PD Digital + Filtro Passa-Baixas

Prof. Fernando Passold
Curso de Engenharia Elétrica
Universidade de Passo Fundo

23 de outubro de 2023

# 1 Deduzindo ação: P + D

Seja o controlador mostrado na figura 1 à seguir.

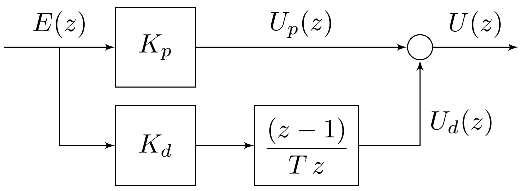


Figura 1: Diagrama em blocos do controlador com ação Proporcional + Derivativa (pura).

As equações relacionados com a figura 1 são:

Controle Proporcional:

$$U_p(z) = K_p\, E(z)$$

Controle Derivativo Puro:

$$U_d(z) = \frac{K_d\ (z-1)}{T\,z}\, E(z)$$

Determinando o paralelismo dos blocos P + D, resulta em:

$$C_{PD}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} \cdot \left[ K_p + \frac{K_d\ (z-1)}{T\,z} \right]$$

manipulando a expressão anterior resulta em:

$$\begin{aligned}
C_{\text{PD}}(z) &= \frac{K_p\,T\,z + K_d\,(z-1)}{T\,z} \\
&= \frac{(K_p\,T + K_d)\,z - K_d}{T\,z} \cdot \frac{\div(K_p\,T + K_d)}{\div(K_p\,T + K_d)} \\
&= \frac{z - \dfrac{K_d}{(K_d + T\,K_p)}}{\dfrac{T}{(K_p\,T + K_d)} \cdot z} \\
&= \left( \frac{K_d + T\,K_p}{T} \right) \cdot \left\{ \frac{z - \left[ \dfrac{K_d}{(K_d + T\,K_p)} \right]}{z} \right\} \\
&= \left( K_p + \frac{K_d}{T} \right) \cdot \left\{ \frac{z - \left[ \dfrac{K_d}{(K_d + T\,K_p)} \right]}{z} \right\}
\end{aligned}$$

onde: $\left(K_p + \dfrac{K_d}{T}\right)$ corresponde a um "ganho", ou simplesmente $K = \left(K_p + \dfrac{K_d}{T}\right)$;

existe um zero em $z = \left[\dfrac{K_d}{(K_d + T \cdot K_p)}\right]$ ou $z = \dfrac{K_d/T}{K_d/T + K_p} = \dfrac{K_d/T}{K}$; e,

existe um pólo em $z = 0$ (na origem).

Assim ao final obtemos:

$$C_{\text{PD}}(z) = K \cdot \left[\frac{z - \left(\frac{K_d/T}{K}\right)}{z}\right]$$

## 2 PD + Filtro Passa-Baixas

Incluindo agora o Filtro passa-baixas exponencial de $1^{\underline{a}}$-ordem, o sistema fica igual ao mostrado na figura 2.

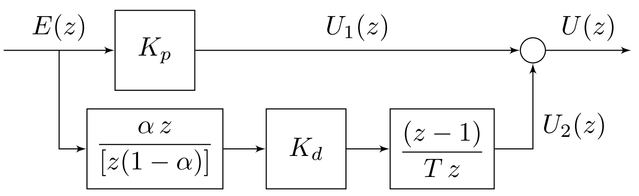


Figura 2: Diagrama em blocos do controlador com ação Proporcional + Derivativa (filtrada).

A equação do filtro é dada por:

$$Y(z) = \frac{\alpha z}{[z - (1-\alpha)]} \cdot X(z)$$

onde: $Y(z)$ corresponde à saída do filtro, $\alpha$ é um parâmetro do filtro relacionado com a frequência de corte do mesmo (tipicamente $\alpha = 0,1$) e $X(z)$ corresponde ao sinal de entrada que no caso é o próprio sinal do erro ou $E(z)$.

Note que a ação proporcional age diretamente sobre o sinal do erro, enquanto que a ação derivativa pura age sobre o sinal filtrado erro. Podemos considerar $U_1(z)$ como o primeiro sinal, que depende apenas da ação proporcional, então:

$$U_1(z) = K_p \cdot E(z)$$

enquanto que o segundo sinal $U_2(z)$ remete a uma ação derivativa do sinal de erro filtrado pelo filtro passa-baixas, ou:

$$\begin{aligned} U_2(z) &= \frac{\alpha\,(z-1)\,K_d \cdot E(z)}{T\,[z-(1-\alpha)]} \\ &= \left[\frac{\alpha\,K_d}{T}\right] \cdot \frac{(z-1)}{[z-(1-\alpha)]} \cdot E(z) \end{aligned}$$

note que esta expressão resulta em um "ganho" dado pelo termo $\left[\dfrac{\alpha\,K_d}{T}\right]$, um zero em $z = 1$ e um pólo em $z = (1-\alpha)$.

Paralelizando o bloco da ação Proporcional com a ação Derivativa filtrada, teremos:

$$
\begin{aligned}
C_{\text{PD+FPB}} &= \frac{U(z)}{E(z)} \\
&= \left\{ K_p + \left[ \frac{\alpha\, K_d}{T} \right] \cdot \frac{(z-1)}{[z-(1-\alpha)]} \right\} \\
&= \frac{K_p \left\{ T\,[z-(1-\alpha)] \right\} + (\alpha\, K_d)(z-1)}{T\,[z-(1-\alpha)]} \\
&= \frac{(K_p\, T + K_d\, \alpha)\, z - [K_p\, T\,(1-\alpha) + K_d\, \alpha]}{T\,[z-(1-\alpha)]} \cdot \frac{\div\,(K_p\, T + K_d\, \alpha)}{\div\,(K_p\, T + K_d\, \alpha)} \\
&= \frac{z - \left[ \dfrac{K_p\, T\,(1-\alpha) + K_d\, \alpha}{K_p\, T + K_d\, \alpha} \right]}{\left( \dfrac{T}{K_p\, T + K_d\, \alpha} \right) \cdot [z-(1-\alpha)]} \\
&= \left( \frac{K_p\, T + K_d\, \alpha}{T} \right) \cdot \left\{ \frac{z - \left[ \dfrac{K_p\, T\,(1-\alpha) + K_d\, \alpha}{K_p\, T + K_d\, \alpha} \right]}{[z-(1-\alpha)]} \right\}
\end{aligned}
$$

ou simplesmente: um "ganho" $K$ dado por $K = \left( \dfrac{K_p\, T + \alpha\, K_d}{T} \right) = K_p + \dfrac{\alpha\, K_d}{T}$;

um zero em $z = \left[ \dfrac{K_p\, T\,(1-\alpha) + K_d\, \alpha}{K_p\, T + K_d\, \alpha} \right]$; ou $z = \left[ \dfrac{K_p(1-\alpha) + \dfrac{\alpha\, K_d}{T}}{K} \right]$

e um pólo em $z = (1-\alpha)$.

A expressão para o zero pode ser remanejada como:

$$
\begin{aligned}
z &= \left[ \frac{K_p\, T\,(1-\alpha) + K_d\, \alpha}{K_p\, T + K_d\, \alpha} \right] = \frac{K_p\, T - \alpha\, K_p\, T + \alpha\, K_d}{K_p\, T + \alpha\, K_d} \\
&= \frac{T \left( K_p - \alpha\, K_p + \dfrac{\alpha\, K_d}{T} \right)}{K_p\, T + \alpha\, K_d} \\
&= \frac{T \left[ K_p(1-\alpha) + \dfrac{\alpha\, K_d}{T} \right]}{K_p\, T + \alpha\, K_d} \\
z &= \frac{K_p(1-\alpha) + \alpha\, (K_d/T)}{K}
\end{aligned}
$$

Assim, ao final, o PD incluindo o filtro passa-baixas resulta em:

$$
C_{\text{PD+FPB}}(z) = \underbrace{\left( K_p + \frac{\alpha\, K_d}{T} \right)}_{K} \cdot \left\{ \frac{z - \left[ \dfrac{K_p(1-\alpha) + \alpha\, (K_d/T)}{K} \right]}{z - (1-\alpha)} \right\}
$$

onde:
seu "ganho" $K$ é dado por: $K = \left( K_p + \dfrac{\alpha\, K_d}{T} \right)$;

seu zero fica localizado em: $z = \left[ \dfrac{K_p\, T\,(1-\alpha) + K_d\, \alpha}{K_p\, T + K_d\, \alpha} \right]$ ou $z = \left[ \dfrac{K_p(1-\alpha) + \alpha\, (K_d/T)}{K} \right]$;

e seu pólo em: $z = (1-\alpha)$.

# 3 Resumo

A tabela 1 e a figura 3 compara as equações dos controladores com ação Derivativa.

**Derivativo Puro (D):**

$$C(z) = K \cdot \left[ \frac{(z-1)}{z} \right]$$

onde:
$K = \frac{K_d}{T}$;
zero em: $z = 1$ (sobre o círculo unitário);
pólo em: $z = 0$ (na origem).

**Proporcional + Derivativo (PD):**

$$C(z) = K \cdot \left[ \frac{(z-zero)}{z} \right]$$

onde:
$K = \left( K_p + \frac{K_d}{T} \right)$;
*zero* em: $\frac{K_d/T}{K}$;
pólo em: $z = 0$ (na origem).

**PD + Filtro Passa-Baixas (PD+FPB):**

$$C(z) = K \cdot \left[ \frac{(z-zero)}{(z-pólo)} \right]$$

onde:
$K = \left( K_p + \frac{\alpha K_d}{T} \right)$;
*zero* em: $z = \left[ \frac{K_p(1-\alpha) + \alpha \, (K_d/T)}{K} \right]$;
*pólo* em $z = (1-\alpha)$.

Tabela 1: Tabela resumo dos comparadores com ação Derivativa.

Note que a equação do (**PD + Filtro Passa-Baixas**) se assemelha à um controlador por **Avanço de fase** (*Lead*).

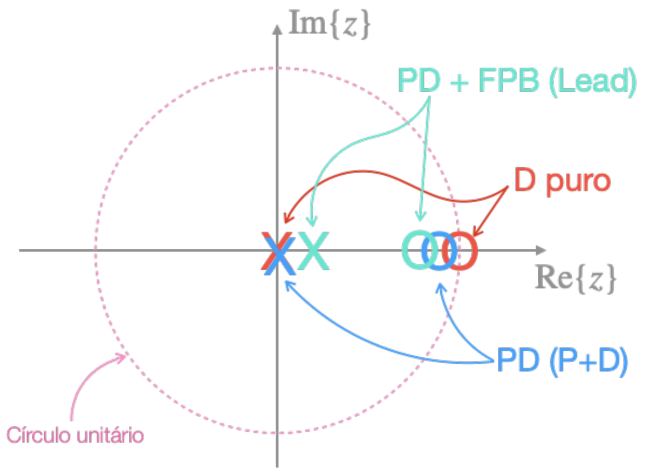


Figura 3: Posições dos zeros (o) e pólos (x) no plano-z para diferentes ações derivativas.

*Texto atualizado em 14.05.2019*