



Transformada Z Inversa

Parte 3/3

Prof. Fernando Passold

a) Método da Inversão por **Divisão Longa**

- Expansão em série de potências.
- Uma série de potências de Z (amostras do sinal a cada instante de amostragem) pode ser obtido pela simples divisão contínua da função Z , do polinômio do seu numerador pelo polinômio do denominador.

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad N(z) \left| \frac{D(z)}{\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}} \right.$$

- Exemplo: Calcule os primeiros termos da sequência correspondente à transformação:

$$Y(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}$$

$$\begin{array}{r} z^3 - 2z^2 + 2z \quad \left| \quad z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \right. \\ -z^3 + 3z^2 - 3z + 1 \quad \quad \quad 1 \\ \hline 1z^2 - 1z + 1 \end{array}$$

a) Método da Inversão por **Divisão Longa**

- Expansão em série de potências.
- Uma série de potências de Z (amostras do sinal a cada instante de amostragem) pode ser obtido pela simples divisão contínua da função Z, do polinômio do seu numerador pelo polinômio do denominador.

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad N(z) \left| \frac{D(z)}{\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}} \right.$$

- Exemplo: Calcule os primeiros termos da sequencia correspondente à transformação:

$$Y(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}$$

$$\begin{array}{r} z^3 - 2z^2 + 2z \quad \left| \quad z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \right. \\ \underline{-z^3 + 3z^2 - 3z + 1} \quad \quad 1 + 1z^{-1} \\ \quad 1z^2 - 1z + 1 \\ \quad \underline{-1z^2 + 3z - 3 + 1z^{-1}} \\ \quad \quad 2z - 2 + 1z^{-1} \end{array}$$

a) Método da Inversão por **Divisão Longa**

- Expansão em série de potências.
- Uma série de potências de Z (amostras do sinal a cada instante de amostragem) pode ser obtido pela simples divisão contínua da função Z , do polinômio do seu numerador pelo polinômio do denominador.

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad N(z) \left| \frac{D(z)}{\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}} \right.$$

- Exemplo: Calcule os primeiros termos da sequência correspondente à transformação:

$$Y(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}$$

$$\begin{array}{r}
 z^3 - 2z^2 + 2z \quad \left| \quad z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \right. \\
 \hline
 -z^3 + 3z^2 - 3z + 1 \quad 1 + 1z^{-1} + 2z^{-2} \\
 \hline
 1z^2 - 1z + 1 \\
 -1z^2 + 3z - 3 + 1z^{-1} \\
 \hline
 2z - 2 + 1z^{-1} \\
 -2z + 6 - 6z^{-1} + 2z^{-2} \\
 \hline
 4 - 5z^{-1} + 2z^{-2}
 \end{array}$$

a) Método da Inversão por **Divisão Longa**

- Expansão em série de potências.
- Uma série de potências de Z (amostras do sinal a cada instante de amostragem) pode ser obtido pela simples divisão contínua da função Z, do polinômio do seu numerador pelo polinômio do denominador.

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad N(z) \left| \frac{D(z)}{\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}} \right.$$

- Exemplo: Calcule os primeiros termos da sequencia correspondente à transformação:

$$Y(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}$$

$$\begin{array}{r}
 z^3 - 2z^2 + 2z \qquad \left| \begin{array}{l} z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \\ \hline 1 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3} + \dots \end{array} \right. \\
 -z^3 + 3z^2 - 3z + 1 \\
 \hline
 1z^2 - 1z + 1 \\
 -1z^2 + 3z - 3 + 1z^{-1} \\
 \hline
 2z - 2 + 1z^{-1} \\
 -2z + 6 - 6z^{-1} + 2z^{-2} \\
 \hline
 4 - 5z^{-1} + 2z^{-2}
 \end{array}$$

Assim:

$$Y(z) = 1 + z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3} + \dots$$

Lembrando da definição da transformada Z:

$$y(k) = \{1, 1, 2, 4, \dots\}$$

Exercício:

- Determine as primeiras 3 amostras de: $F(z) = \frac{0,5z}{(z-1)(z-0,5)}$
- Solução: $f(k) = \{0; 0,5; 0,75; 0,875; \dots\}$ e $f(\infty) = ?$

b) Método da Expansão em **Frações Parciais**

- Requer uso de tabelas de pares de transformadas Z: $\left[f(t) \xrightarrow{Z} F(z) \right]$

F(s)	f(t)	f(k)	F(z)	Obs
$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$u(k)$	$\frac{z}{z-1}$	Degrau Unitário
		a^k	$\frac{z}{z-a}$	
$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	Rampa
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	Exponencial
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t e^{at}$	$kT e^{-akT}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	Pólos Múltiplos
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	Exponencial Decrescente

b) Método da Expansão em **Frações Parciais**

- Requer uso de tabelas de pares de transformadas Z: $\left[f(t) \xrightarrow{Z} F(z) \right]$
- Exemplo_1) Aplicando este método com o exemplo anterior:

$$F(z) = \frac{0,5z}{(z-1)(z-0,5)}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{0,5}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0,5}$$

$$A = (z-1) \cdot F'(z)|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \frac{(z-1)0,5}{(z-1)(z-0,5)} \Big|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \frac{0,5}{1-0,5} = 1$$

$$B = (z-0,5) \cdot F'(z)|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \frac{(z-0,5)0,5}{(z-1)(z-0,5)} \Big|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \frac{0,5}{0,5-1} = -1$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0,5} \quad \therefore \quad F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5}$$

F(s)	f(t)	f(k)	F(z)	Obs
$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$u(k)$	$\frac{z}{z-1}$	Degrau Unitário
		a^k	$\frac{z}{z-a}$	
$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	Rampa
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	Exponencial
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t e^{at}$	$kT e^{-akT}$	$\frac{Tz e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	Pólos Múltiplos
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	Exponencial Decrescente

$$A = (z-1) \cdot F'(z)|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \frac{(z-1)0,5}{(z-1)(z-0,5)} \Big|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \frac{0,5}{1-0,5} = 1$$

$$B = (z-0,5) \cdot F'(z)|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \frac{(z-0,5)0,5}{(z-1)(z-0,5)} \Big|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \frac{0,5}{0,5-1} = -1$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0,5} \quad \therefore \quad F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5}$$

$$\therefore f(kT) = 1 \cdot 1^k - 1 \cdot 0,5^k = 1 - 0,5^k$$

b) Método da Expansão e

- Requer uso de tabelas de pares de transf
- Exemplo_1) Aplicando este método com

$$F(z) = \frac{0,5z}{(z-1)(z-0,5)}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{0,5}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0,5}$$

$$A = (z-1) \cdot F'(z)|_{z=1} \quad \therefore \quad A = \frac{(z-1)0,5}{(z-1)(z-0,5)} \Big|_{z=1} \quad \therefore$$

$$B = (z-0,5) \cdot F'(z)|_{z=0,5} \quad \therefore \quad B = \frac{(z-0,5)0,5}{(z-1)(z-0,5)} \Big|_{z=0,5} \quad \therefore$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0,5} \quad \therefore \quad F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5}$$

$$\therefore f(kT) = 1 \cdot 1^k - 1 \cdot 0,5^k = 1 - 0,5^k$$

Note que: $f(kT) = 1 - 0,5^k$

$$f(0) = 0$$

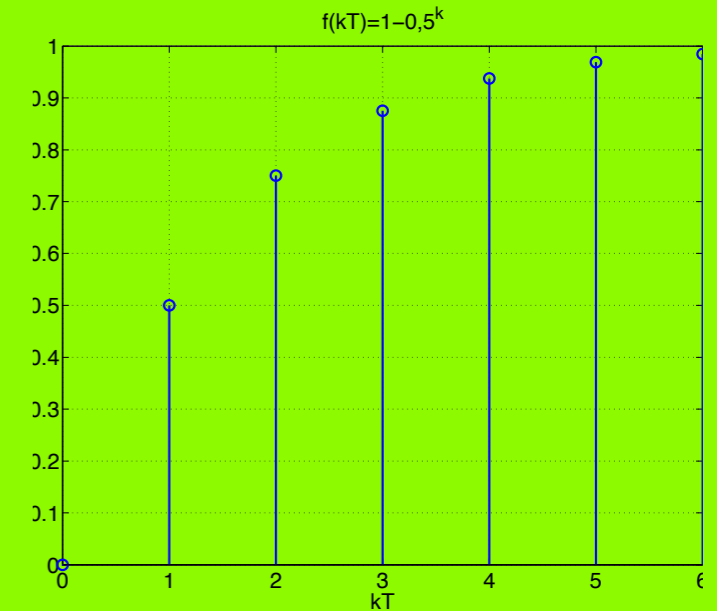
$$f(1) = 0,5$$

$$f(2) = 0,75$$

$$f(3) = 0,875$$

...

$$f(kT)|_{k \rightarrow \infty} = 1,0$$



$$A = \frac{0,5}{1-0,5} = 1$$

$$\therefore B = \frac{0,5}{0,5-1} = -1$$

Note que: $f(kT) = 1 - 0,5^k$

$f(0) = 0$

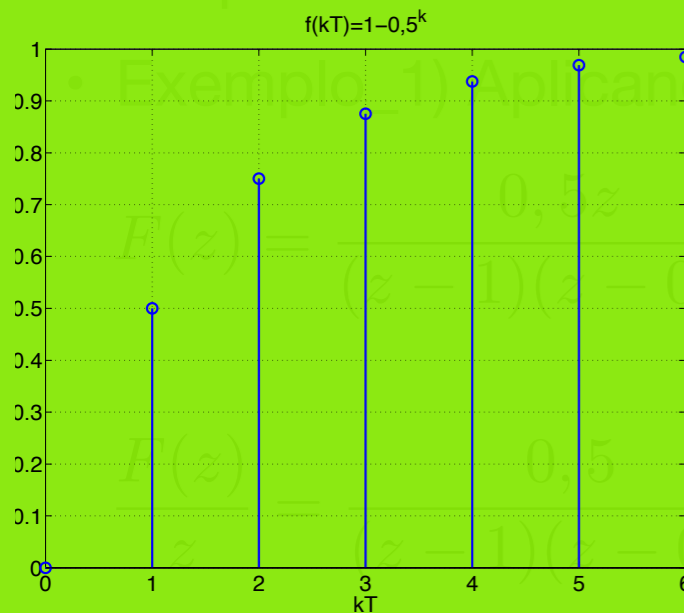
$f(1) = 0,5$

$f(2) = 0,75$

$f(3) = 0,875$

...

$f(kT) |_{k \rightarrow \infty} = 1,0$



$A = (z - 1) \cdot F'(z) |_{z=1} \quad \therefore \quad A =$

$B = (z - 0,5) \cdot F'(z) |_{z=0,5} \quad \therefore$

$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z - 0,5} \quad \therefore$

$f(kT) = 1 - 0,5^k$

Método da Expansão

Requer uso de tabelas de pares
Exemplo 1) Aplicando este método

$\frac{1}{z - 1} = \frac{A}{z - 1}$

$F(z) = \frac{0,5 z}{(z - 1)(z - 0,5)}$

$U(z) = \frac{z}{z - 1}$

$G(z) = \frac{0,5}{z - 0,5}$

$G(z) = \frac{0,5}{(z - 0,5)} \cdot \frac{\div z^{-1}}{\div z z^{-1}}$

$G(z) = \frac{F(z)}{U(z)} = \frac{0,5 z^{-1}}{(1 - 0,5 z^{-1})}$

$F(z) (1 - 0,5 z^{-1}) = U(z) \cdot 0,5 z^{-1}$

$F(z) = 0,5 z^{-1} U(z) + 0,5 z^{-1} F(z)$

$\downarrow z^{-1}$

$f[kT] = 0,5 u[(k - 1)T] + 0,5 f[(k - 1)T]$

Note:

$f[k] = 0,5 \cdot u[k - 1] + 0,5 \cdot f[k - 1];$

$u[kT] = 1 \text{ p/ } k \geq 0; \text{ \% Def. entrada degrau}$

$f[kT] = 0 \text{ p/ } k < 0; \text{ \% Sist. causal}$

então:

$f[0] = 0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0 = 0;$

$f[1] = 0,5 \cdot u[0] + 0,5 \cdot f[0] = 0,5 \cdot 1 + 0 = 0,5$

$f[2] = 0,5 \cdot u[1] + 0,5 \cdot f[1] = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,75$

$f[3] = 0,5 \cdot u[2] + 0,5 \cdot f[2] = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,75 = 0,875$

$f[4] = 0,5 \cdot u[3] + 0,5 \cdot f[3] = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,875 = 0,9375$



$F(z) = U(z) \cdot G(z)$

$G(z) = \frac{F(z)}{U(z)}$

Prop. atraso no tempo:
 $\mathcal{Z} \{x(t - nT)\} = z^{-n} X(z)$

$= -1$

Lembrando de Laplace...

- Expansão em frações parciais, se fazia:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} + \dots$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$f(t) = Ae^{-at} + Be^{-bt} + \dots$$

Assim, para obter-se $f(kT)$ à partir de $F(z)$ temos que decompor $F(z)$ da seguinte forma:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b}$$

para obter-se termos simples na forma:

$$\frac{c_i z}{z-a} \xrightarrow{Z^{-1}} c_i a^k$$

$$F(z) \xrightarrow{Z^{-1}} f(kT)$$

$$\frac{F(z)}{z} = F'(z) = \frac{A}{z-a} + \dots$$

$$f(kT) = A a^k$$

Lembrando de Laplace...

$$F(s) = K_0 + \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \dots + \frac{K_n}{s - s_n}, \text{ (expansão em frações parciais)}$$

K_0 =termo constante, quando grau de $N(s)$ =grau de $D(s)$, exemplo:

$$F(s) = \frac{2s^2 + 4s + 5}{4s^2 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{N'(s)}{4s^2 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{4s + 9/2}{4s^2 + 1}$$

$$\begin{array}{r} 2s^2 + 4s + 5 \quad | \quad 4s^2 + 1 \\ -2s^2 \quad \quad \quad \frac{1}{2} \\ \hline \quad \quad \quad \frac{4s + 9}{2} \end{array}$$

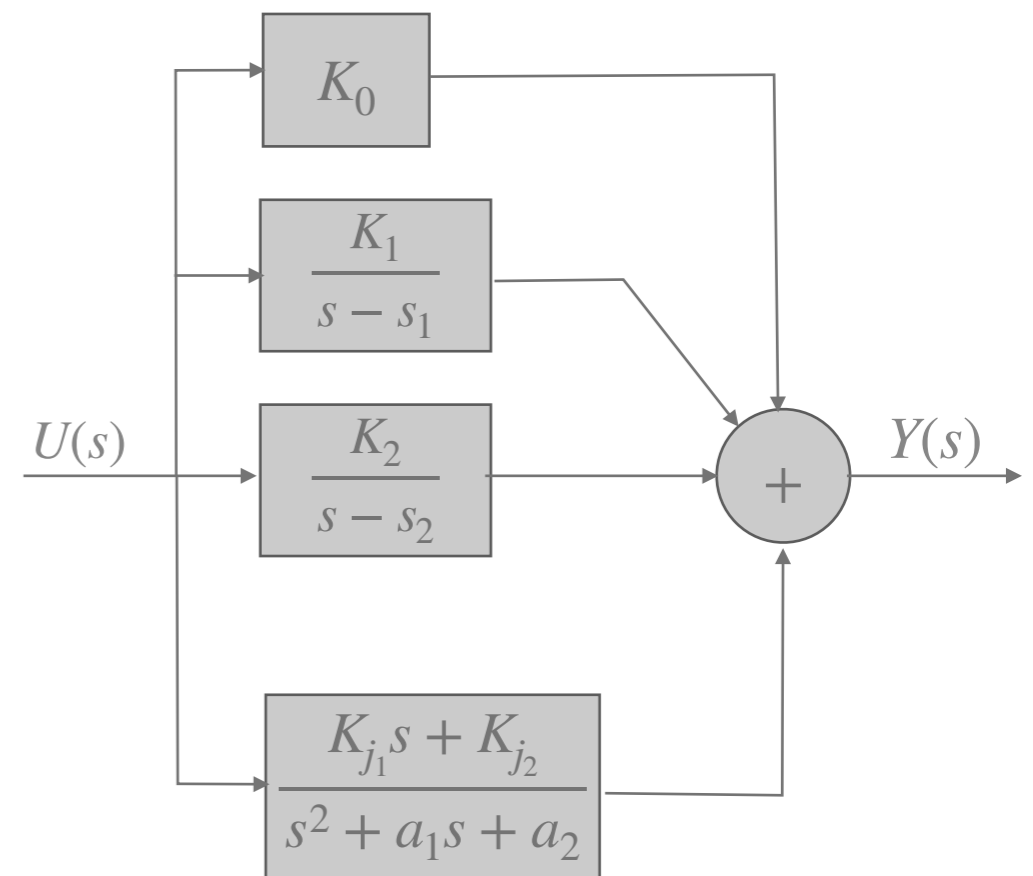
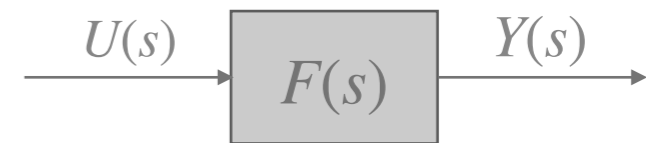
$$\text{Casos } \begin{cases} s_i = \text{real, então } \rightarrow \frac{K_i}{s - s_i}; \\ s_1 = \text{complexo, então } \rightarrow \frac{K_j}{s - s_j} + \frac{K_j^*}{s - s_j^*} \end{cases}$$

Onde $s_j = \text{complexo}$.

Se $s_j = a + jb$ então $s_j^* = a - jb$ e teremos:

$$\Rightarrow \frac{K_j}{s - s_j} + \frac{K_j^*}{s - s_j^*} = \frac{K_{j_1} + K_{j_2}}{s^2 + a_1s + a_2}$$

Onde K_{j_1} e K_{j_2} , a_1 e a_2 são reais.



Exercício:

- Obtenha $y(kT)$ à partir de: $Y(z) = \frac{z + 4}{(z - 1)(z - 2)}$

$$y(kT) = 2\delta(k) - 5 + 3(-2)^k$$

Exercício:

- Obtenha $y(kT)$ à partir de: $Y(z) = \frac{z+4}{(z-1)(z-2)}$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z+4}{z(z-1)(z-2)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-2}$$

$$a = z \cdot Y'(z)|_{z=0} \quad \therefore \quad a = \left. \frac{z(z+4)}{z(z-1)(z-2)} \right|_{z=0} \quad \therefore \quad a = \frac{4}{(-1)(-2)} = 2$$

$$b = (z-1) \cdot Y'(z)|_{z=1} \quad \therefore \quad b = \left. \frac{(z-1)(z+4)}{z(z-1)(z-2)} \right|_{z=1} \quad \therefore \quad b = \frac{5}{(1)(-1)} = -5$$

$$c = (z-2) \cdot Y'(z)|_{z=2} \quad \therefore \quad c = \left. \frac{(z-2)(z+4)}{z(z-1)(z-2)} \right|_{z=2} \quad \therefore \quad c = \frac{6}{(2)(1)} = 3$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z} + \frac{(-5)}{z-1} + \frac{3}{z-2}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z} + \frac{(-5)z}{z-1} + \frac{3z}{z-2}$$

$F(s)$	$f(t)$	$f(k)$	$F(z)$	Obs
$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$u(k)$	$\frac{z}{z-1}$	Degrau Unitário
		a^k	$\frac{z}{z-a}$	
$\frac{1}{s^2}$	t	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	Rampa
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	Exponencial
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{at}	$kT e^{-akT}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	Pólos Múltiplos
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$1 - e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	Exponencial Decrescente

$$c = (z-2) \cdot Y'(z)|_{z=2} \dots \frac{z}{z(z-1)(z-2)}|_{z=2}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z} + \frac{(-5)}{z-1} + \frac{3}{z-2}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z} + \frac{(-5)z}{z-1} + \frac{3z}{z-2}$$

$$y(kT) = 2\delta(k) - 5 + 3(-2)^k$$

$$y(kT) = \{0, -11, 7, -29, 43, -101, 187, -389, \dots\}$$

Exercício:

- Obtenha $y(kT)$ à partir de: $Y(z) = \frac{z+4}{(z-1)(z-2)}$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z+4}{z(z-1)(z-2)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-2}$$

$$a = z \cdot Y'(z)|_{z=0} \quad \therefore \quad a = \left. \frac{z(z+4)}{z(z-1)(z-2)} \right|_{z=0} \quad \therefore \quad a = \frac{4}{(-1)(-2)} = 2$$

$$b = (z-1) \cdot Y'(z)|_{z=1} \quad \therefore \quad b = \left. \frac{(z-1)(z+4)}{z(z-1)(z-2)} \right|_{z=1} \quad \therefore \quad b = \frac{5}{(1)(-1)} = -5$$

$$c = (z-2) \cdot Y'(z)|_{z=2} \quad \therefore \quad c = \left. \frac{(z-2)(z+4)}{z(z-1)(z-2)} \right|_{z=2} \quad \therefore \quad c = \frac{6}{(2)(1)} = 3$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z} + \frac{(-5)}{z-1} + \frac{3}{z-2}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z} + \frac{(-5)z}{z-1} + \frac{3z}{z-2}$$

$$y(kT) = 2\delta(k) - 5 + 3(-2)^k$$

$$y(kT) = \{0, -11, 7, -29, 43, -101, 187, -389, \dots\}$$

Usando MATLAB:

```
>> k=0:7; % gera vetor com instantes de amostragem
>> y=-5+3*(-2).^k % gera correspondente vetor y(kT)
y =    -2   -11    7   -29   43  -101  187  -389
>>
```

Caso de Pólos Complexos Conjugados

- Suponha que no momento de expandir $Y(z)$ surjam termos como:

$$Y(z) = \dots + \frac{A_1}{z - \alpha - j\beta} + \frac{A_2}{z - \alpha + j\beta} + \dots$$

A_1 é o resíduo de $p_1 = \alpha + j\beta$, então $A_2 = A_1^*$ é o resíduo de $p_2 = p_1^* = \alpha - j\beta$.

Em particular, se:

$$A_1 = (z - p_1) \cdot Y'(z)|_{z=p_1} = M \cdot e^{j\theta}$$

então

$$\frac{z \cdot M e^{j\theta}}{z - p_1} + \frac{z \cdot M e^{-j\theta}}{z - p_1^*} = \frac{2zM \cos(z - \alpha) - 2z\beta M \sin \theta}{(z - \alpha)^2 + \beta^2}$$

que pode ser invertido usando a transformada Z da tabela:

$$\mathcal{Z} \{e^{-at} \cos(\omega t - \theta)\} = \frac{z \cos \theta (z - a) - z\beta \sin \theta}{(z - \alpha)^2 + \beta^2}$$

onde: $\alpha = e^{-aT} \cos \omega T$; e

$$\beta = e^{-aT} \sin \omega T$$

Exercícios

Note: $F(z) = \mathbf{Z} \{f(t) = \sin(\omega t)\}$

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Exercícios

Note: $F(z) = \mathbf{Z} \{f(t) = \sin(\omega t)\}$

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Solução:

Quando a) $T = \frac{\pi}{\omega}$, teremos:

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin \left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega} \right)}{z^2 - 2 \cos \left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega} \right) + 1}$$

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin(\pi) \rightarrow 0}{z^2 - 2 \cos(\pi) + 1}$$

$$F(z) = 0$$

Mas o que aconteceu aqui?

Exercícios

Note: $F(z) = \mathbf{Z} \{f(t) = \sin(\omega t)\}$

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Solução:

Quando a) $T = \frac{\pi}{\omega}$, teremos:

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin \left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega} \right)}{z^2 - 2 \cos \left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega} \right) + 1}$$

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin(\pi) \rightarrow 0}{z^2 - 2 \cos(\pi) + 1}$$

$$F(z) = 0$$

Mas o que aconteceu aqui?

Note o seguinte:

Quando a) $T = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow f_s = \frac{\omega}{\pi} \left(f = \frac{1}{T} \right)$

como: $\omega = 2\pi f$ teremos então que:

$$f_s = \frac{\omega}{\pi} = \frac{2\pi f}{\pi} = 2f$$

ou seja, significa que a senoide está sendo amostrada numa frequência duas vezes maior que a sua (teorema de Amostragem: Nyquist!), mas...

se substituirmos valores a expressão de

$$\mathbf{Z}^{-1} \{F(z)\} = f(kT) = \sin(\omega kT)$$

lembrando que: $T = \frac{\pi}{\omega}$

$$f(kT) \text{ se transforma em: } f(kT) = \sin \left(\omega k \frac{\pi}{\omega} \right) = \sin(k \cdot \pi)$$

Exercícios

Note: $F(z) = \mathbf{Z} \{f(t) = \sin(\omega t)\}$

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Note o seguinte:

Quando a) $T = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow f_s = \frac{\omega}{\pi} \left(f = \frac{1}{T} \right)$

como: $\omega = 2\pi f$ teremos então que:

$$f_s = \frac{\omega}{\pi} = \frac{2\pi f}{\pi} = 2f$$

ou seja, significa que a senoide está sendo amostrada numa frequência duas vezes maior que a sua (teorema de Amostragem: Nyquist!), mas...

se substituirmos valores na expressão de

$$\mathbf{Z}^{-1} \{F(z)\} = f(kT) = \sin(\omega kT)$$

lembrando que: $T = \frac{\pi}{\omega}$

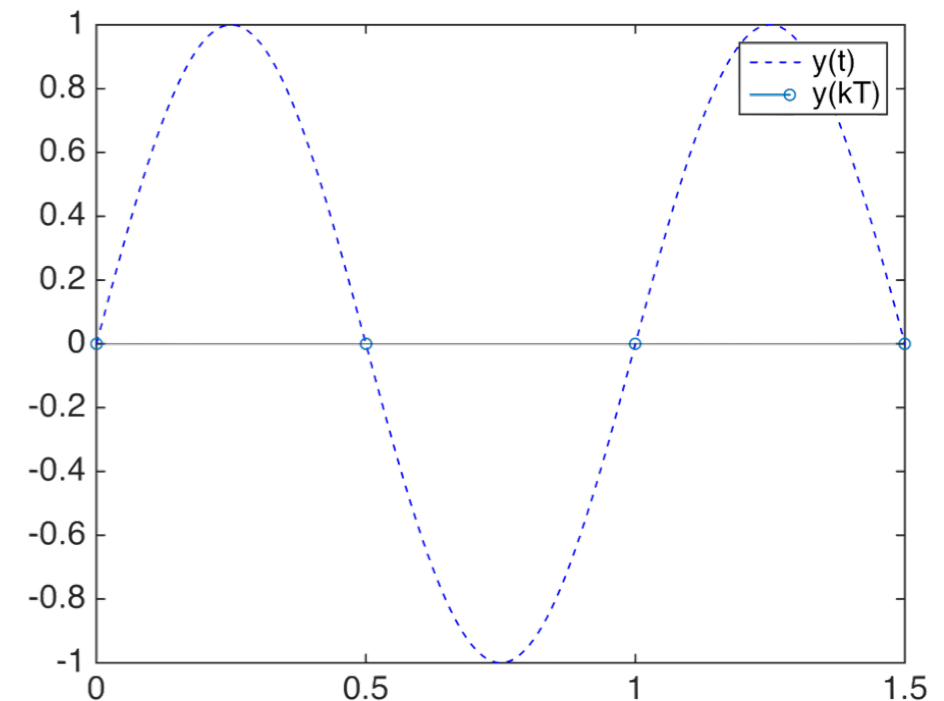
$$f(kT) \text{ se transforma em: } f(kT) = \sin \left(\omega k \frac{\pi}{\omega} \right) = \sin(k \cdot \pi)$$

que graficamente resulta em:

ou seja:

A senoide está sendo amostrada justamente nos instantes em que passa por amplitude zero.

k	y(kT)
0	0
1	0
2	0
⋮	⋮



Exercícios

Note: $F(z) = \mathbf{Z} \{f(t) = \sin(\omega t)\}$

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Solução:

Quando b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ teremos:

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin \left(\omega \cdot \frac{\pi}{2\omega} \right)}{z^2 - 2 \cos \left(\omega \cdot \frac{\pi}{2\omega} \right) + 1}$$

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin(\pi/2) \overset{1}{\rightarrow}}{z^2 - 2 \cos(\pi/2) \overset{0}{\rightarrow} + 1}$$

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

Que resulta no vetor (sequencia):

$$f(kT) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$$

Exercícios

Note: $F(z) = \mathbf{Z} \{f(t) = \sin(\omega t)\}$

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Solução:

Quando b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$ teremos:

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin\left(\omega \cdot \frac{\pi}{2\omega}\right)}{z^2 - 2 \cos\left(\omega \cdot \frac{\pi}{2\omega}\right) + 1}$$

$$F(z) = \frac{z \cdot \sin(\pi/2)}{z^2 - 2 \cos(\pi/2) + 1}$$

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

Que resulta no vetor (sequencia):

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \xrightarrow{\mathbf{Z}^{-1}} \frac{N(z)}{\sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot z^{-k}}$$

$$\begin{array}{r} z \quad \quad \quad | \quad z^2 + 1 \\ -z - z^{-1} \quad \quad | \quad z^{-1} - z^{-3} + z^{-5} - z^{-7} + \dots \\ \hline 0 - z^{-1} \quad \quad \quad | \\ +z^{-1} + z^{-3} \quad \quad \quad | \\ \hline 0 + z^{-3} \quad \quad \quad | \\ -z^{-3} - z^{-5} \quad \quad \quad | \\ \hline 0 - z^{-5} \quad \quad \quad | \end{array}$$

$$f(kT) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$$

Exercícios

Note: $F(z) = \mathbf{Z} \{f(t) = \sin(\omega t)\}$

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ **b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$** e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Que resulta no vetor (sequencia):

$$\begin{array}{r}
 N(z) \quad \left| \quad D(z) \right. \\
 \hline
 \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot z^{-k} \\
 \\
 \begin{array}{r}
 z \\
 -z - z^{-1} \\
 \hline
 0 - z^{-1} \\
 +z^{-1} + z^{-3} \\
 \hline
 0 + z^{-3} \\
 -z^{-3} - z^{-5} \\
 \hline
 0 - z^{-5} \\
 \hline
 \dots
 \end{array}
 \end{array}$$

$$f(kT) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$$

Desta vez note o seguinte:

Quando **b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$** $\Rightarrow f_s = \frac{2\omega}{\pi} \left(f = \frac{1}{T} \right)$

como: $\omega = 2\pi f$ teremos então que:

$$f_s = \frac{2\omega}{\pi} = \frac{2 \cdot 2\pi f}{\pi} = 4f$$

Então, neste caso, a senoide está sendo amostrada numa frequência 4x maior.

Lembrando de:

$$\mathbf{Z}^{-1} \{F(z)\} = f(kT) = \sin(\omega kT)$$

$$f(kT) \text{ se transforma em: } f(kT) = \sin\left(\omega k \frac{\pi}{2\omega}\right) = \sin(k\pi/2)$$

Exercícios

Note: $F(z) = \mathbf{Z} \{f(t) = \sin(\omega t)\}$

1) Para $F(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 \cos \omega T z + 1}$, obter $f(kT)$ pelo método da divisão polinomial quando:

a) $T = \frac{\pi}{\omega}$ **b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$** e c) $T = \frac{\pi}{6\omega}$

Demonstre graficamente os resultados e realize uma comparação. Que está acontecendo?

Desta vez note o seguinte:

Quando **b) $T = \frac{\pi}{2\omega}$** $\Rightarrow f_s = \frac{2\omega}{\pi} \left(f = \frac{1}{T} \right)$

como: $\omega = 2\pi f$ teremos então que:

$$f_s = \frac{2\omega}{\pi} = \frac{2 \cdot 2\pi f}{\pi} = 4f$$

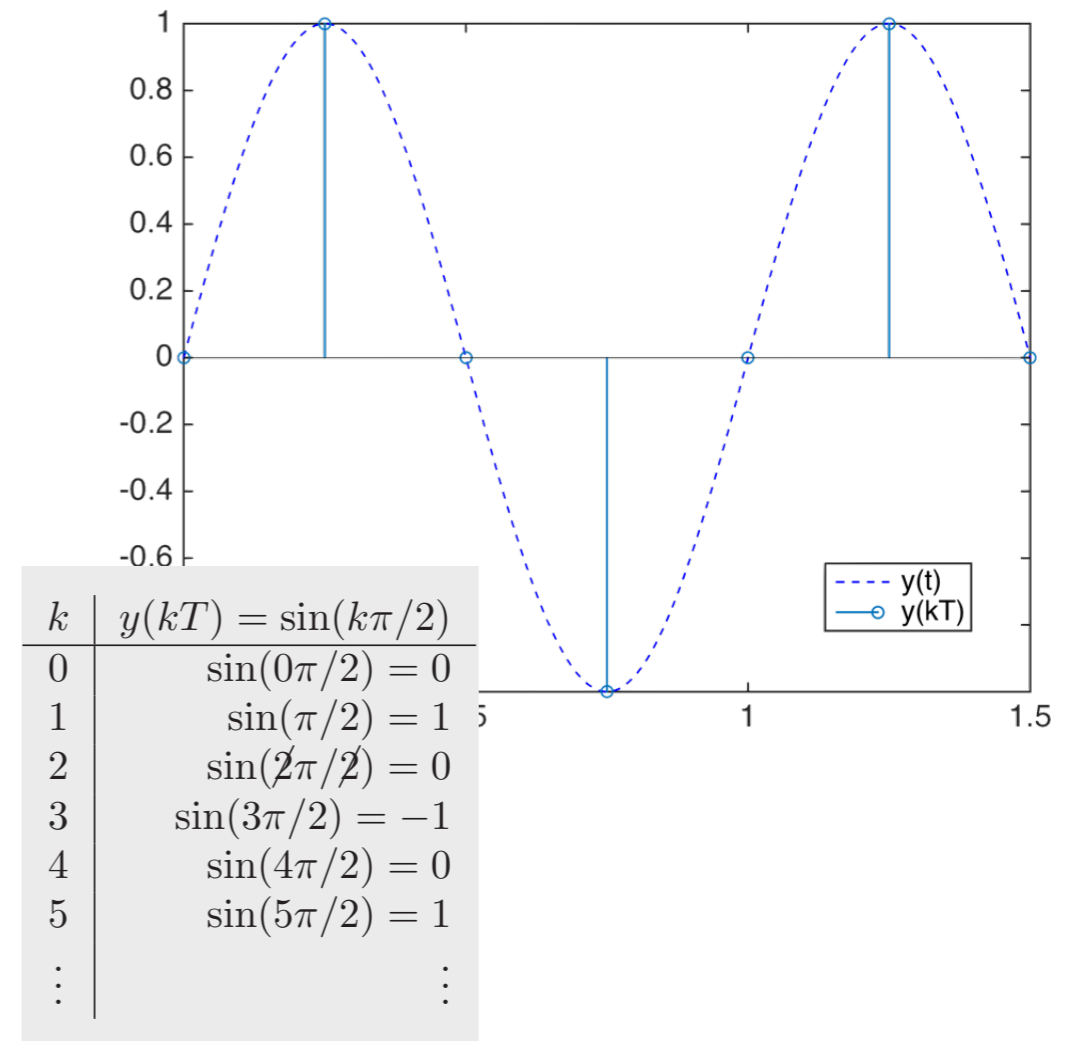
Então, neste caso, a senóide está sendo amostrada numa frequência 4x maior.

Lembrando de:

$$\mathbf{Z}^{-1} \{F(z)\} = f(kT) = \sin(\omega kT)$$

$$f(kT) \text{ se transforma em: } f(kT) = \sin\left(\omega k \frac{\pi}{2\omega}\right) = \sin(k\pi/2)$$

$$f(kT) = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$$



Arquivo dos gráficos: >> exercicio_seno.m

```
% simulando uma senóide sendo amostrada à diferentes frequencias
```

```
clear all;
```

```
close all;
```

```
f = input('Entre com a freq. da senóide [Hz]: ? ');
```

```
fs = input('Entre com a freq. de amostragem [Hz]: ? ');
```

```
ciclos = input('Quantos ciclos mostrar da onda senoidal ? ');
```

```
if ciclos < 0
```

```
    ciclos = 1
```

```
end
```

```
%  $T = 1/f$ ;  $t_{\text{final}} = p * T$ , então:
```

```
t_final = ciclos/f; % domínio tempo, em segundos
```

```
f_aux = 500*f; % freq. de amostragem simulação sinal contínuo (500 pt/ciclo)
```

```
T_aux = 1/f_aux;
```

```
t=0:T_aux:t_final; % criar vetor tempo para sinal analógico simulado
```

```
y=sin(2*pi*f*t); % criat vetor do sinal analógico simulado
```

```
plot( t, y, 'b--') % plotando sinal analógico ("contínuo")
```

```
% segue versão discretizada
```

```
T = 1/fs;
```

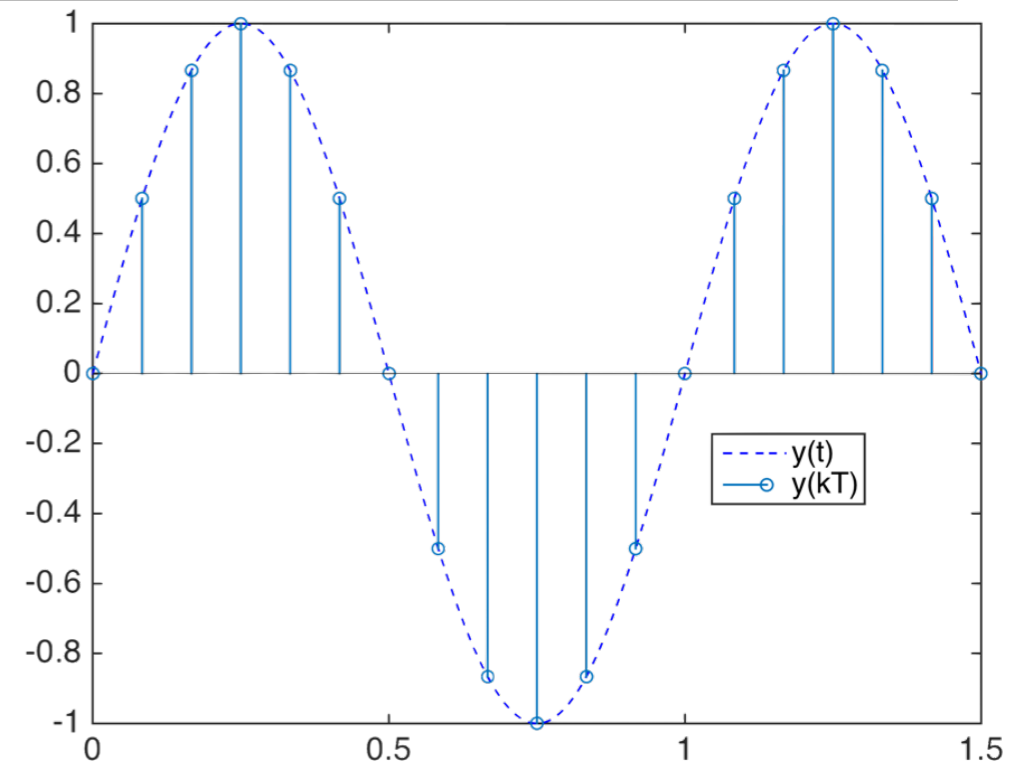
```
k=0:T:t_final; % cria vetor dos instantes de amostragem (no domínio tempo)
```

```
yd=sin(2*pi*f*k); % criat vetor do sinal amostrado
```

```
hold on
```

```
stem (k,yd)
```

```
legend('y(t)', 'y(kT)');
```



```
>> exercicio_seno
```

```
Entre com a freq. da senóide [Hz]: ? 1
```

```
Entre com a freq. de amostragem [Hz]: ? 12
```

```
Quantos ciclos mostrar da onda senoidal ? 1.5
```

```
>>
```

Obtenção da **Transformada Z** à partir da **transformada de Laplace** de certa função...

a) Método 1: Uso da transformada inversa de Laplace.

$$\begin{array}{ccc} F(s) & \longrightarrow & F(z) \\ \mathcal{L}^{-1} \downarrow & & \uparrow \mathcal{Z} \\ f(t) & \xrightarrow{T} & f(kT) \end{array}$$

b) Método 2: Decomposição de $F(s)$ em elementos simples (expansão da função em frações parciais} e uso de tabelas contendo pares de transformadas Z e de Laplace.

$F(s)$ pode ser descrito como (admitindo que $F(s)$ não possua pólos múltiplos):

$$F(s) = c_0 + \underbrace{\sum_i \frac{c_i}{s - p_i}}_{\text{caso de pólos simples}} + \underbrace{\sum_j \left[\frac{c_j}{s - p_j} + \frac{\bar{c}_j}{s - \bar{p}_j} \right]}_{\text{caso de pólos complexos}}$$

onde os pólos são: $p_j = \sigma + j\omega$; e os resíduos são: $c_j = \alpha + j\beta$.