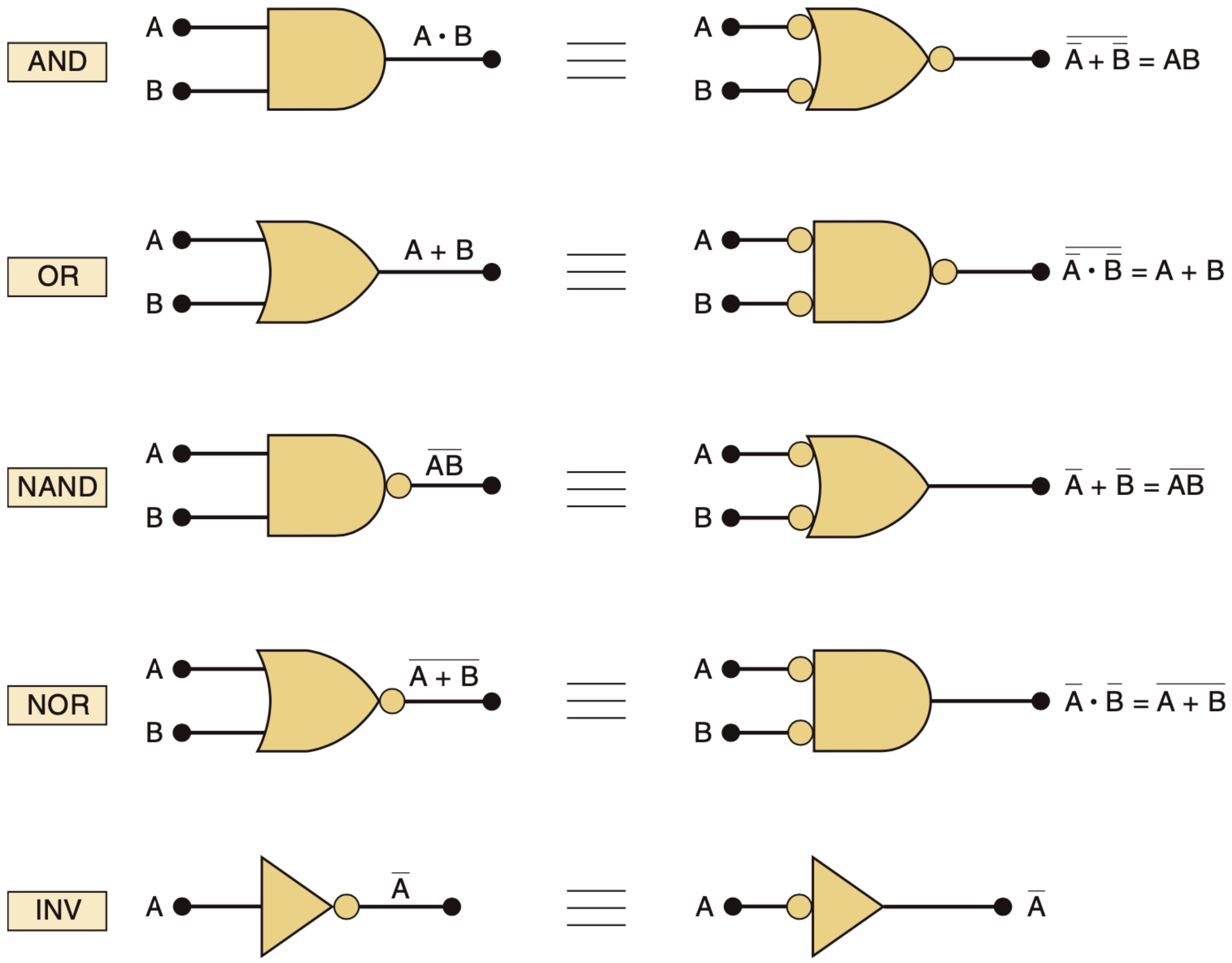


Solução:

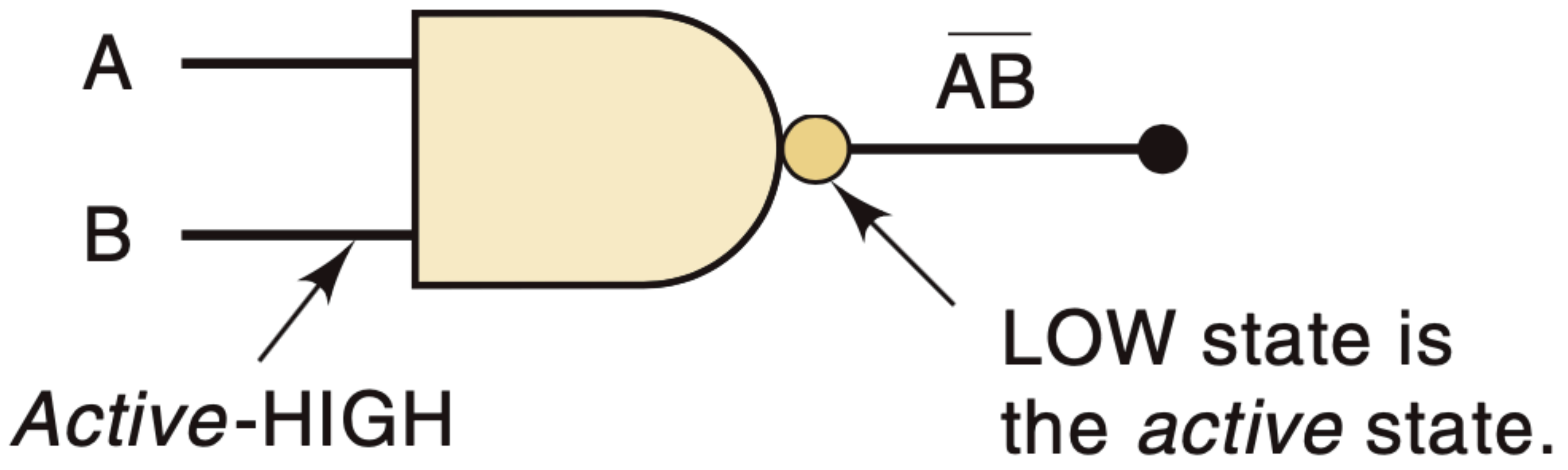




Símbolos Alternativos

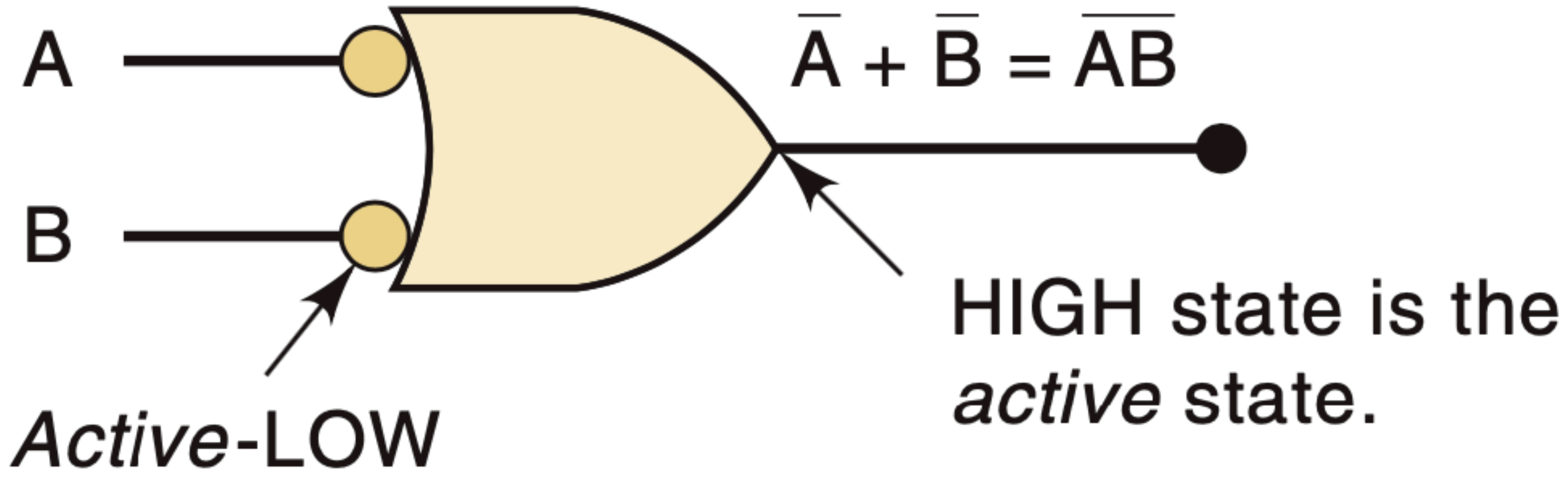


“Ativo ALTO” x “Ativo BAIXO”



NAND

Note: MESMA Porta

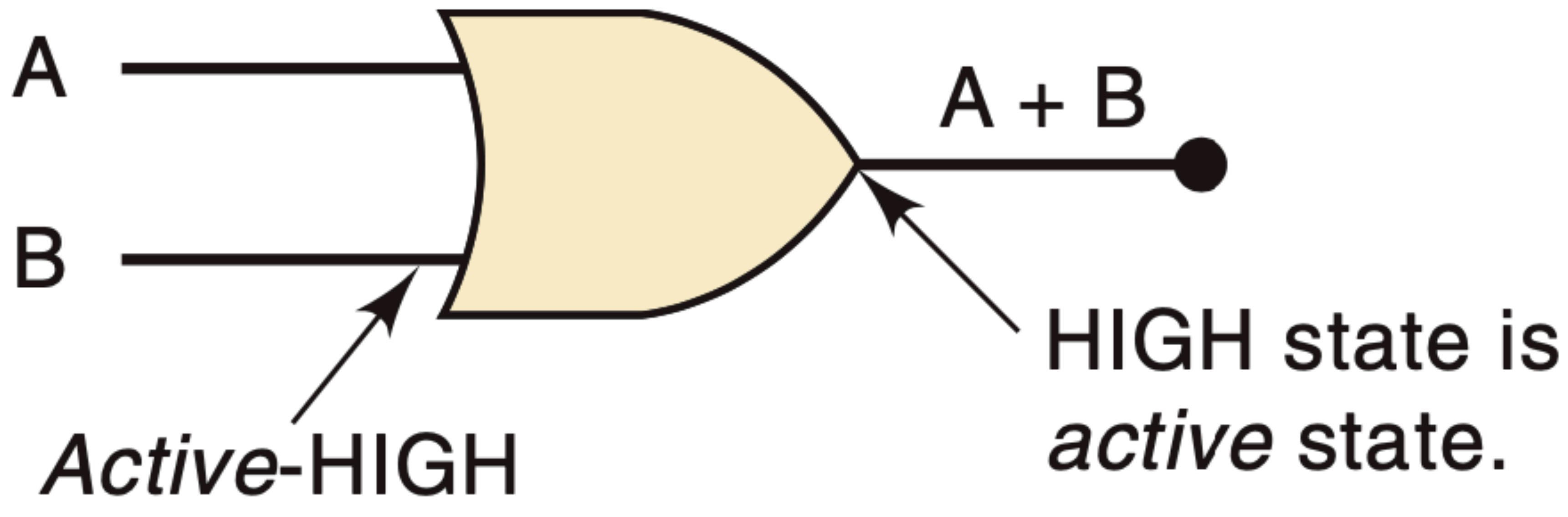


≡ NAND

Saída vai a nível lógico BAIXO apenas quando TODAS as entradas estiverem em nível lógico ALTO.

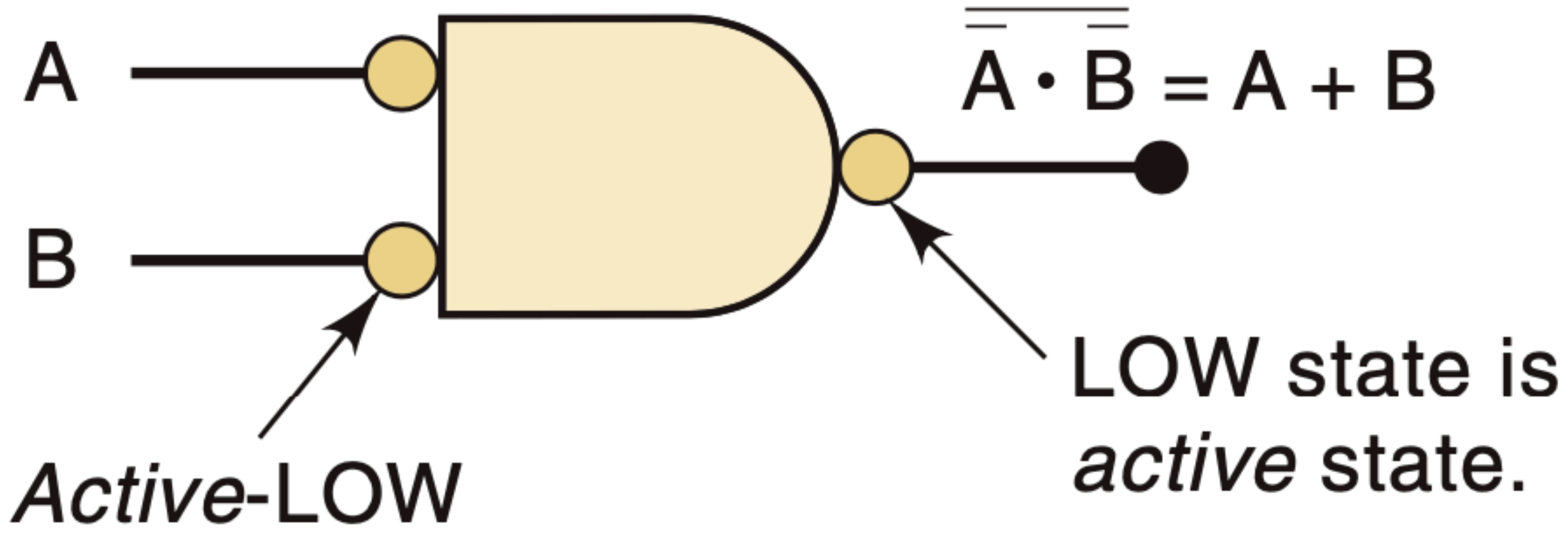
AB	AND	NAND
0 0	0	1
0 1	0	1
1 0	0	1
1 1	1	0

“Ativo ALTO” x “Ativo BAIXO”



OR

Note:
MESMA Porta



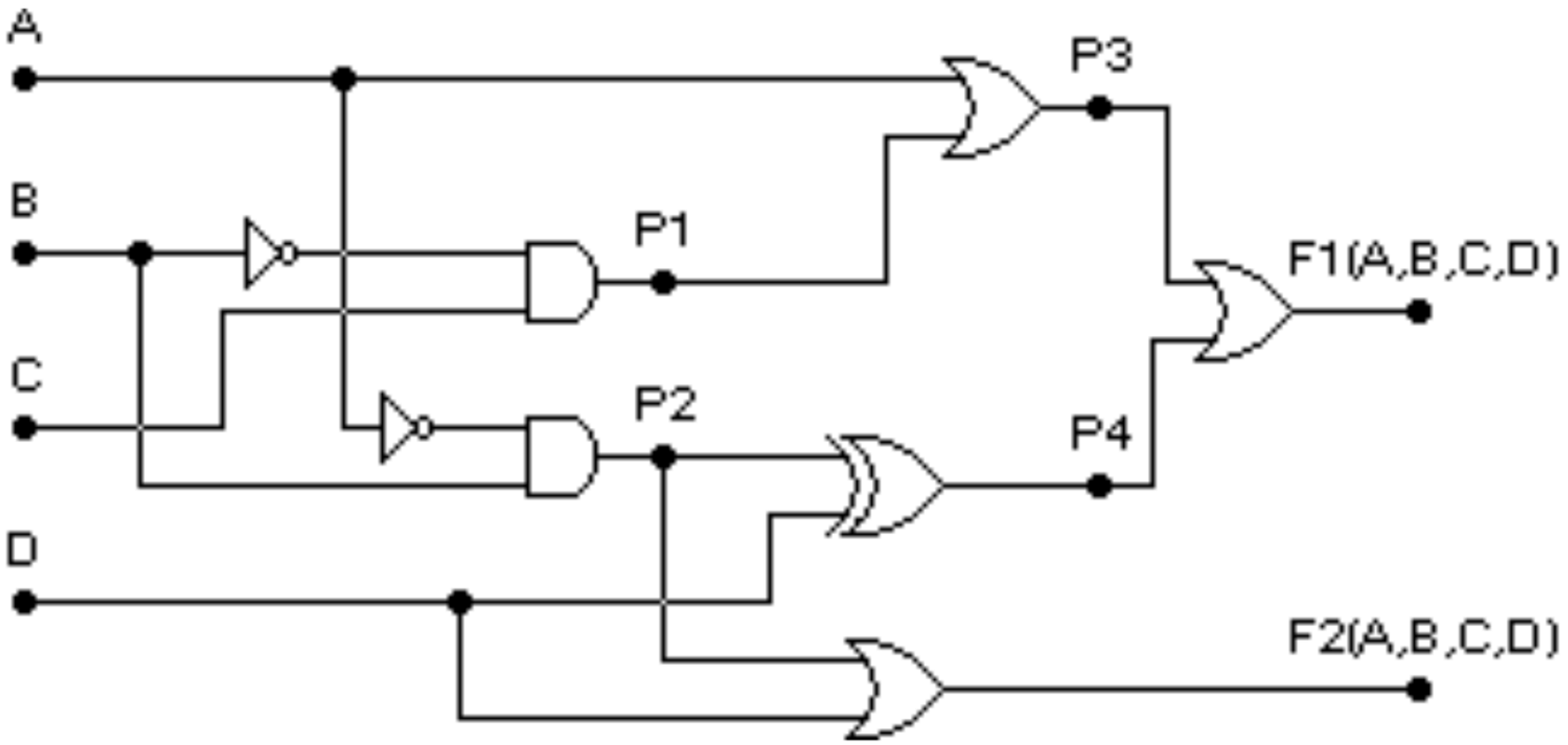
≡ **OR**

Saída vai a nível lógico ALTO apenas quando QUALQUER entradas estiver em nível lógico ALTO.

AB	OR
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

Análise de Circuitos

- Deduza as expressões (e/ou tabela verdade para F1 e F2):



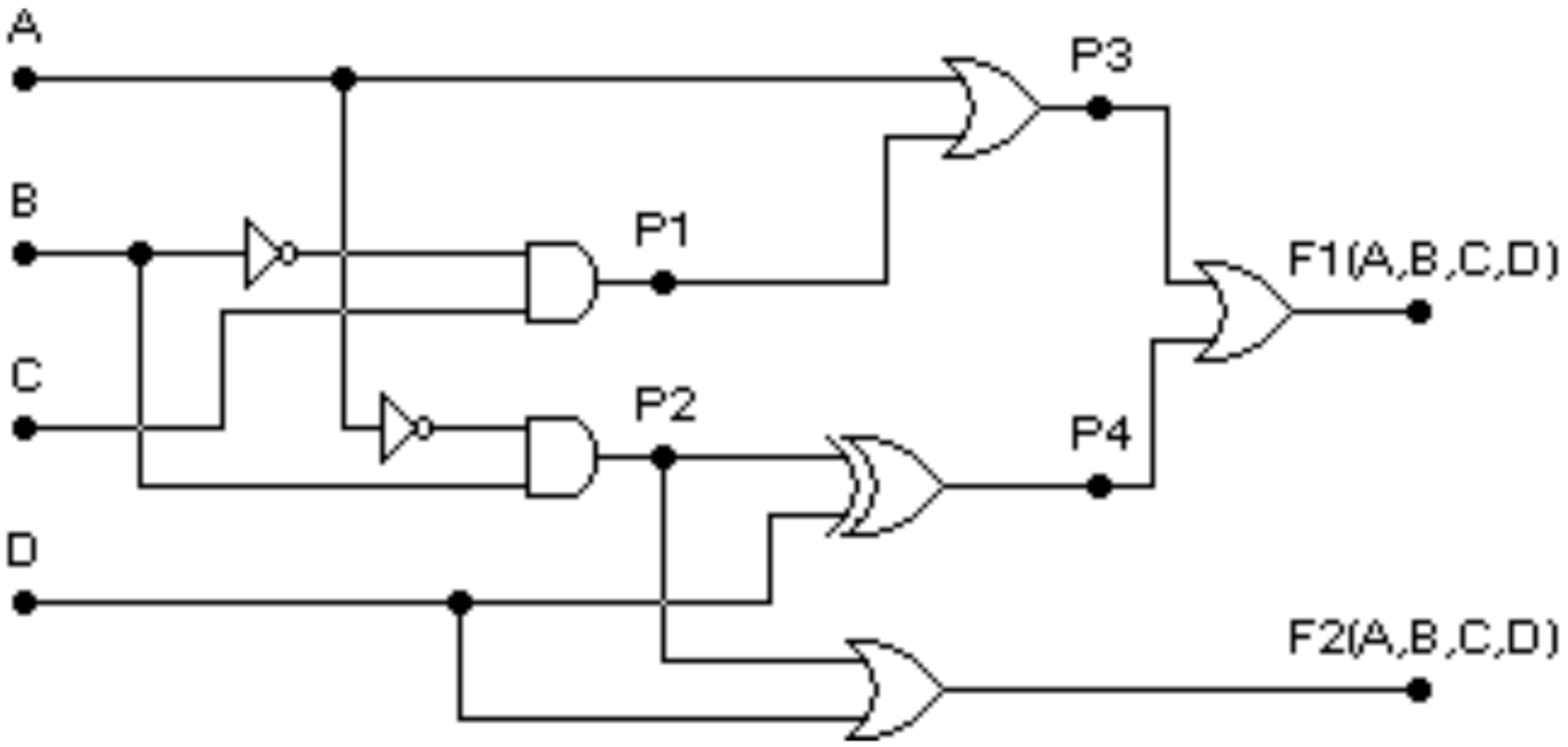
Solução:

$$F1 = A + B\overline{D} + \overline{B}\,C + \overline{B}\,D$$

$$F2 = \overline{A}\,B + D$$

Análise de Circuitos

- Deduza as expressões (e/ou tabela verdade para F1 e F2):

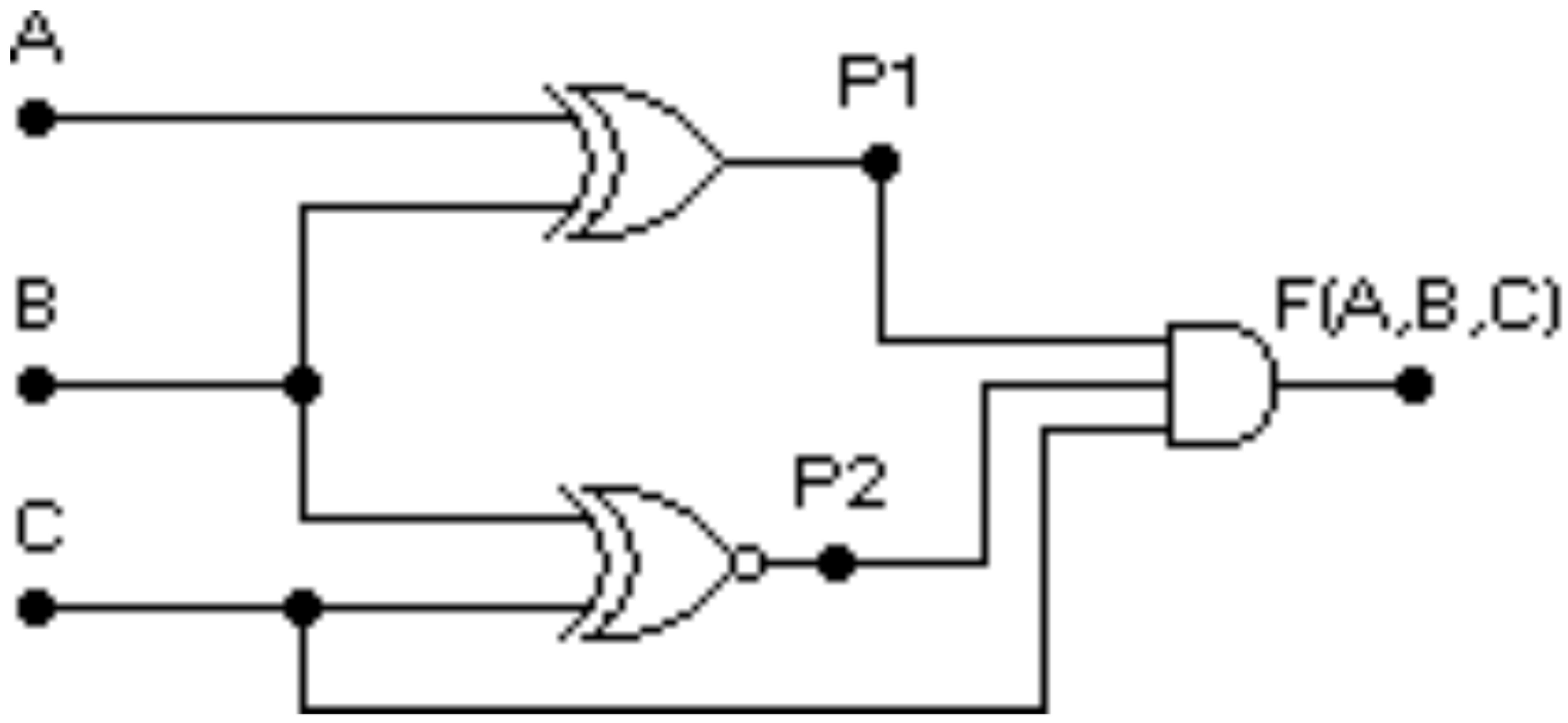


Solução:

$$P1 = \overline{B}\,C$$
$$P2 = \overline{A}\,B$$
$$P3 = A + P1 = A + \overline{B}\,C$$
$$P4 = P2 \oplus D = P2\,\overline{D} + \overline{P2}\,D$$
$$P4 = \overline{A}\,B\,\overline{D} + (\overline{\overline{A}\,B})\,D$$
$$P4 = \overline{A}\,B\,\overline{D} + (\overline{\overline{A}} + \overline{B})\,D$$
$$P4 = \overline{A}\,B\,\overline{D} + AD + \overline{B}\,D$$
$$F1 = P3 + P4$$
$$F1 = A + \overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,\overline{D} + AD + \overline{B}\,D$$
$$F1 = A(1 + D) + \overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,\overline{D} + \overline{B}\,D$$
$$F1 = A + \overline{A}\,B\,\overline{D} + \overline{B}\,C + \overline{B}\,D$$
$$F1 = A + B\overline{D} + \overline{B}\,C + \overline{B}\,D$$
$$F2 = P2 + D = \overline{A}\,B + D$$

Análise de Circuitos

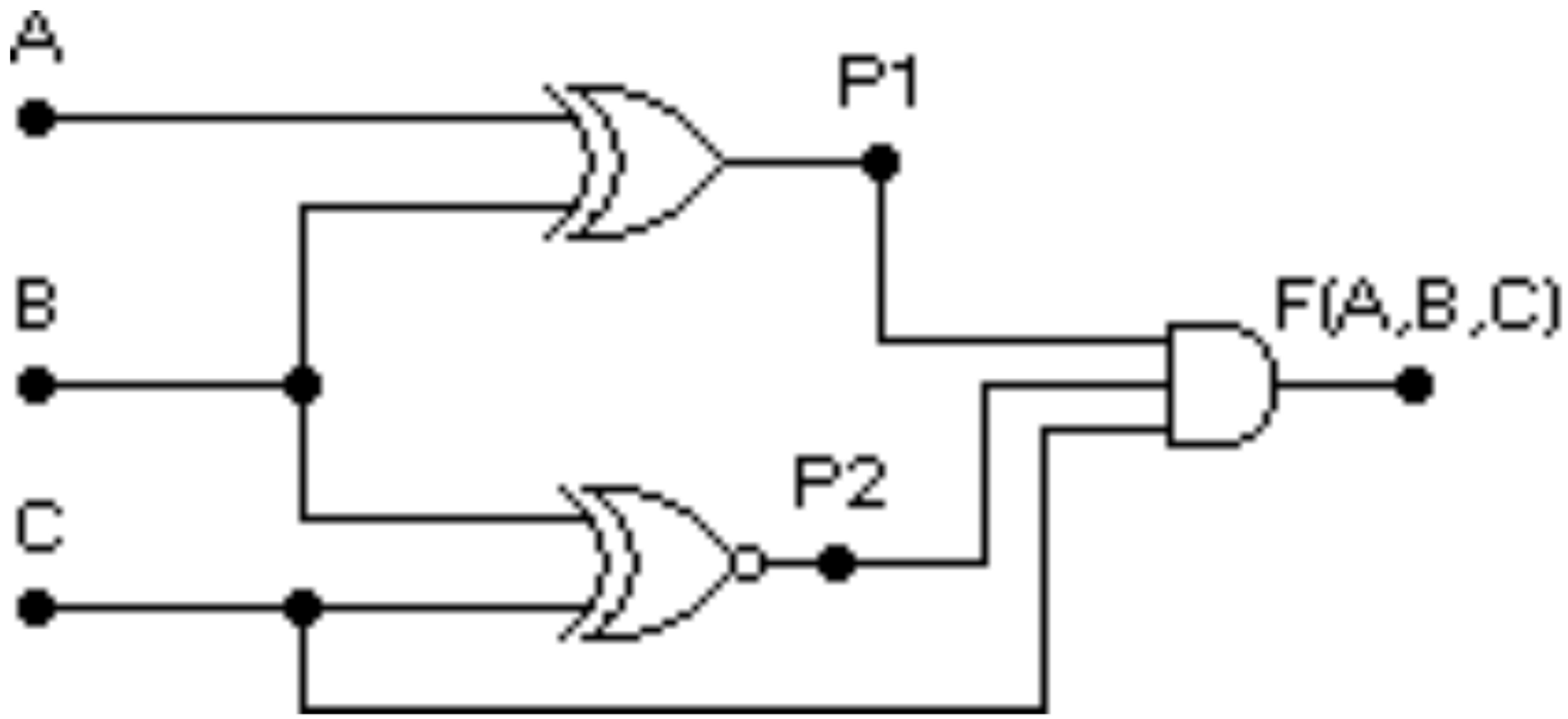
- Levante a tabela verdade de F:



Ref	A B C	P1	P2	F
0	0 0 0			
1	0 0 1			
2	0 1 0			
3	0 1 1			
4	1 0 0			
5	1 0 1			
6	1 1 0			
7	1 1 1			

Análise de Circuitos

- Levante a tabela verdade de F:

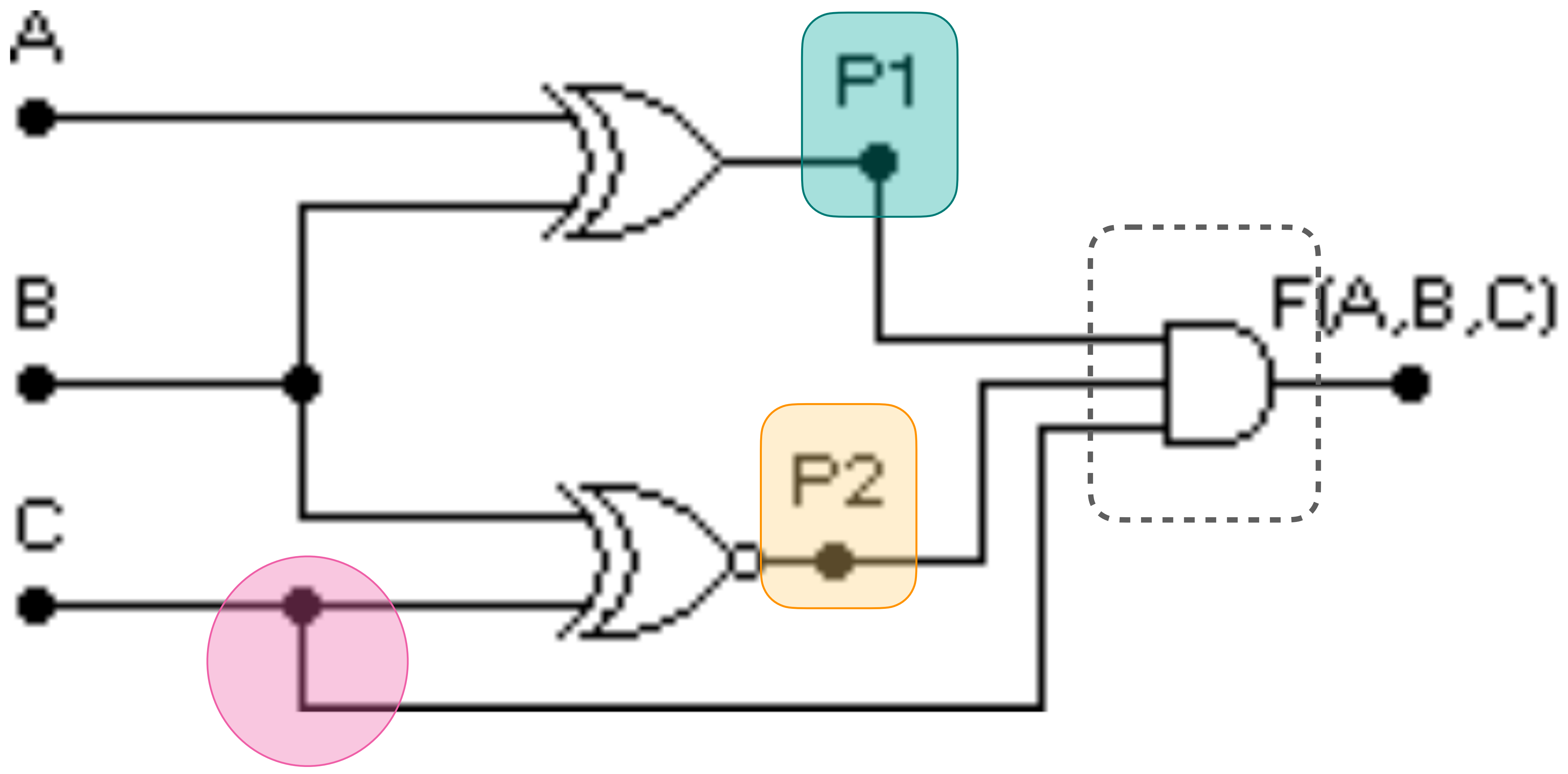


Solução:

Ref	A B C	P1	P2	F
0	0 0 0	0	1	0
1	0 0 1	0	0	0
2	0 1 0	1	0	0
3	0 1 1	1	1	1
4	1 0 0	1	1	0
5	1 0 1	1	0	0
6	1 1 0	0	0	0
7	1 1 1	0	1	0

Análise de Circuitos

- Levante a tabela verdade de F:



$c \cdot 0 = 0$

$c \cdot 1 = c$

Solução:

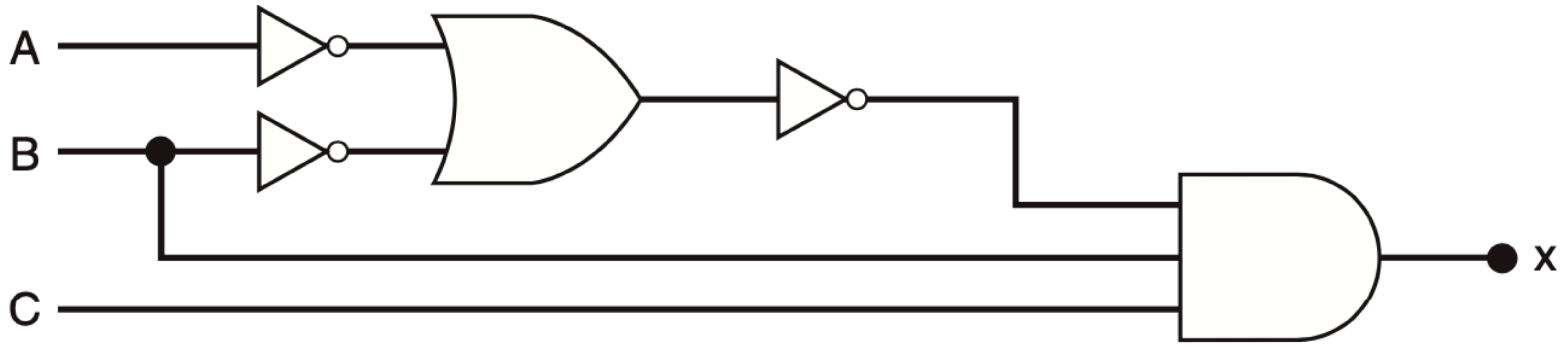
Ref	A B C	P1	P2	F
0	0 0 0	0	1	0
1	0 0 1	0	0	0
2	0 1 0	1	0	0
3	0 1 1	1	1	1
4	1 0 0	1	1	0
5	1 0 1	1	0	0
6	1 1 0	0	0	0
7	1 1 1	0	1	0

P1: porta XOR: Detector de Desigualdade (A,B)

P2: porta NXOR: Igualdades (B,C)

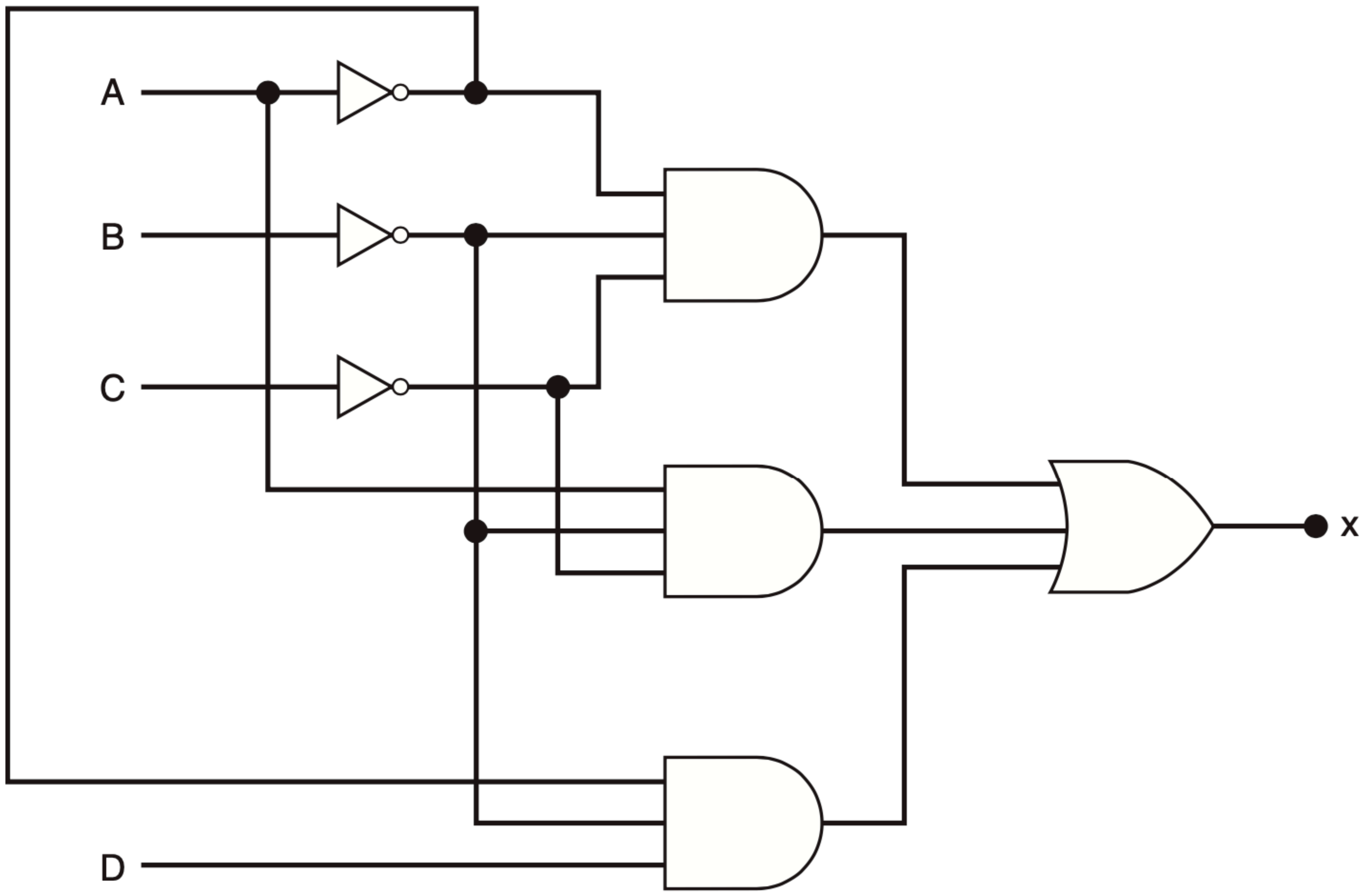
Análise de Circuitos

- Escreva a equação para x e levante a tabela verdade do circuito abaixo



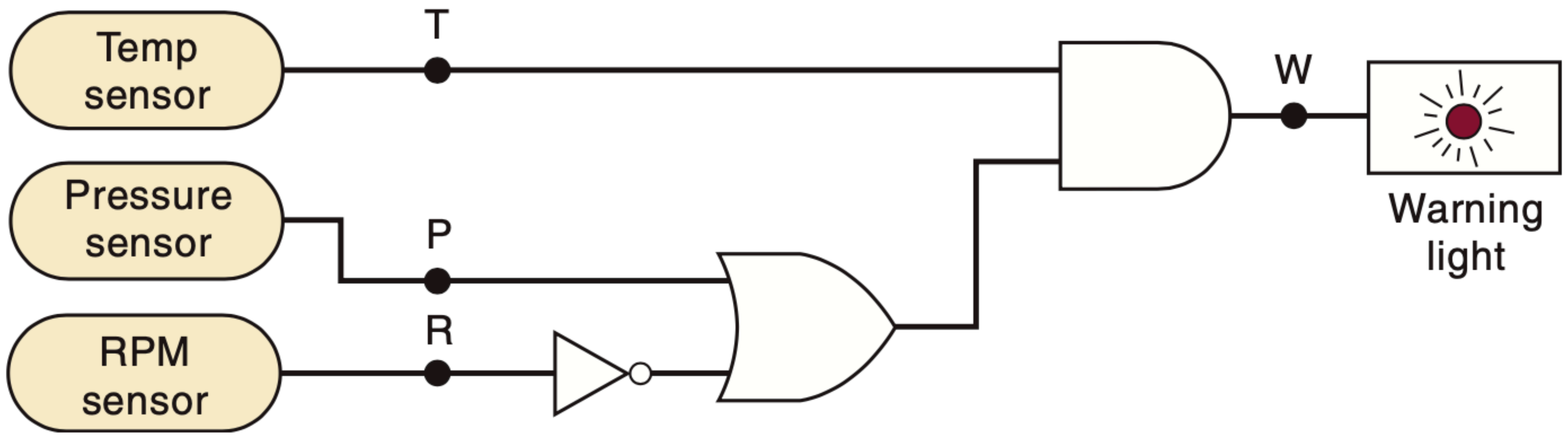
Análise de Circuitos

- Escreva a equação para x e levante a tabela verdade do circuito abaixo



Análise de Circuitos

- Identifique sob que condições a lâmpada de advertência mostrada no circuito abaixo é ativada?



- Note que este circuito faz parte do sistema de monitoramento do motor de um avião, usando sensores que operam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Sensor R} &= 0 \quad \text{apenas quando Velocidade} < 4800 \text{ RPM} \\ \text{Sensor P} &= 0 \quad \text{apenas quando Pressão} < 220 \text{ psi} \\ \text{Sensor T} &= 0 \quad \text{apenas quando Temperatura} < 200^o\text{F} \end{aligned}$$