Transformada Z

Parte 2/3

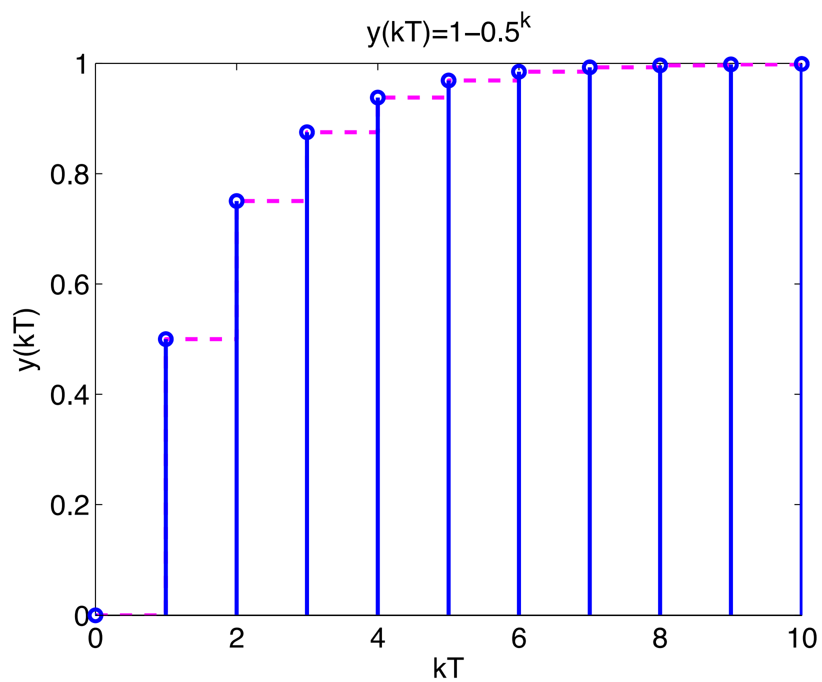
Prof. Fernando Passold

Respostas de Problemas anteriores

1.Esboço do sinal: $y(kT) = 1 - 0,5^k$

Solução (Usando MATLAB):

k	y(k)
0	1.0000
1	0.5000
2	0.2500
3	0.1250
4	0.0625
5	0.0312
6	0.0156
7	0.0078
8	0.0039
9	0.0020
10	0.0010

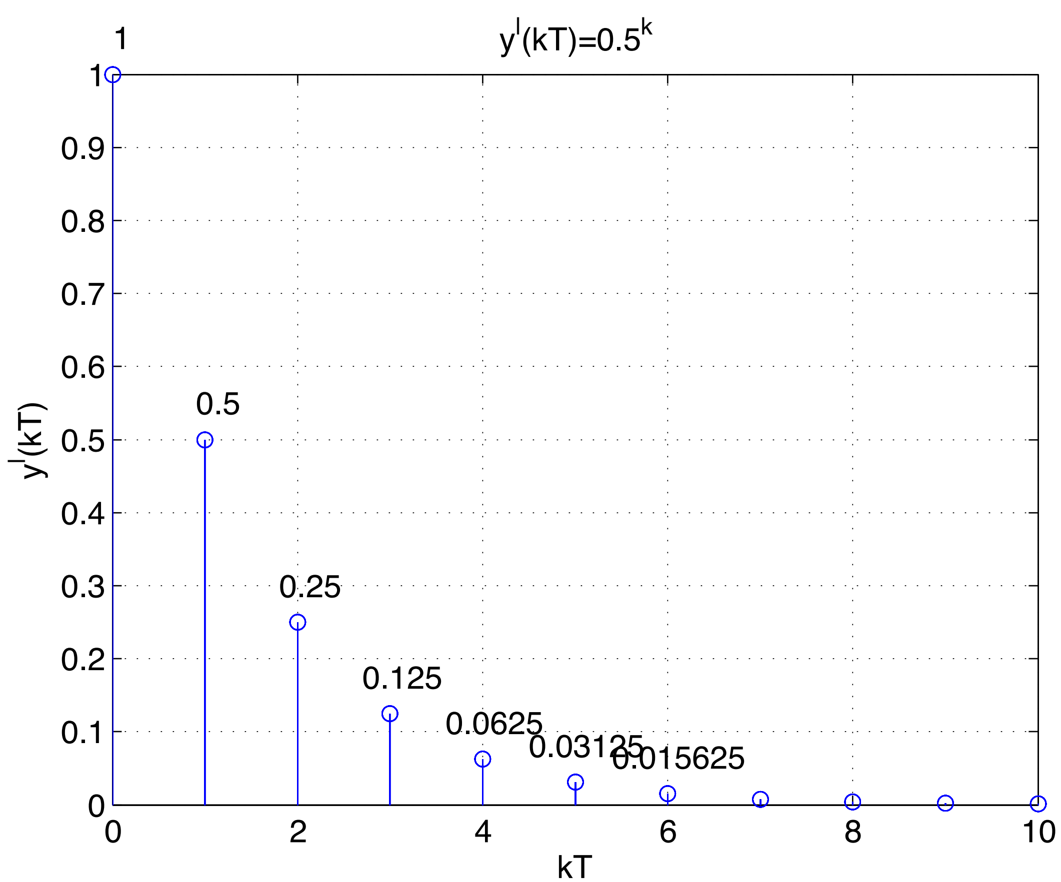


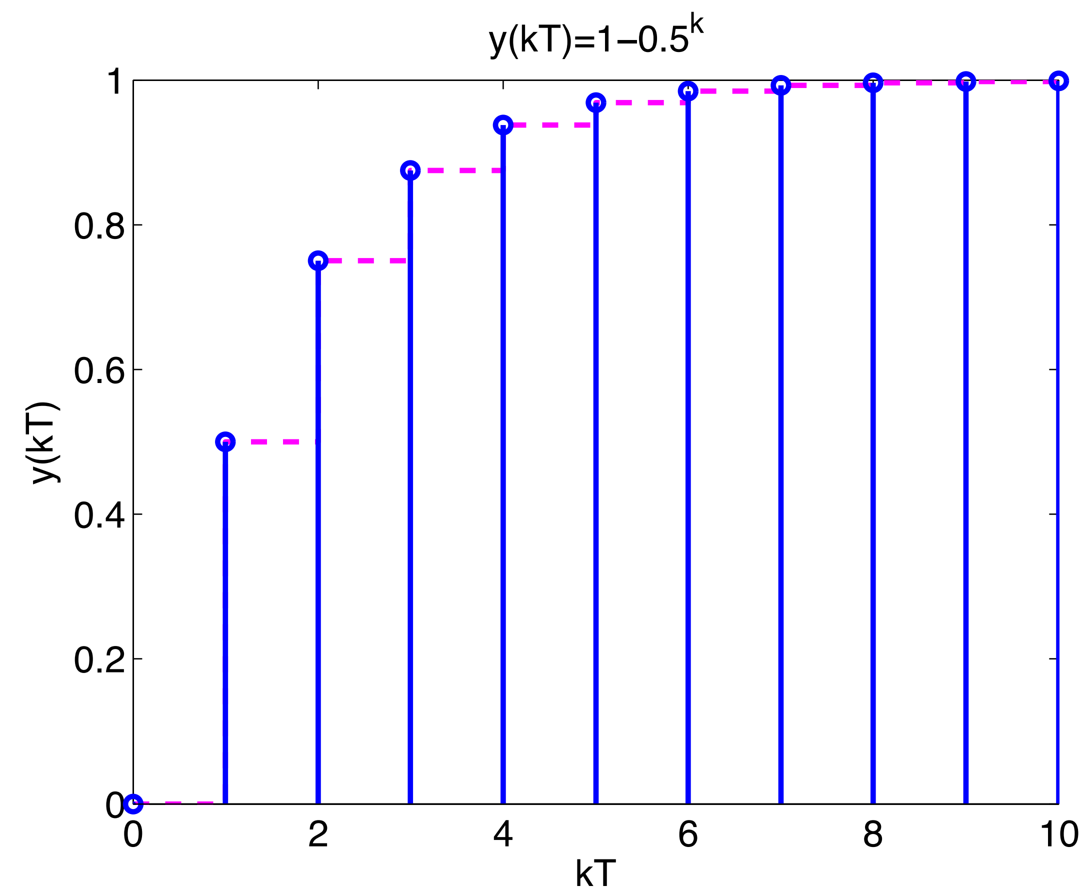

```
% Resolvendo problemas de transformada Z - parte I
% Fernando Passold em 19/set/2013
% Problema 1
disp('Seja o sinal y(kT)=1-0.5^k --> janela gráfica');
for k=0:10
    x(k+1)=k;        % notar que no MATLAB, indices de
vetores iniciam em 1
    y(k+1)=1-0.5^k;
end

stairs(x,y)
hold on
stem (x,y) % plota valores no instante da amostragem
title('y(kT)=1-0.5^k');
xlabel('kT');
ylabel('y(kT)');
```

Respostas de Problemas anteriores

1.Esboço do sinal: $y(kT) = 1 - 0,5^k$

Repare que: $y'(kT) = 0,5^k$ converge;
e gera um gráfico como:





Respostas de Problemas anteriores

3. Dado a tabela de pontos (sinal):

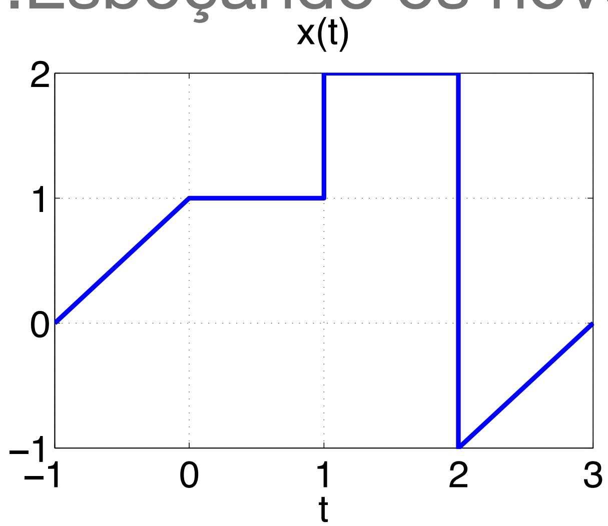
$$
\begin{aligned}
x(0) &= 5 \\
x(1) &= 4 \\
x(2) &= 3 \\
x(3) &= 2 \\
x(4) &= 1 \\
x(k) &= 0 \quad \forall\, k \geq 5
\end{aligned}
$$

Sua transformada Z resulta em:

$$Y(z) = 5z^0 + 4z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + 1z^{-4}$$
$$Y(z) = 5 + 4z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}$$

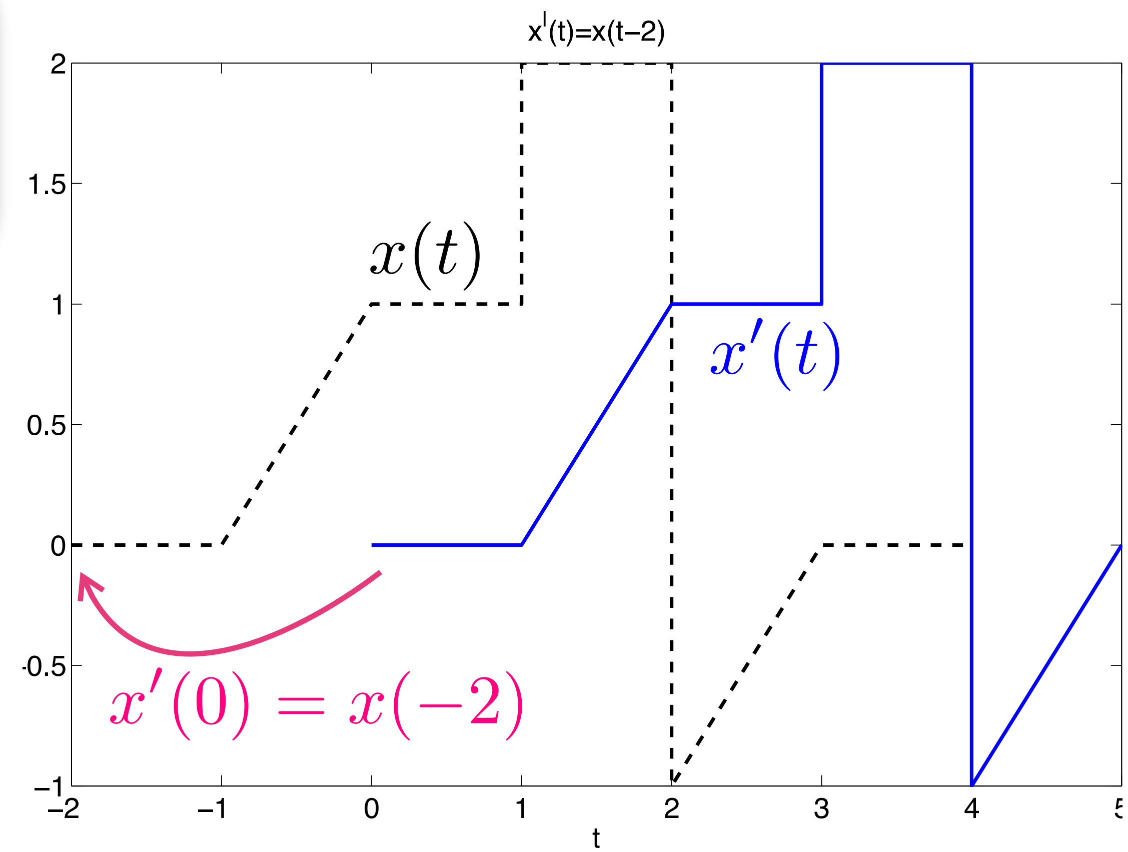
Respostas de Problemas anteriores

5.Esboçando os novos sinais para:



$$a) \quad x(t-2) \quad \leftarrow \text{Deslocamento no tempo}$$

Sinal atrasado de 2 amostras

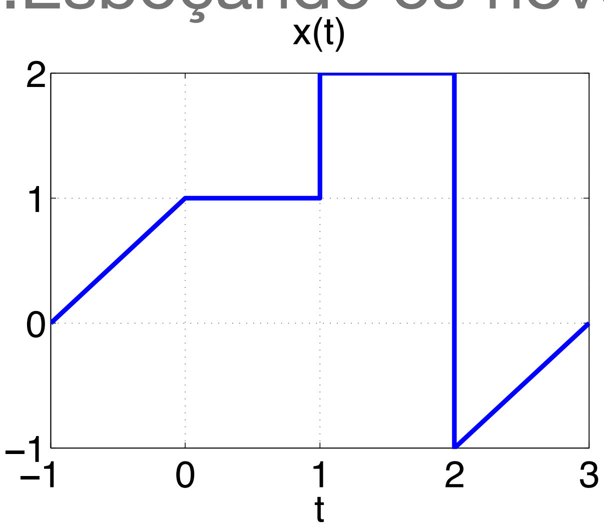



```
x(-1 )=0;
x( 0 )=1;
x( 1-)=1;
x( 1+)=2;
x( 2-)=2;
x( 2+)=-1;
x( 3 )=0;
```

```
x'(t)=x(t-2), então:
t=0; x'(0)=x(0-2)=x(-2)=0;
t=1; x'(1)=x(1-2)=x(-1)=0;
t=2; x'(2)=x(2-2)=x(0)=1;
t=3; x'(3)=x(3-2)=x(1)=1;
t=3; x'(3)=x(3-2)=x(1)=2;
t=4; x'(4)=x(4-2)=x(2)=2;
t=4; x'(4)=x(4-2)=x(2)=-1;
t=5; x'(6)=x(5-2)=x(3)=0;
```

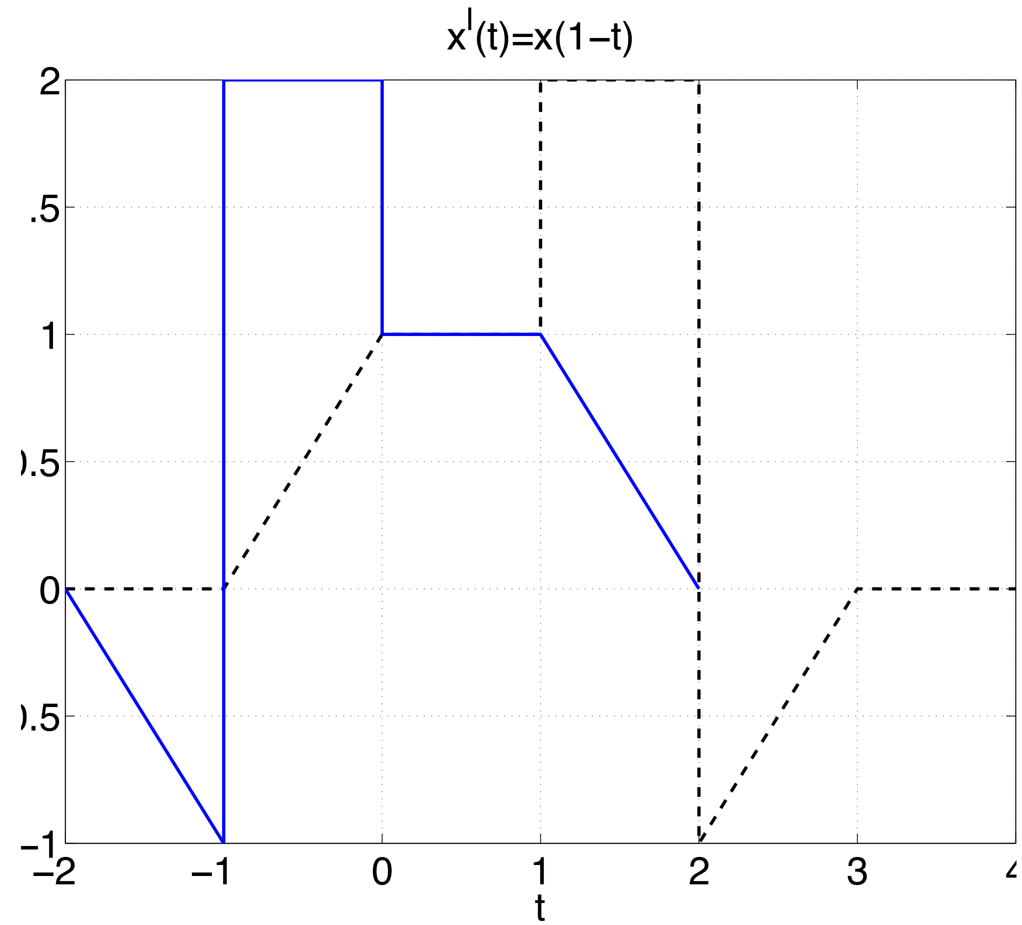
Respostas de Problemas anteriores

5.Esboçando os novos sinais para:



$b) \quad x(1-t)$

Reflexão de sinal

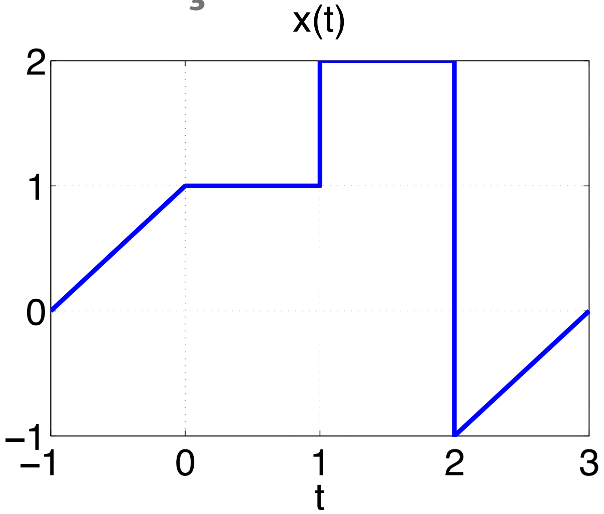



```
x(−1 )=0;
x( 0 )=1;
x( 1⁻)=1;
x( 1⁺)=2;
x( 2⁻)=2;
x( 2⁺)=−1;
x( 3 )=0;
```

```
x'(t)=x(1−t)=x(−t+1), então:
t=−2; x'(−2)=x(1−(−2))=x(3)=0
t=−1; x'(−1)=x(1−(−1))=x(2)=−1;
t=−1; x'(−1)=x(1−(−1))=x(2)=2;
t= 0; x'( 0)=x(1−0)=x(1)=2;
t= 0; x'( 0)=x(1−0)=x(1)=1;
t= 1; x'( 1)=x(1−1)=x(0)=1;
t= 2; x'( 2)=x(1−2)=x(−1)=0;
```

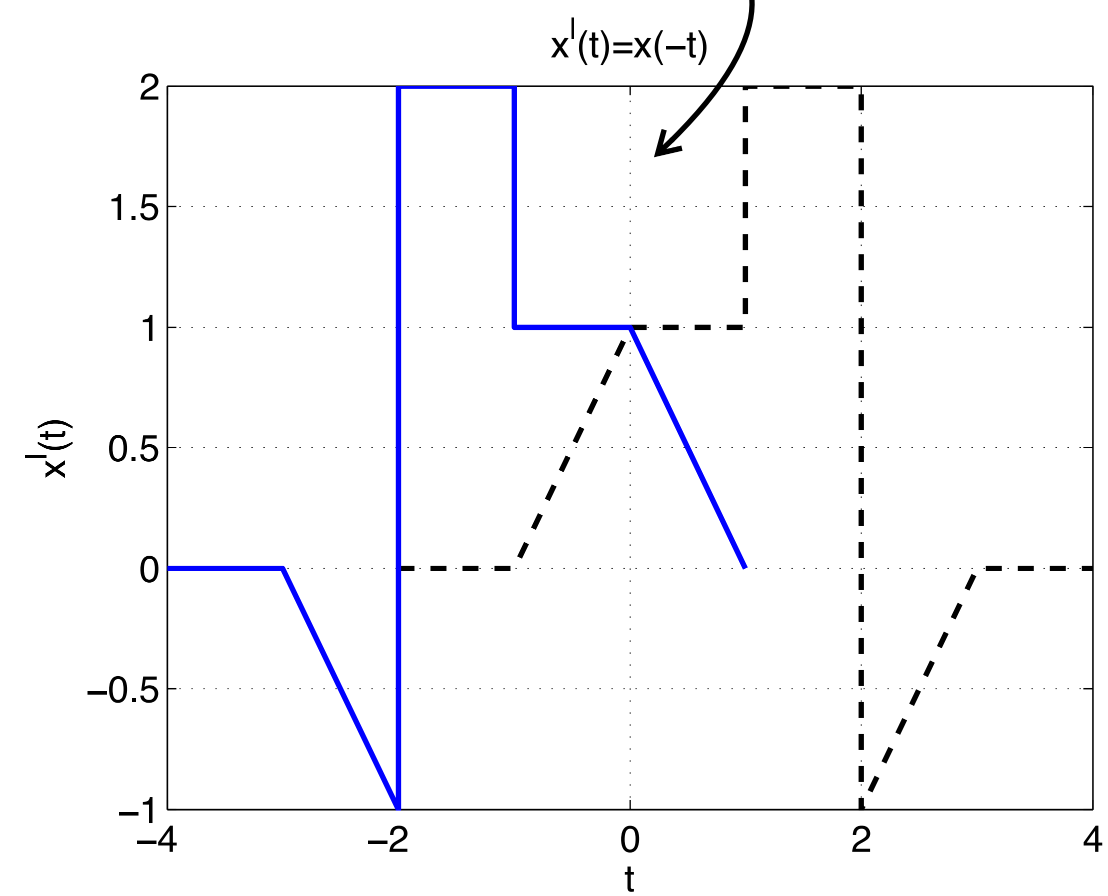
Respostas de Problemas anteriores

5.Esboçando os novos sinais para:



$$x'(t) = x(-t)$$

Note: sinal "refletido"
(em torno da origem)

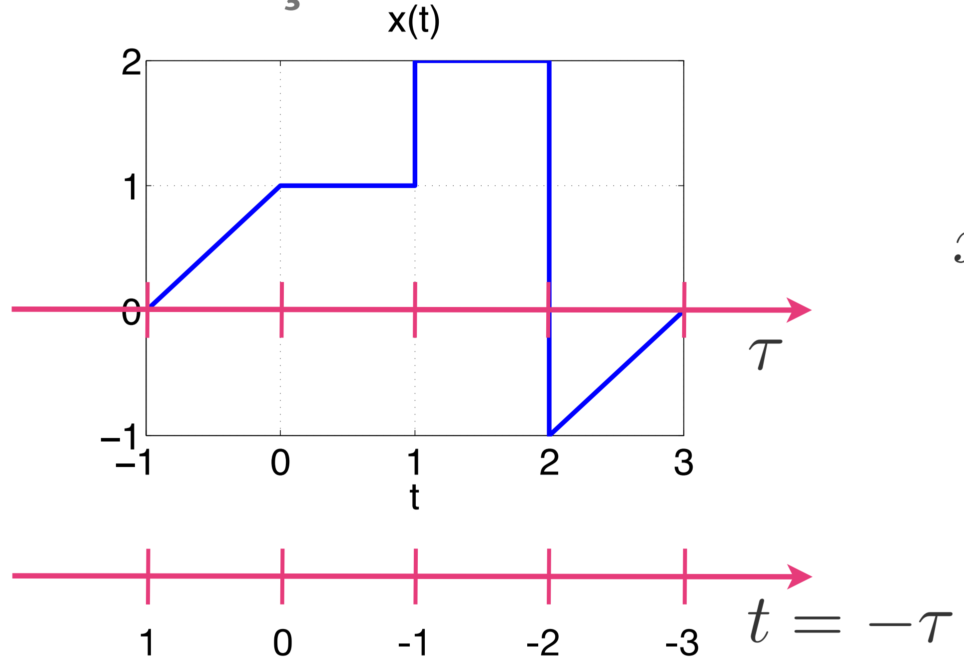



```
x(-1 )=0
x( 0 )=1
x( 1⁻)=1
x( 1⁺)=2
x( 2⁻)=2
x( 2⁺)=-1
x( 3 )=0
```

```
Se x'(t)=x(-t) então:
t=-4; x'(-4)=x(4)=0
t=-3; x'(-3)=x(3)=0
t=-2; x'(-2)=x(2)=-1
t=-2; x'(-2)=x(2)=2
t=-1; x'(-1)=x(1)=2
t=-1; x'(-1)=x(1)=1
t= 0; x'( 0)=x(0)=1
t= 1; x'( 1)=x(-1)=0
```

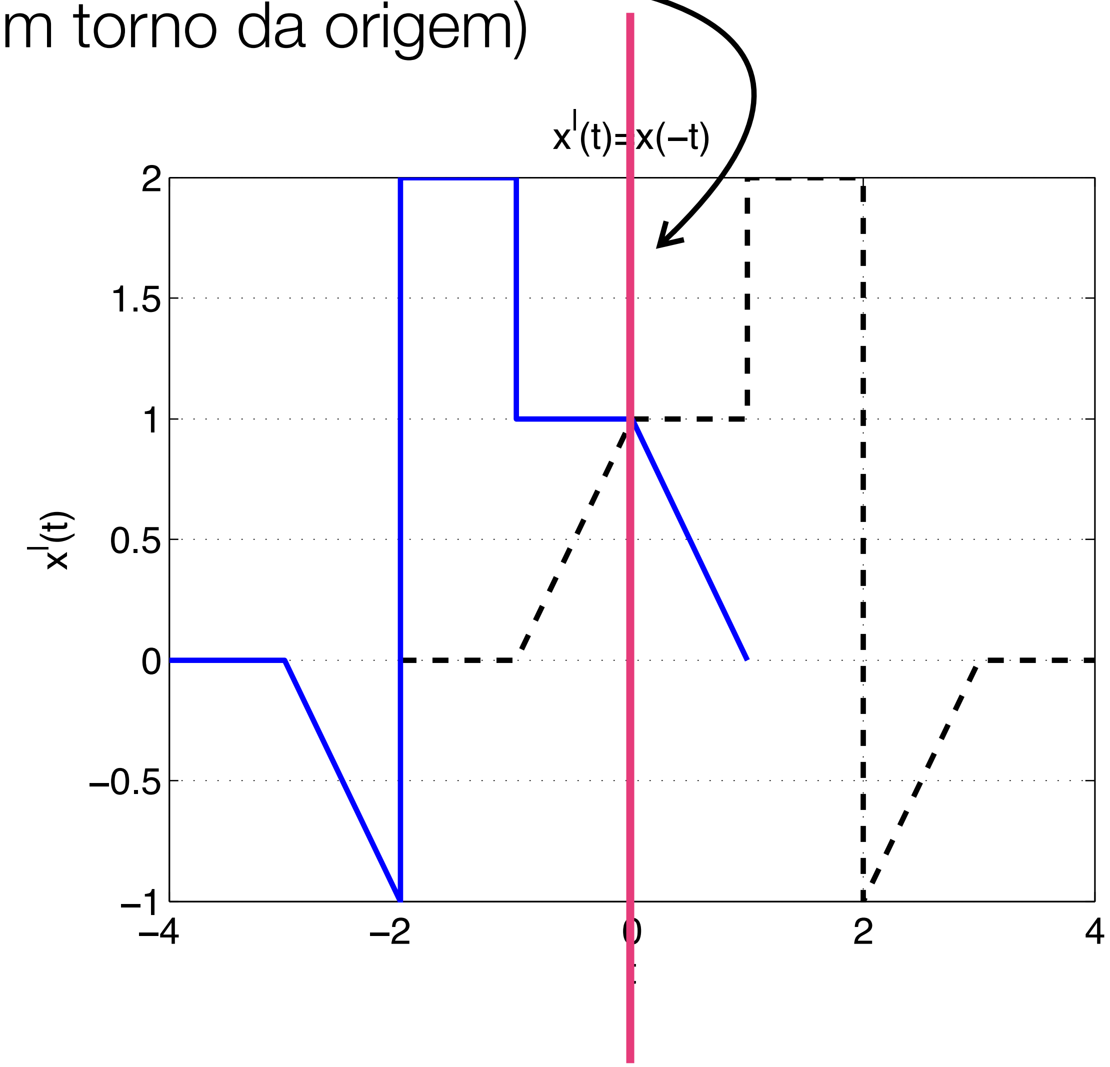
Respostas de Problemas anteriores

5. Esboçando os novos sinais para:



Note: sinal “refletido” (em torno da origem)

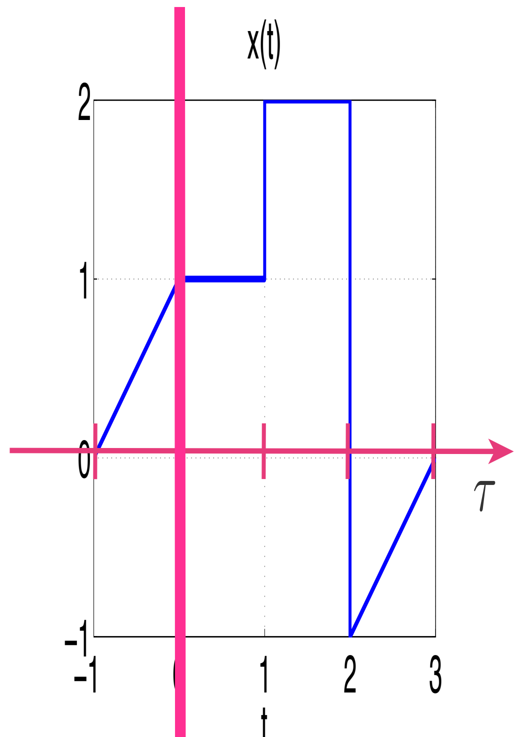
$$x'(t) = x(-t)$$



Reversão (inversão) temporal

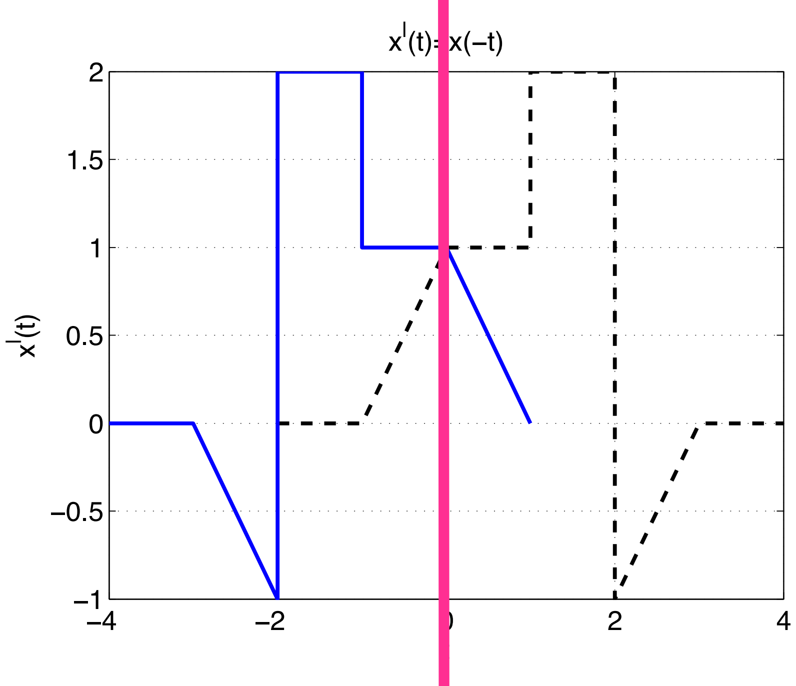
Respostas de Problemas anteriores

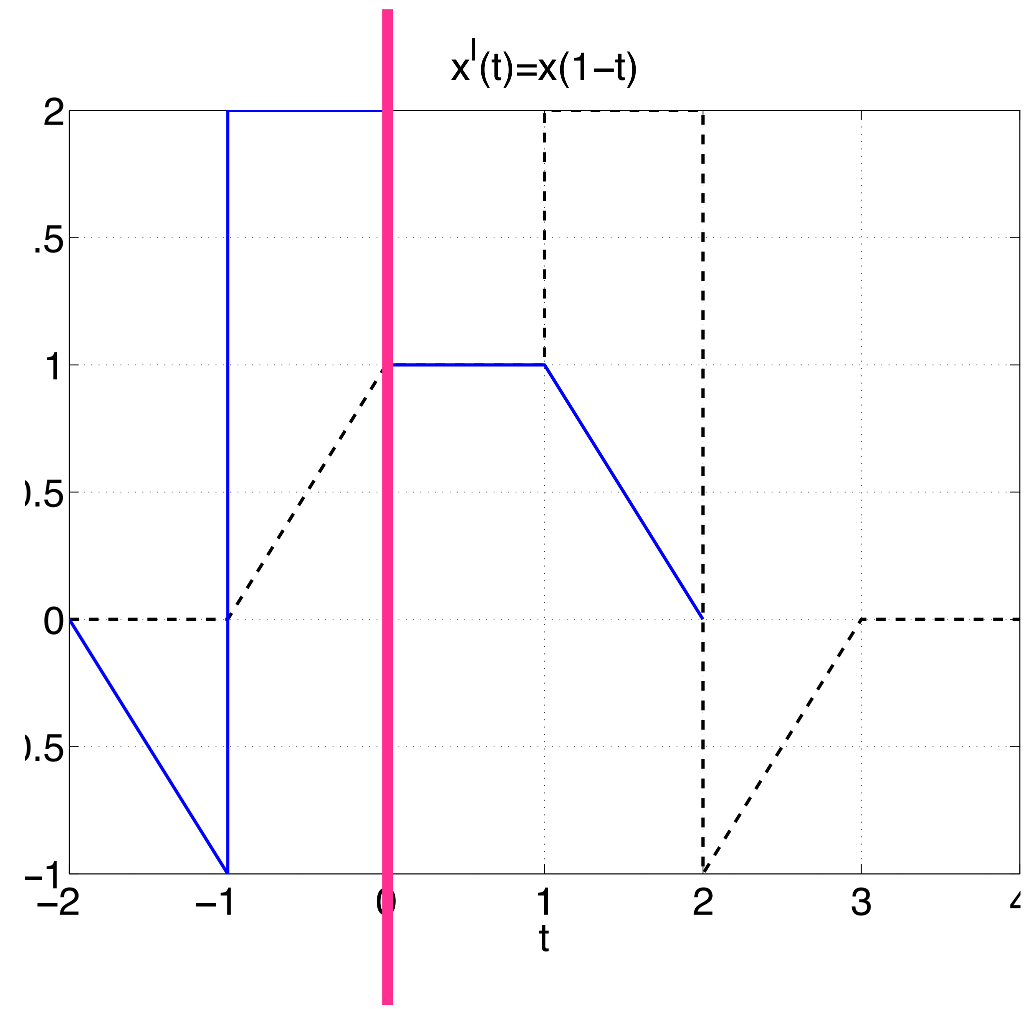
5.Esboçando os novos sinais para:



$$b) \quad x(1-t)$$

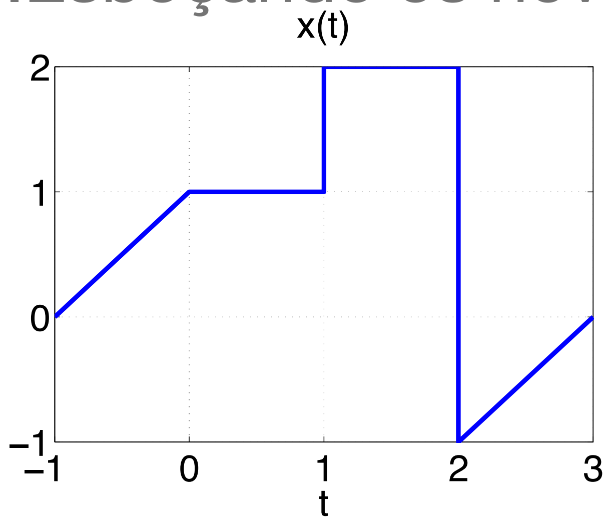
$$x'(t) = x(-t+1)$$





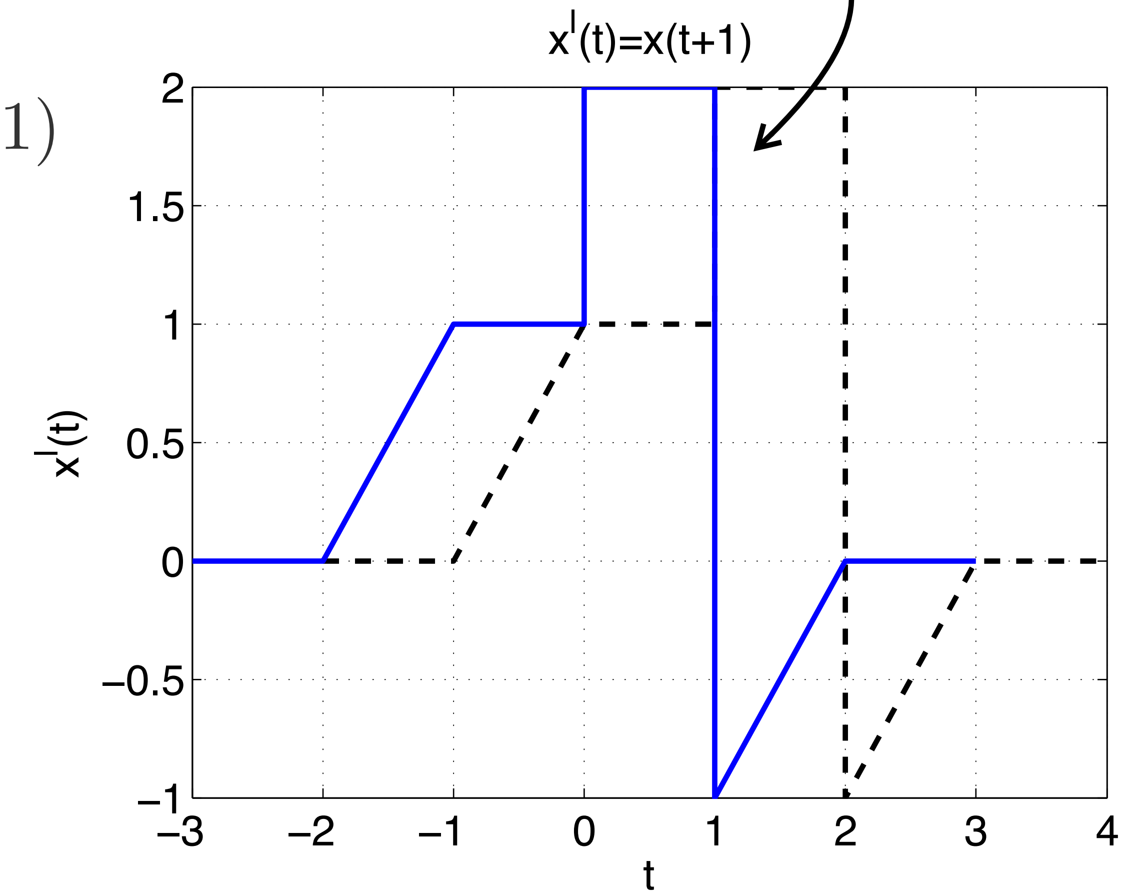
Respostas de Problemas anteriores

5.Esboçando os novos sinais para:



$$x'(t) = x(t+1)$$

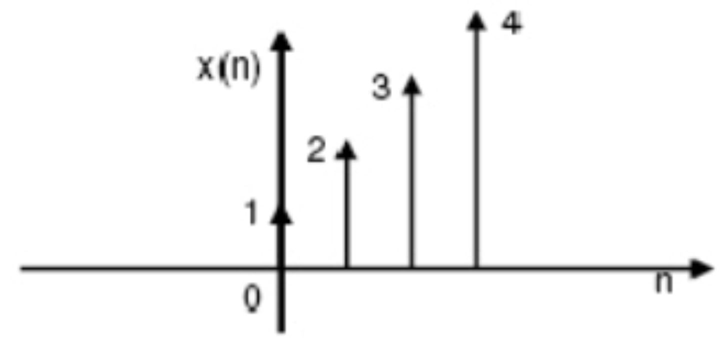
Note: sinal deslocado (adiantado) no tempo




```
                    Se x'(t)=x(t+1) então:
x(-1 )=0            t=-2; x'(-2+1)=x(-1)=0
x( 0 )=1            t=-1; x'(-1+1)=x(0)=1
x( 1-)=1            t=0; x'(0+1)=x(1)=1
x( 1+)=2            t=0; x'(0+1)=x(1)=2
x( 2-)=2            t=1; x'(1+1)x=(2)=2
x( 2+)=-1           t=1; x'(1+1)=x(2)=-1
x( 3 )=0            t=2; x'(2+1)=x(3)=0
```

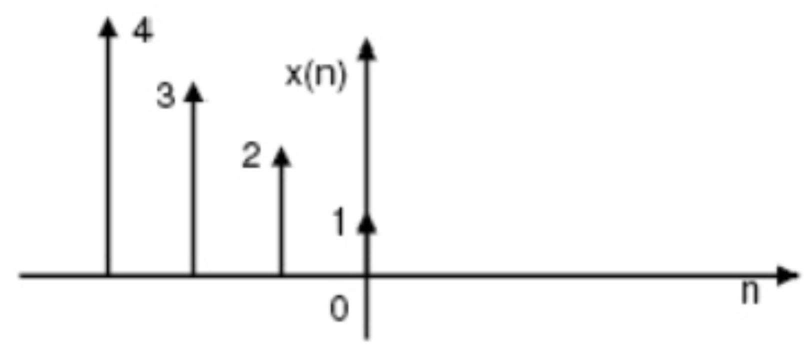
“Resumo":

Original signal



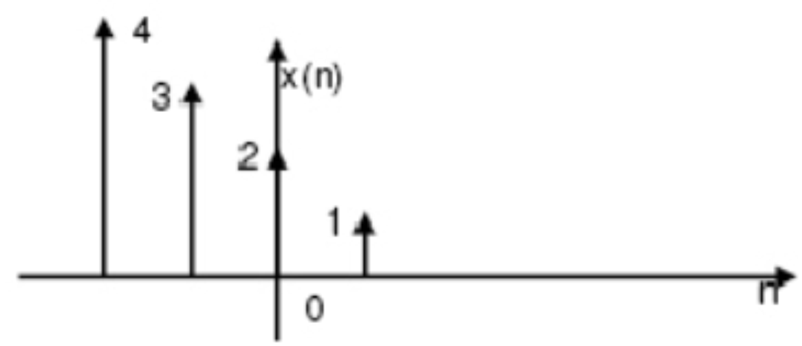
x(n)

Time Reversed



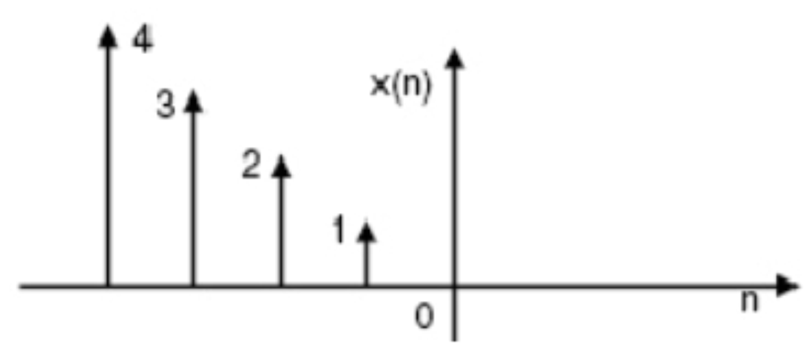
x(-n)

TR & Delaying



x(-n+1)

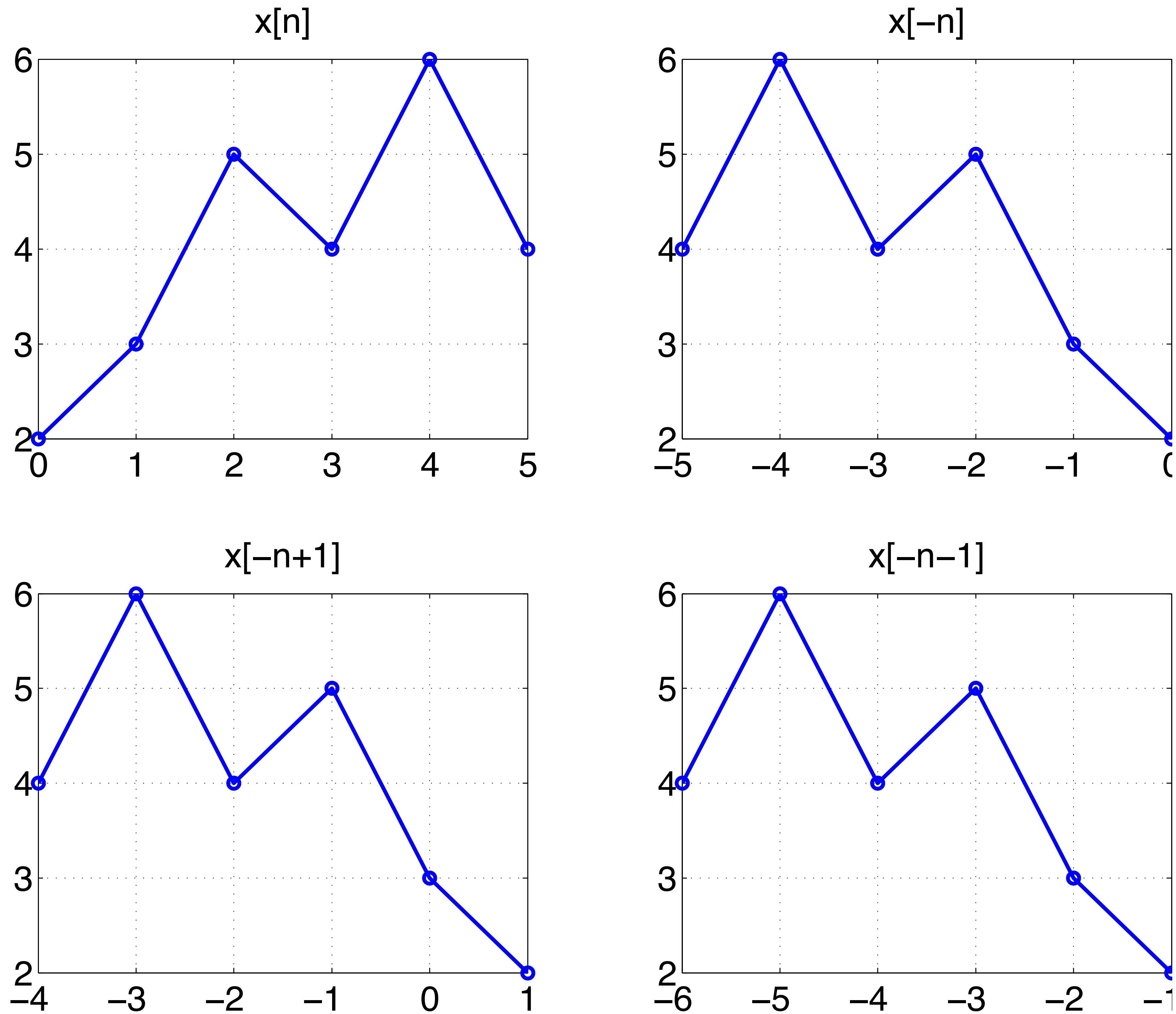
TR & Advancing



x(-n-1)

“Resumo":

```
>> x=[2 3 5 4 6 4];
>> n=0:5;
>> m=-n;
>> o=-n+1;
>> p=-n-1;
>> figure; subplot(221); plot(n,x);
>> title('x[n]'); grid;
>> subplot(222); plot(m,x);
>> title('x[-n]'); grid;
>> subplot(223); plot(o,x);
>> title('x[-n+1]'); grid
>> subplot(224); plot(p,x);
>> title('x[-n-1]'); grid
>>
```



Outras transformadas Z...

Transformada Z de uma senóide:

- Considerando uma função sinosoidal do tipo:

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\omega t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- Lembramos que a transformada Z da função exponencial é: $\mathcal{Z}\left\{e^{-at}\right\} = \dfrac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$

- e que o sen(wt) pode ser escrito como: $\sin(\omega t) = \dfrac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$

Transformada Z de uma senóide:

- Considerando uma função sinosoidal do tipo:

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\omega t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- Lembramos que a transformada Z da função exponencial é: $\mathcal{Z}\left\{e^{-at}\right\} = \dfrac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$

- e que o sen(wt) pode ser escrito como: $\sin(\omega t) = \dfrac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$

- assim temos:

$$X(z) = \mathcal{Z}\left\{\sin(\omega t)\right\} = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}) z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) z^{-1} + z^{-2}}\right]$$

$$= \frac{z^{-1}\sin(\omega T)}{1 - 2z^{-1}\cos(\omega T) + z^{-2}}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\sin(\omega t)\right\} = \frac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$$

Transformada Z de uma

Relações de Euler:

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos(x) \qquad \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin(x) \qquad \sin(jx) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

- Considerando uma função sinosoidal do t

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\omega t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- Lembramos que a transformada Z da função exponencial é: $\mathcal{Z}\left\{e^{-at}\right\} = \dfrac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$

- e que o sen(wt) pode ser escrito como: $\sin(\omega t) = \dfrac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$

- assim temos:

$$X(z) = \mathcal{Z}\left\{\sin(\omega t)\right\} = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{j\omega T}z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}}\right]$$

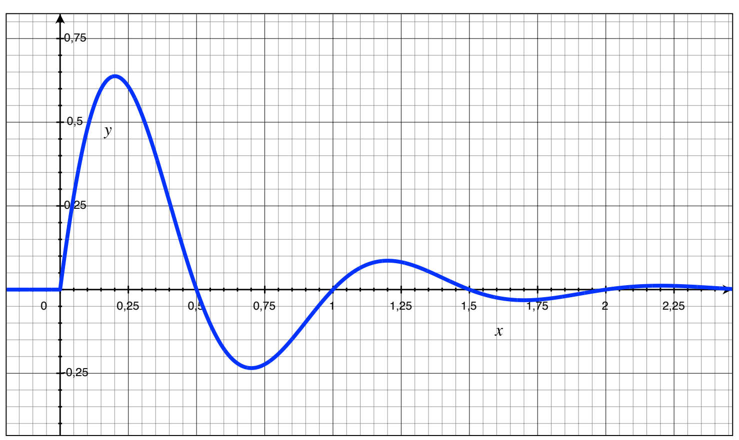
$$= \frac{z^{-1}\sin(\omega T)}{1 - 2z^{-1}\cos(\omega T) + z^{-2}}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\sin(\omega t)\right\} = \frac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$$

Transformada Z de uma senóide amortecida

- Seja a função: $$x(t) = \begin{cases} e^{-at}\sin(\omega t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- Sua transformada seria: $$X(z) = \mathcal{Z}\left\{e^{-at}\sin(\omega t)\right\} = \frac{1}{2j}\mathcal{Z}\left\{e^{-at}e^{j\omega t} - e^{-at}e^{-j\omega t}\right\}$$



$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1 - e^{-(a-j\omega)T}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-(a+j\omega)T}z^{-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})e^{-aT}z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2}}\right]$$

$$= \frac{e^{-aT}z^{-1}\sin(\omega T)}{1 - 2e^{-aT}z^{-1}\cos(\omega T) + e^{-2aT}z^{-2}}$$

$$= \frac{e^{-aT}z\sin(\omega T)}{z^2 - 2e^{-aT}z\cos(\omega T) + e^{-2aT}}$$

Propriedades da Transformada Z

Propriedades da Transformada Z

1.**Linearidade** (Adição, subtração e multiplicação por constante):

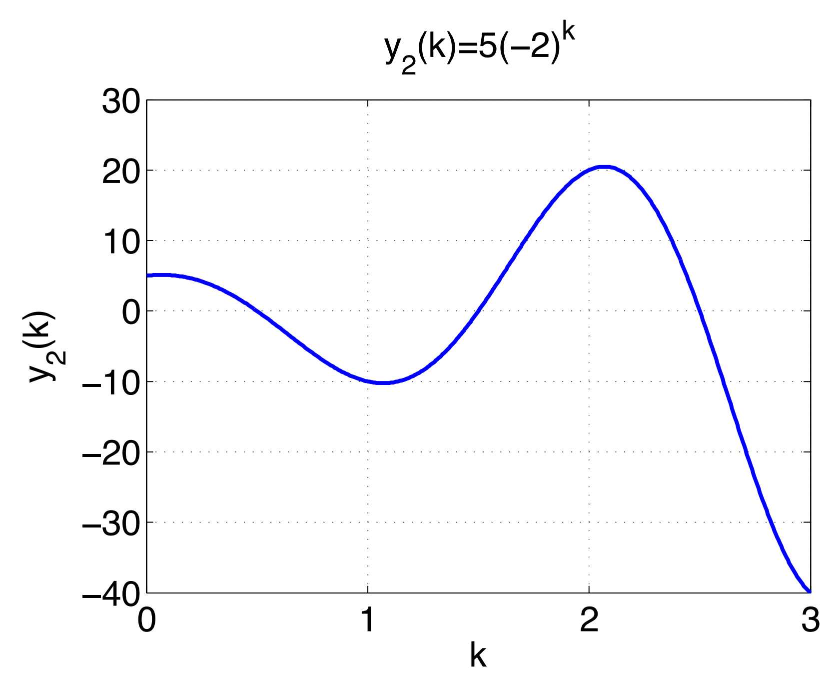
$$\mathcal{Z}\left\{a \cdot f(k) + b \cdot g(k)\right\} = a \cdot F(z) + b \cdot G(z)$$

onde *a* e *b* são números constantes.

- Exemplo: Transformada de: $f(k) = 3\delta(k) + 5(-2)^k$

$$F(z) = 3(1) + 5 \cdot \left(\frac{z}{z+2}\right)$$

$$F(z) = \frac{8z+6}{z+2}$$



Propriedades da Transformada Z

2.**Translação** (**Avanço no tempo**):

$$\mathcal{Z}\{f(k+1)\} = zF(z) - zf(0)$$

- Exemplo: Transformada de:

$$\mathcal{Z}\{f(k+1)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)z^{-n}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} f(m)z^{-m+1} \quad \text{, fazendo } m = n+1$$

$$= \mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} f(m)z^{-m} - f(0)\right\} \quad \text{, subtraindo a parte inicial de } f(m=0)$$

$$= z\,F(z) - z\,f(0)$$

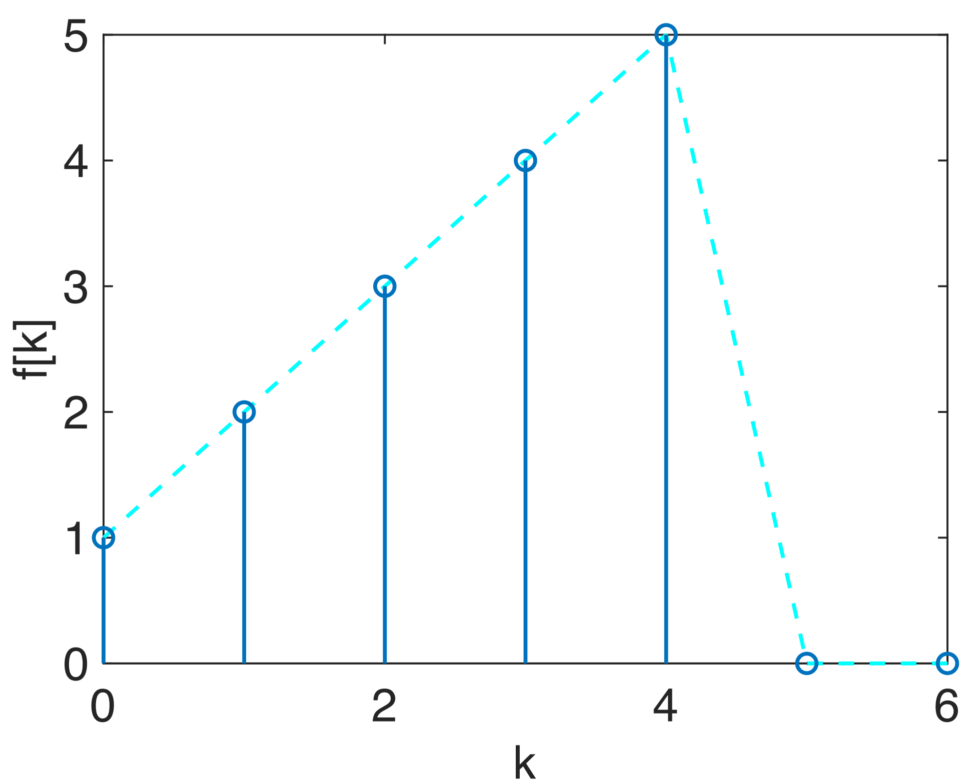
Propriedades da Transformada Z

2. **Translação** (**Avanço no tempo**):

$$\mathcal{Z}\left\{f(k+1)\right\} = zF(z) - zf(0)$$

- Exemplo:

Seja o sinal abaixo:

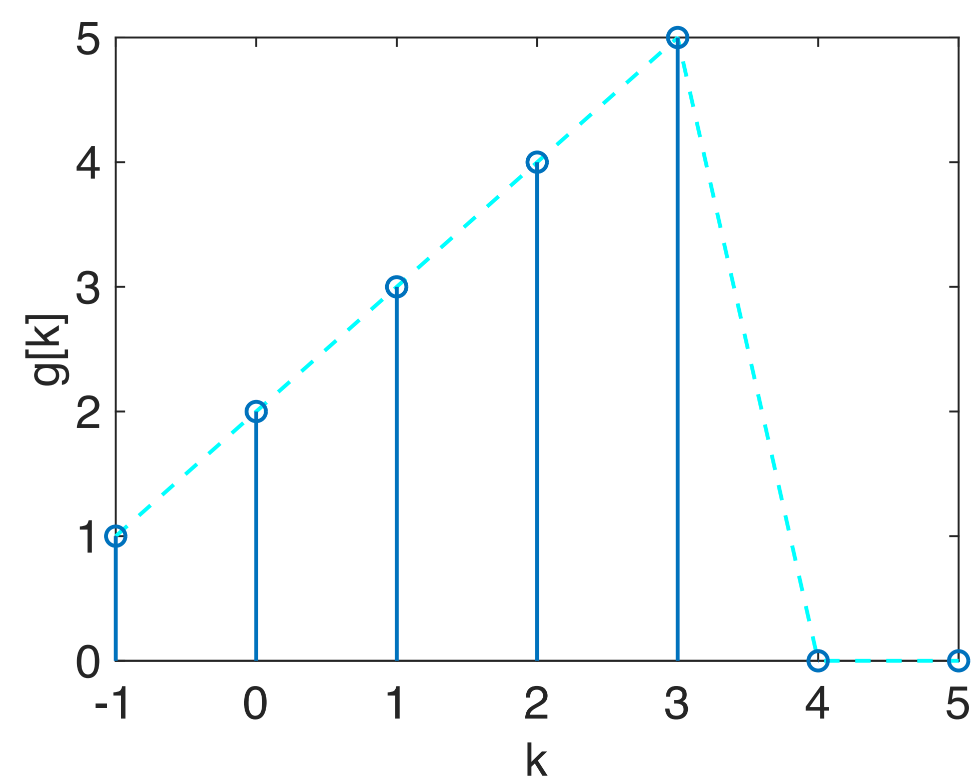


Avanço no tempo:

$$g[k] = f[k+1]$$

Assim:

$$g[0] = f[1]$$
$$g[1] = f[2]$$
$$g[2] = f[3]$$



Propriedades da Transformada Z

3.**Translação** (**Atraso no tempo**):

$$\mathcal{Z}\left\{x(t-nT)\right\} = z^{-n}\,X(z)$$

- Provando:

$$\mathcal{Z}\left\{x(t-nT)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT)z^{-k}$$

$$= z^{-n}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT)z^{-(k-n)}$$

Se $m = k - n$, então:

$$\mathcal{Z}\left\{x(t-nT)\right\} = z^{-n}\cdot\sum_{m=-n}^{\infty} x(mT)z^{-m}$$

$$\mathcal{Z}\left\{x(t-nT)\right\} = z^{-n}\cdot X(z)$$

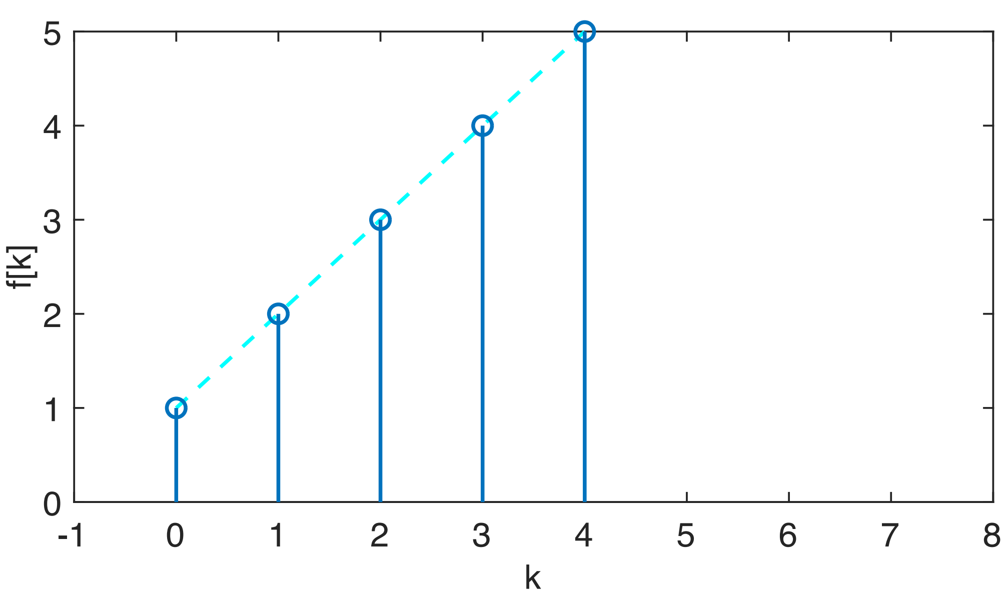
Propriedades da Transformada Z

2.**Translação** (**Atraso no tempo**):

$$\mathcal{Z}\left\{x(t-nT)\right\} = z^{-n}\,X(z)$$

- Exemplo$_1$:

Seja o sinal abaixo:

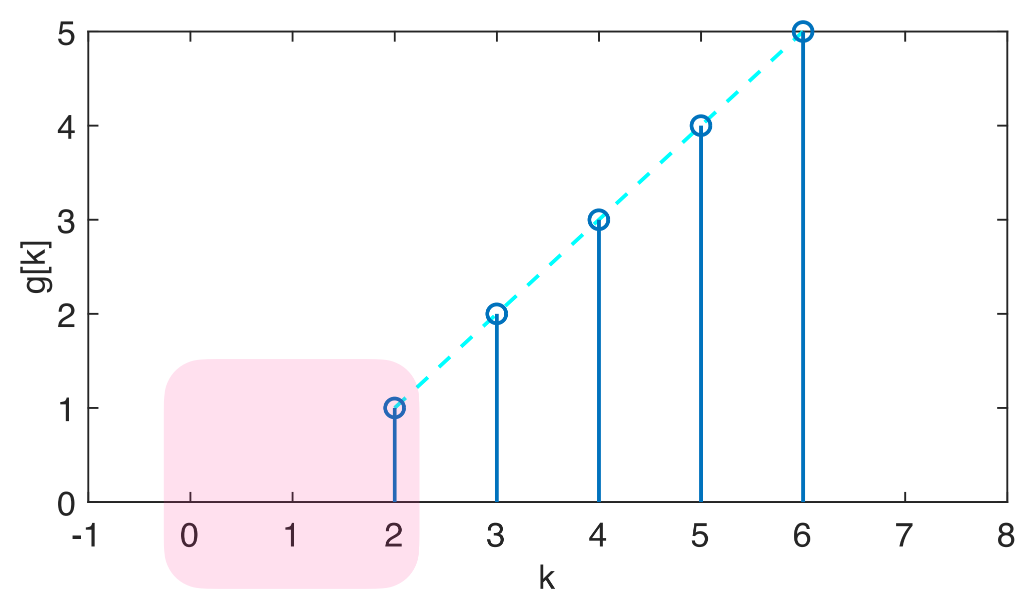


Atraso no tempo:

$$g[k] = f[k-2]$$

Assim:

$$g[0] = f[-2]$$
$$g[1] = f[-1]$$
$$g[2] = f[0]$$
$$g[3] = f[1]$$



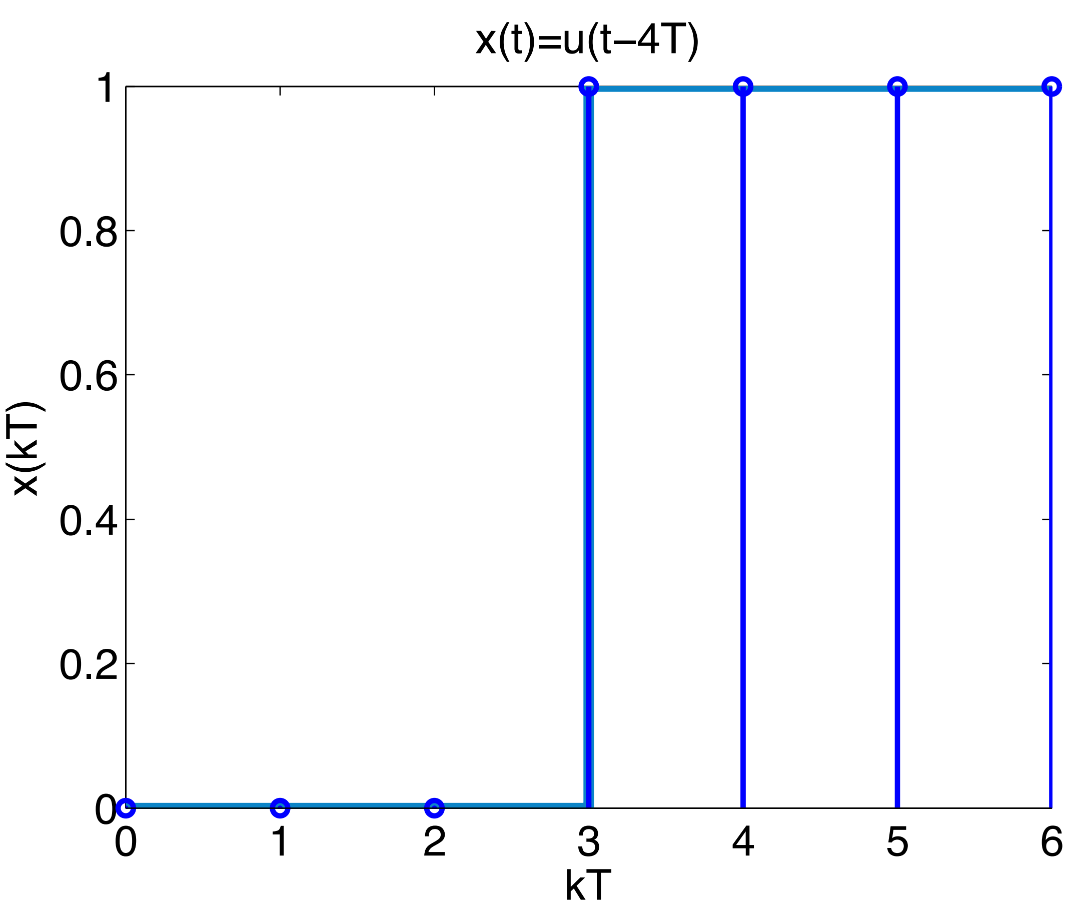

```
>> [k' f']
     0     1
     1     2
     2     3
     3     4
     4     5
     5     0
```

Propriedades da Transformada Z

3.Translação (Atraso no tempo):

$$\mathcal{Z}\left\{x(t-nT)\right\} = z^{-n}\,X(z)$$

- Exemplo$_2$: Encontre a transformada Z de uma função degrau que foi atrazada de 4 períodos de amostragem:



$$\mathcal{Z}\left\{1(t-4T)\right\} = z^{-4}\cdot\mathcal{Z}\left\{1(t)\right\}$$

$$= z^{-4}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{z^{-4}}{1-z^{-1}}$$

Propriedades da Transformada Z

4.**Translação Complexa**:

Se *x*(*t*) possui transformada *Z* igual à *X*(*z*), então a transformada *Z* de $e^{-at}\,x(t)$ pode ser definida como $X(z\,e^{aT})$.

$$\mathcal{Z}\left\{e^{-at}x(t)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\cdot e^{-akT}z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(ze^{aT})^{-k} = X(z\,e^{aT})$$

- Exemplo:

$$\mathcal{Z}\left\{e^{at}\cdot u(t)\right\} = U(e^{-aT}z) = \frac{1}{1-(e^{-aT}z)^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-aT}}$$

$$\mathcal{Z}\left\{u(t)\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\mathcal{Z}\left\{e^{-at}x(t)\right\} = X(z\,e^{aT})$$

Propriedades da Transformada Z

5.**Convolução** (multiplicação em freqüência):

$$\mathcal{Z}\left\{f(k) * g(k)\right\} = F(z) \cdot G(z)$$

- Prova:

$$\mathcal{Z}\left\{f(k) * g(k)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot g(n-k)\right\} \quad \leftarrow \text{ pela definição de convolução}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot g(n-k)\right] \cdot z^{-n} \quad \leftarrow \text{ pela definição da transformada Z}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot \sum_{m=-k}^{\infty} g(m) \cdot z^{-m-k} \quad \leftarrow \text{ fazendo } m = n - k$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k}\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty} g(m) \cdot z^{-m}\right]$$

$$= F(z) \cdot G(z)$$

Propriedades da Transformada Z

6. **Teorema do Valor Inicial**:

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

- Prova:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$$
$$= f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \ldots$$

Desta forma, se $z \to \infty$, todos os termos se anulam exceto para $f(0)$.

- Exemplo: $F(z) = \dfrac{8z+6}{z+2} = \dfrac{8+6z^{-1}}{1+2z^{-1}}$

Da propriedade do Valor Inicial, $f(0) = 8$.

Lembrar do exemplo anterior onde: $f(k) = 3\delta(k) + 5(-2)^k$

$$F(z) = 3(1) + 5\left(\frac{z}{z+2}\right) = \frac{8z+6}{z+2}$$

Propriedades da Transformada Z

7. Teorema do **Valor Final**:

$$f(\infty) = \lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1} (1 - z^{-1})\, F(z)$$

- Exemplo:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-a)}$$

$$y(\infty) = \lim_{z\to 1} (1 - z^{-1})\, Y(z) = \lim_{z\to 1} \left(\frac{z-1}{z}\right) Y(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-a)} = \frac{1}{1-a}$$

- Obs: O valor final (valor de regime permanente, “steady-state”) do sinal *y* é 1/(1-*a*), quando existe! Neste exemplo, isto é verdade se *a*<1, mas se entretanto, *a*>1, não existe valor final!

Exemplos

$x(\infty) = ?$ de $X(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}} - \dfrac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$ $(a > 0)$

Solução:

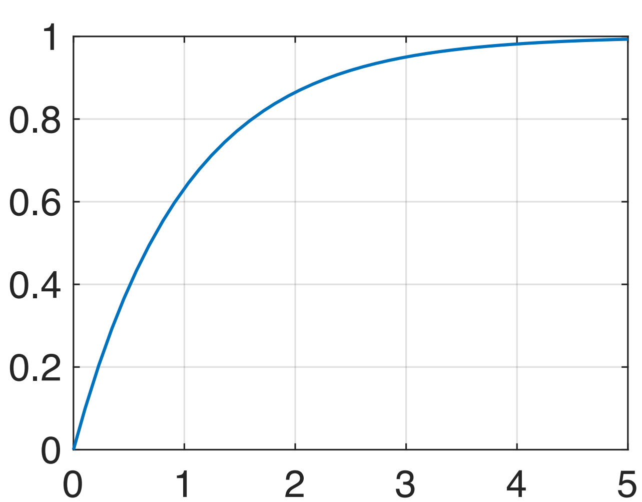
$$x(\infty) = \lim_{z \to 1} \left[(1 - z^{-1})\, X(z) \right]$$

$$= \lim_{z \to 1} \left[(1 - z^{-1}) \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \right) \right]$$

$$= \lim_{z \to 1} \left(1 - \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \right) = 1$$

Note que $X(z)$ é a transformada Z de $x(t) = 1 - e^{-at}$.

$$x(\infty) = \lim_{t \to \infty} (1 - e^{-at}) = 1$$




```
>> fplot(@(t) (1-exp(-1.*t)), [0 5])
```