# PARTE FINAL ROOT LOCUS

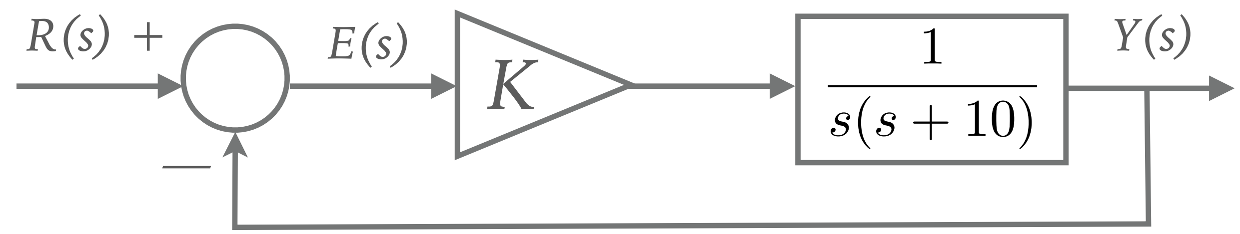
Controle Automático

Fernando Passold

# POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

$zeros \rightarrow$ x
$polos \rightarrow \circ$

- Seja o seguinte sistema: $G(s) = \dfrac{1}{s(s+10)}$
- O que acontece quando fechamos a malha com controlador proporcional?

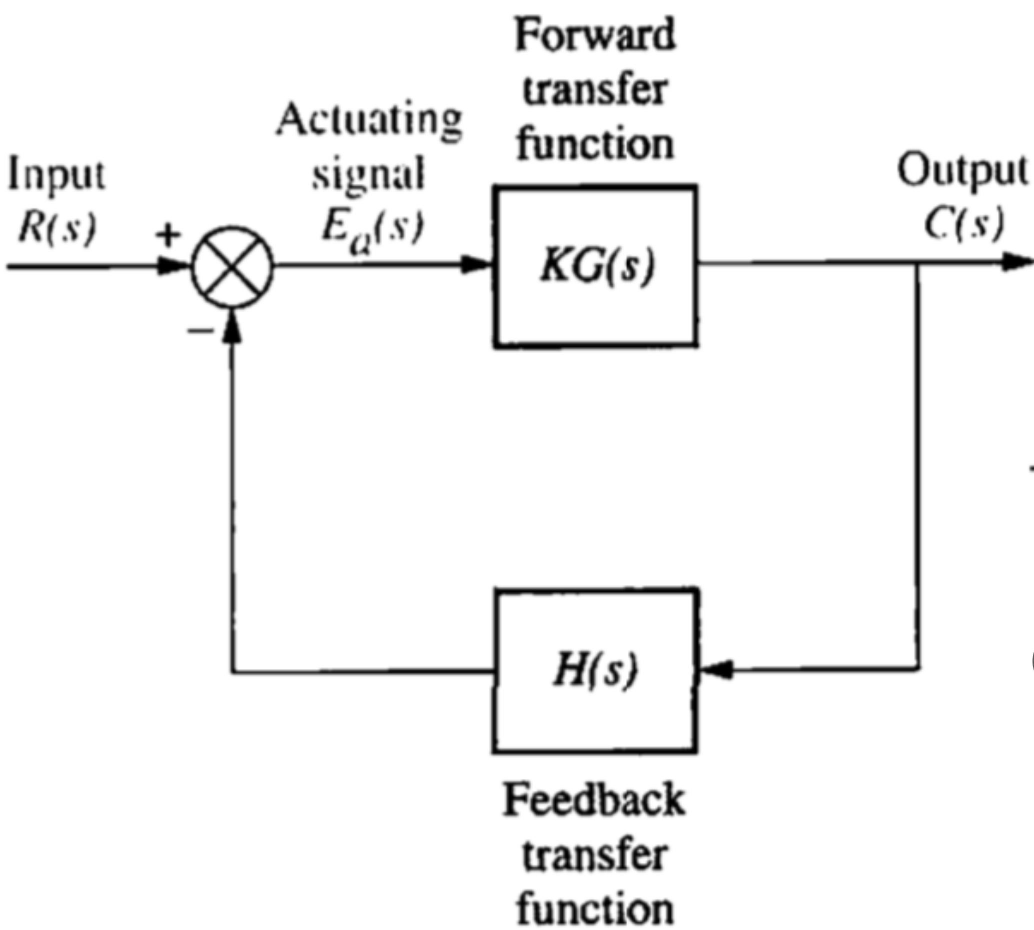


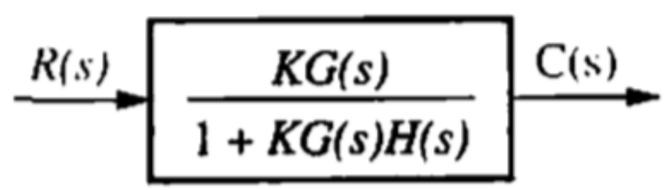

*(b) Fechando malha (apenas com controle proporcional).*

*(c) Fechando a malha:*

$$FTMF(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)} = \frac{R(s)}{C(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{K(s+2)}{(K+1)s + (2K+5)}$$

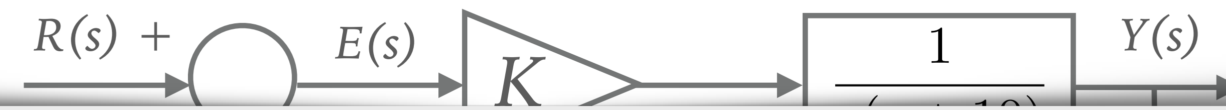



*(d) Sistema equivalente (FTMF).*

# EX_2: SISTEMA DE 2ª-ORDEM (SOMENTE 2 POLOS)

- Fechando malha e variando $K$:




*Pólos de MA em s=0 e s=-10.*

$$FTMF(s) = \frac{K}{s^2 + 10s + K}$$

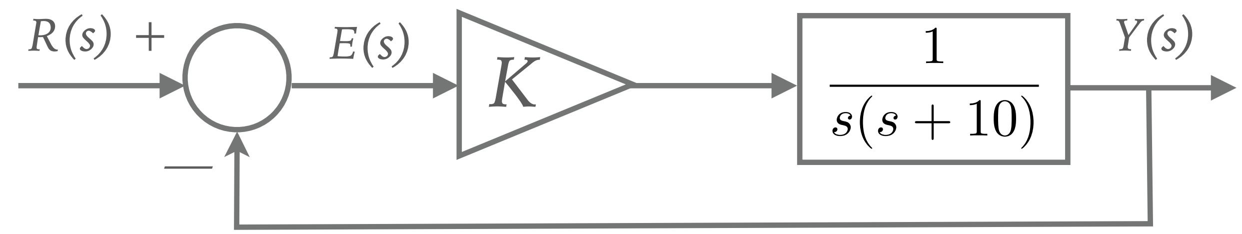
*Variando K obteremos os pólos de MF em*

| $K$ | Polo 1 | Polo 2 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $-10$ |
| 5 | $-9.47214$ | $-0.527864$ |
| 10 | $-8.87298$ | $-1.12702$ |
| 15 | $-8.16228$ | $-1.83772$ |
| 20 | $-7.23607$ | $-2.76393$ |
| 25 | $-5$ | $-5$ |
| 30 | $-5 + j2.23607$ | $-5 - j2.23607$ |
| 35 | $-5 + j3.16228$ | $-5 - j3.16228$ |
| 40 | $-5 + j3.87298$ | $-5 - j3.87298$ |
| 45 | $-5 + j4.47214$ | $-5 - j4.47214$ |
| 50 | $-5 + j5$ | $-5 - j5$ |

```
% Determinando faixa de p?los em MF, variando ganho para fig. 8.4 NISE
% Fernando Passold, em 01.04.2019
K=0:5:50;
u=length(K);
fprintf(' K & \\text{Polo 1} & \\text{Polo 2} \\\\ \n');
figure;
for i=1:u
    fprintf('%2g & ', K(i));
    EC = [1 10 K(i)]; % monta EC(s) (e mostra polin?mio)
    polo = roots(EC);
    fprintf('%g ', real(polo(1)));
    aux=num2str(K(i));
    if ~(isreal(polo(1)))
        plot(real(polo),imag(polo),'bx','LineWidth',2,'MarkerSize',12)
        text(real(polo)+.2,imag(polo),aux);
        aux=abs(imag(polo(j)));
        fprintf('+ j%g ', aux);
    else
        plot(real(polo),[0 0],'bx','LineWidth',2,'MarkerSize',12)
        text(real(polo)+.2,[0.2 0.2],aux);
    end
    fprintf(' & %g ', real(polo(2)));
    if ~(isreal(polo(1)))
        fprintf('- j%g ', aux);
    end
    if i==1
        hold on
    end
    fprintf(' \\\\\n');
end
title('Plano-s');
xlabel('Real (\sigma)');
ylabel('Imag (j\omega)');
```

# EX_2: SISTEMA DE 2ª-ORDEM (SOMENTE 2 POLOS)

- Fechando malha e variando *K*:

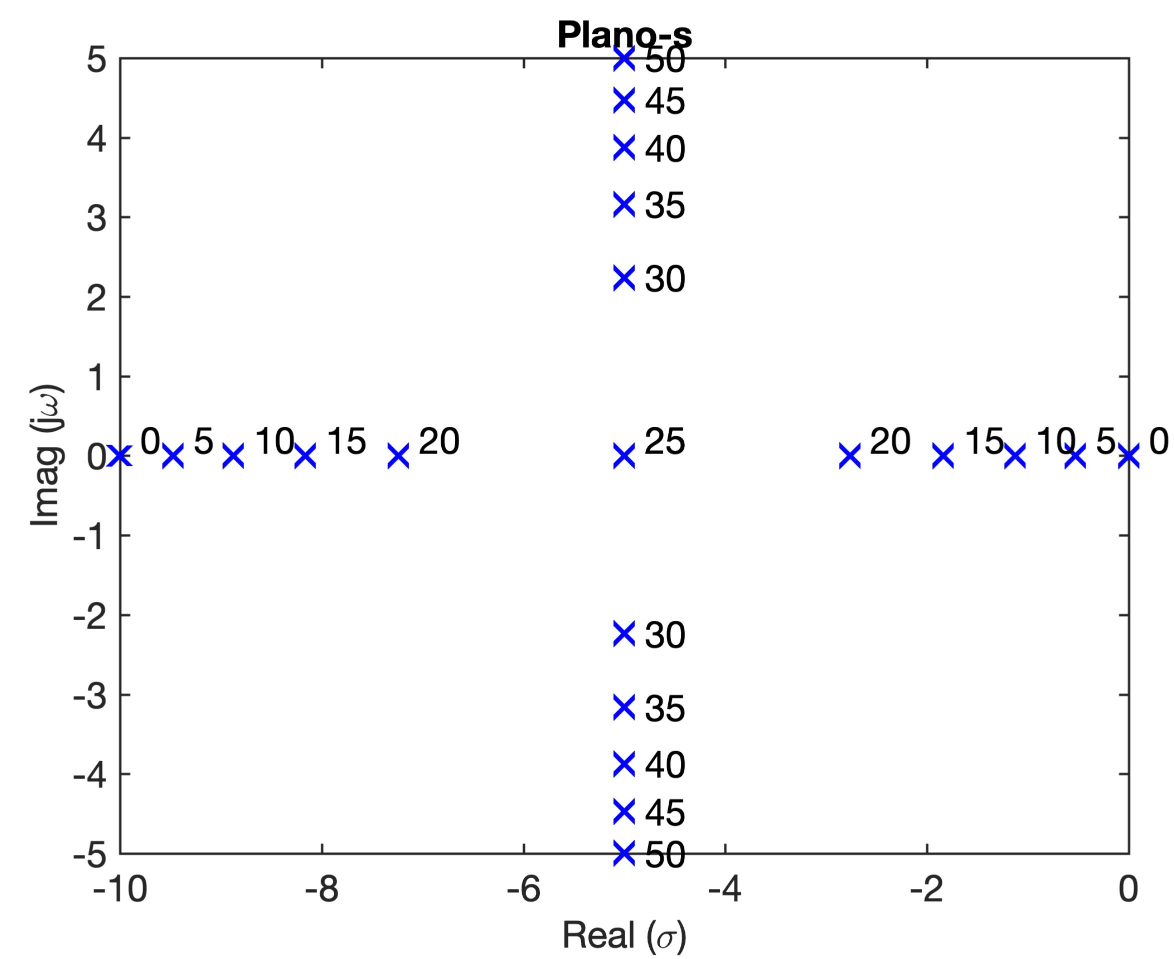



*Pólos de MA em s=0 e s=-10.*

$$FTMF(s) = \frac{K}{s^2 + 10s + K}$$

*Variando K obteremos os pólos de MF em:*

| $K$ | Polo 1 | Polo 2 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $-10$ |
| 5 | $-9.47214$ | $-0.527864$ |
| 10 | $-8.87298$ | $-1.12702$ |
| 15 | $-8.16228$ | $-1.83772$ |
| 20 | $-7.23607$ | $-2.76393$ |
| 25 | $-5$ | $-5$ |
| 30 | $-5 + j2.23607$ | $-5 - j2.23607$ |
| 35 | $-5 + j3.16228$ | $-5 - j3.16228$ |
| 40 | $-5 + j3.87298$ | $-5 - j3.87298$ |
| 45 | $-5 + j4.47214$ | $-5 - j4.47214$ |
| 50 | $-5 + j5$ | $-5 - j5$ |



# PROPRIEDADES (REGRAS) DO ROOT LOCUS (RL)

$$FTMF(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)H(s)}$$

$$EC(z) = 1 + K \cdot G(s)H(s) = 0$$

$$K \cdot G(s)H(s) = -1 \quad = 1\,\angle[(2k+1)\cdot 180^o], \quad \text{onde: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

$$\left| K \cdot G(s)H(s) \right| = 1$$

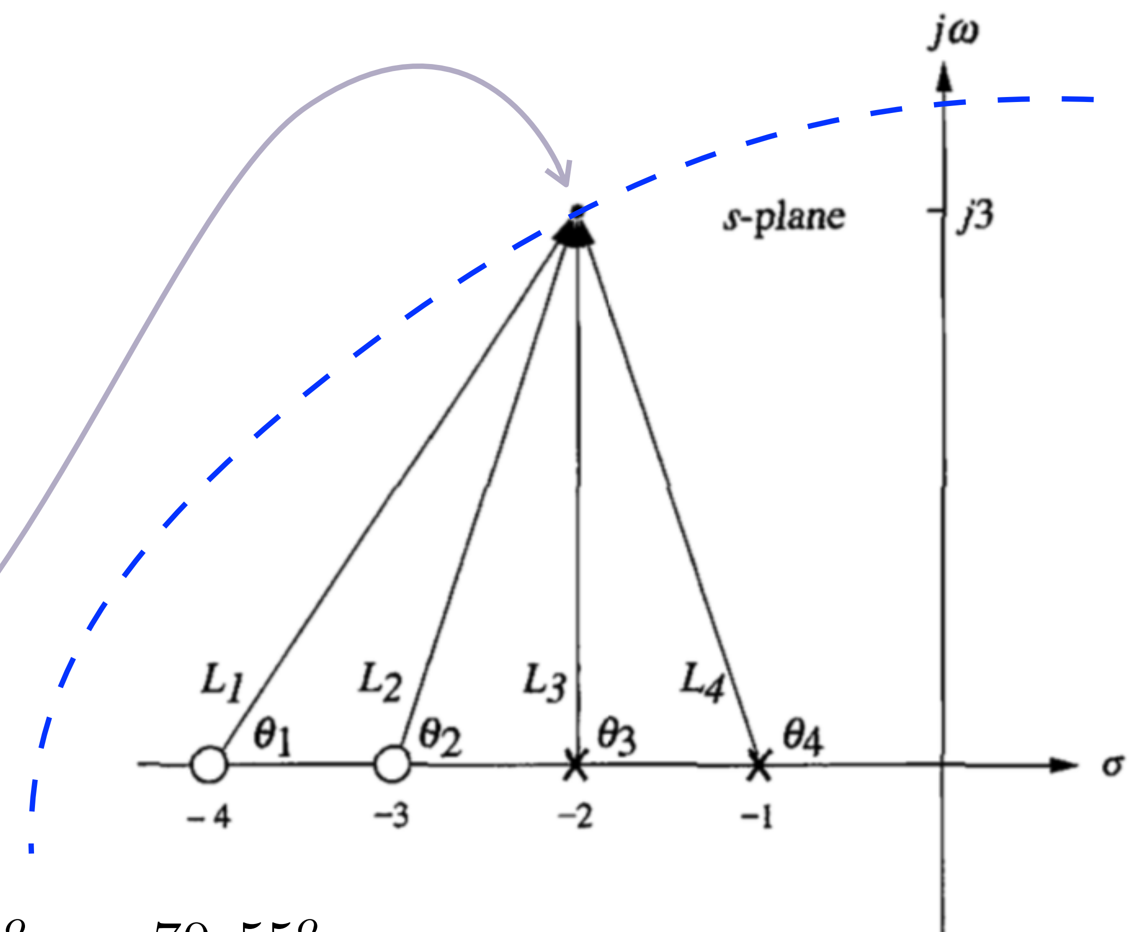
$$\angle KG(s)H(s) = (2k+1)\cdot 180^o$$

*Para um ponto no plano-s pertencer ao traço do RL:*

*Somatório dos ângulos = 180º:*

$$\sum \angle(\text{Zeros}) - \sum \angle(\text{Polos}) = \text{No. Ímpar} \cdot 180^o$$

*Exemplo: ponto s=-2+j3 pertence ao RL (para certo valor de K) !?*




$$\theta_1 + \theta_2 - (\theta_3 + \theta_4) = 56,31^o + 71,57^o - 90^o - 108,43^o = -70,55^o$$

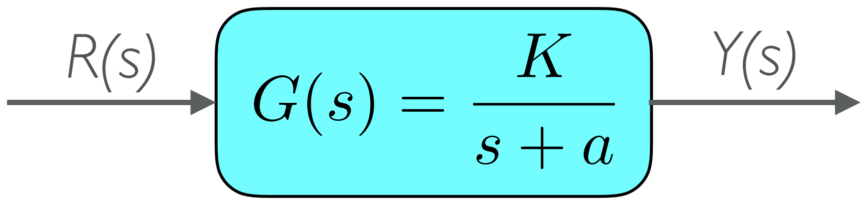
$\Rightarrow$ *Conclusão: Não pertence ao RL (não pode ser um pólo de MF).*

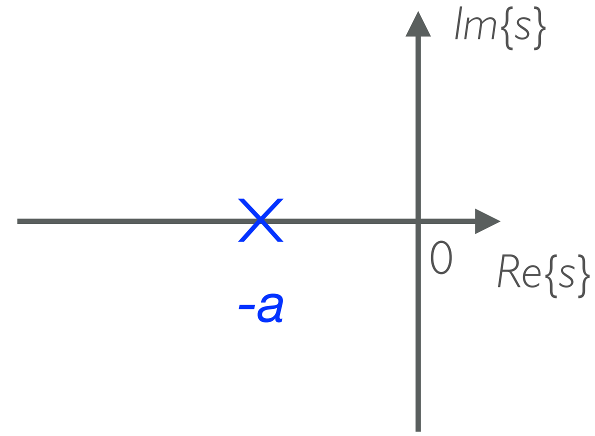
# Porque o RL é importante?

- A idéia é fechar uma malha e fazer o RL do sistema em MF passar por pontos desejados (pólos desejados para MF);
- Normalmente apenas fechar a malha com Controlador Proporcional não é suficiente;
- Então nosso controlador “simplesmente" acrescenta pólos e zeros de forma a deliberadamente afetar o RL resultante de forma que o mesmo passe sobre pontos desejados (pólos desejados de MF).
- Naturalmente que acrescentar pólos e zeros impacta no comportamento da resposta do sistema
- Acrescentar pólo na origem significa incorporar ação integral ao sistema em MF (para zerar algum erro de regime permanente)
- Acrescentar zero na origem significa incorpora ação derivativa, isto é, tornar o sistema mais “sensível" para variações do erro.
- Tirar um pólo da origem transforma uma ação integral em ação (de controle) com atraso (controlador Lag);
- Descolar o zero o da origem significa transformar uma ação derivativa em ação (de controle) com avanço (controlador Lead).
- E naturalmente que podemos “cascatear" controladores (com ações) diferentes para buscar certo comportamento (dinâmica) na resposta temporal e em regime permanente. Dai surgem os controladores Lead-lag e PID.

# Respostas típicas de sistema de 1ª-ordem

- Seja:



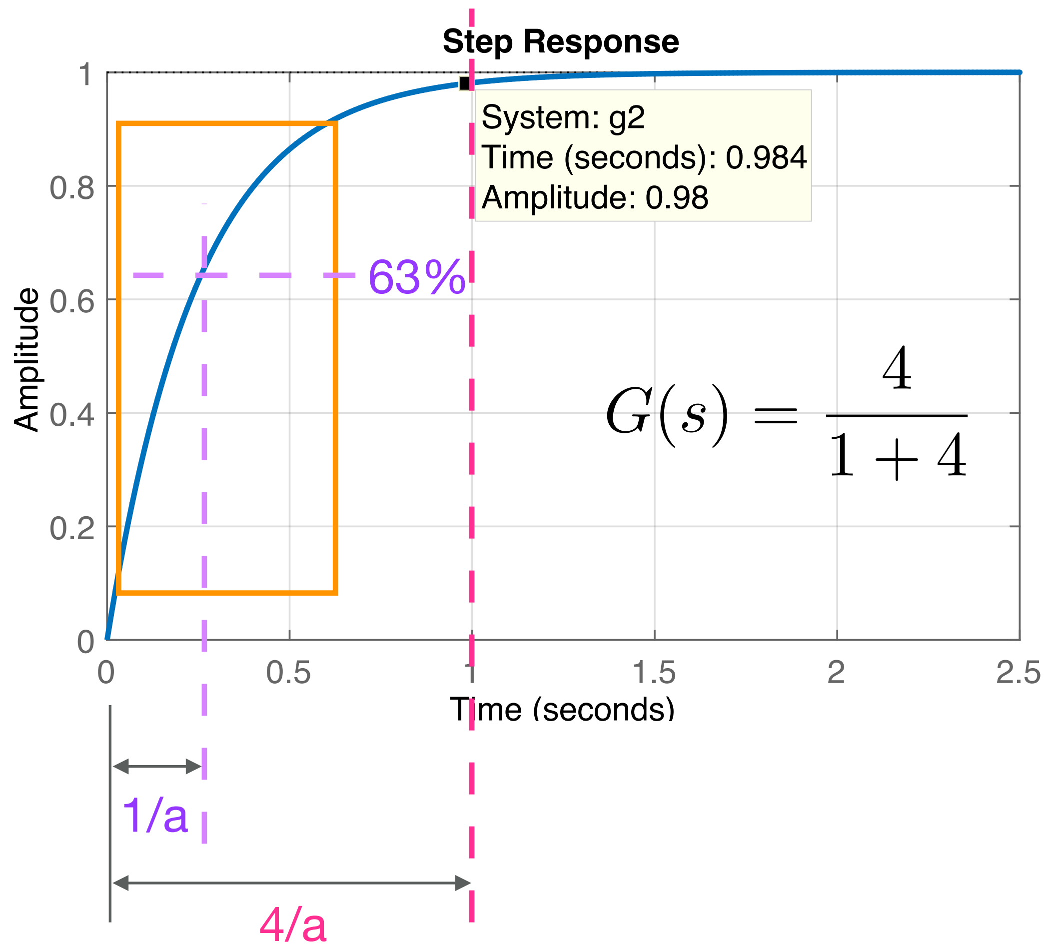

Resposta em MA:

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= R(s) \cdot G(s) \\
&= \frac{1}{s} \cdot \frac{K}{(s+a)} \\
&= \frac{K/a}{s} - \frac{K/a}{(s+a)}
\end{aligned}
$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = \frac{K}{a} - \frac{K}{a} e^{-at}$$

$$\tau = \frac{1}{a} \qquad t_s = \frac{4}{a}$$

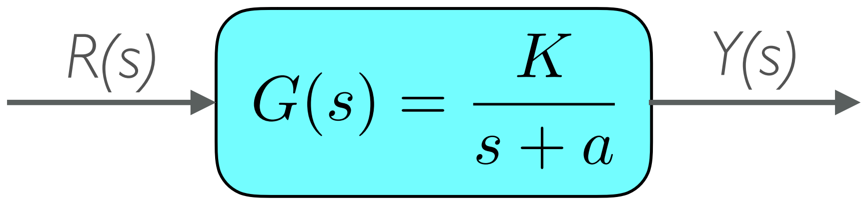


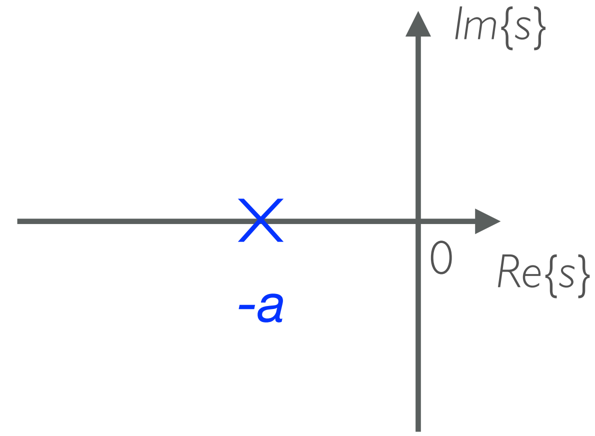

$$t_s = \frac{4}{a} = \frac{4}{4} = 1 \quad \therefore \quad \text{tempo de assentamento: } K/a \cdot 0,98$$

$$t_r = \frac{2,2}{a} = \frac{2,2}{4} = 0,55 \quad \therefore \quad \text{tempo de subida: } K/a \cdot [0,1 \sim 0,9]$$

# Respostas típicas de sistema de 1ª-ordem

- Seja:



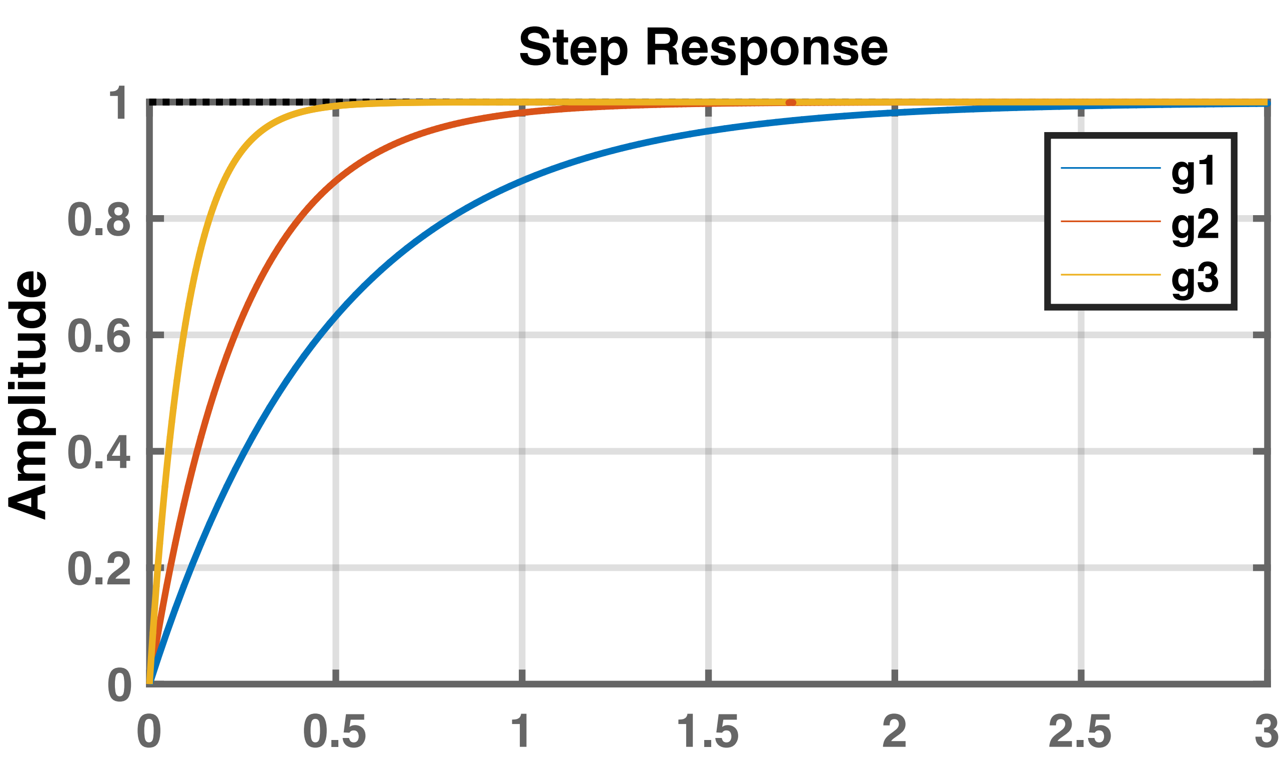

Resposta em MA:

$$\begin{aligned} Y(s) &= R(s)\cdot G(s) \\ &= \frac{1}{s}\cdot\frac{K}{(s+a)} \\ &= \frac{K/a}{s} - \frac{K/a}{(s+a)} \end{aligned}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = \frac{K}{a} - \frac{K}{a}e^{-at}$$

$$g_1(s) = \frac{2}{s+2}; \qquad g_2(s) = \frac{4}{s+4}; \qquad g_3(s) = \frac{10}{s+10};$$

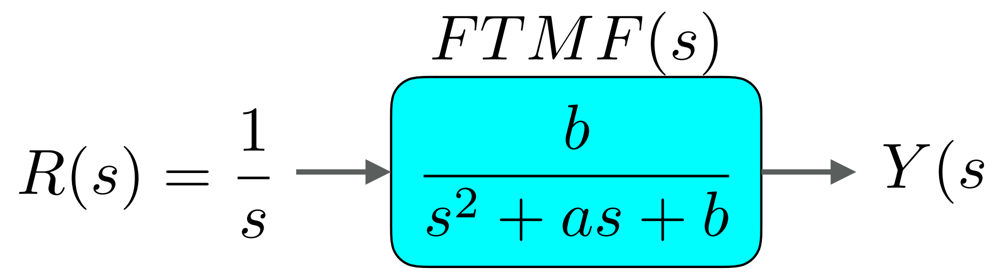



**Conclusão**:
- quanto mais afastado o pólo estiver da origem do plano-s
⇒ mais rápida a resposta!

```
>> g1=tf(2,[1 2]);
>> step(g1)
>> g2=tf(4,[1 4]);
>> g3=tf(10,[1 10]);
>> step(g3)
>> step(g1, g2, g3)
>> axis([0 3 0 1])
>> grid
```

# Respostas típicas de sistemas de 2ª-ordem

- Equações do sistema (MF):

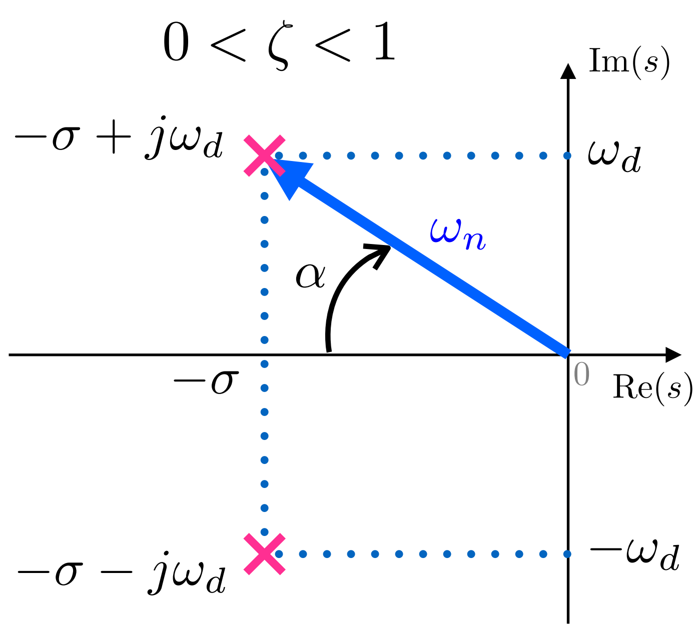


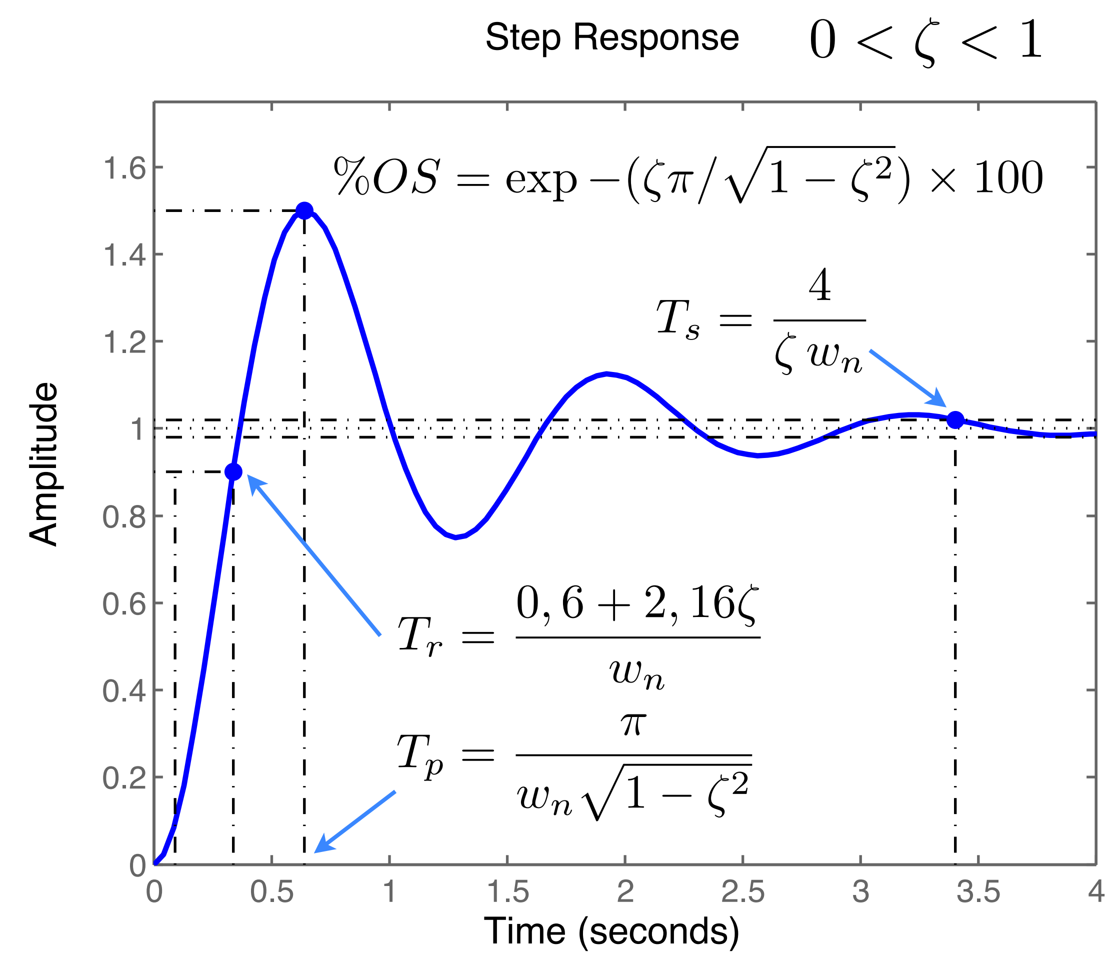

$$FTMF(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)} = K\left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right)$$

pólos em: $s = \sigma \pm j\omega_d$ ou: $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$\begin{aligned} \sigma &= \omega_n \cos(\alpha) = \omega_n \zeta; \\ \omega_d &= \omega_n \sin(\alpha) = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}; \\ \zeta &= \cos(\alpha); \\ \sin(\alpha) &= \sqrt{1-\zeta^2}; \end{aligned}$$



# Respostas típicas de sistemas de 2ª-ordem

$$R(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow \boxed{\underset{FTMF(s)}{\dfrac{b}{s^2+as+b}}} \longrightarrow Y(s)$$

- Tipos de respostas:

- Super amortecido: $\zeta > 1$

$$\frac{9}{s^2+9s+9}$$

```
>> pole(g1)
  -7.8541
  -1.1459
```

- **Subamortecido:** $0 < \zeta < 1$

$$\frac{9}{s^2+2s+9}$$

```
>> pole(g2)
 -1.0000 + 2.8284i
  -1.0000 - 2.8284i
```

$$y(t) = 1 - \exp(-\zeta\omega_n t) \cdot \left[\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t)\right]$$

- Oscilatório: $\zeta = 0$

$$\frac{9}{s^2+9}$$

```
>> pole(g3)
   0.0000 + 3.0000i
   0.0000 - 3.0000i
```

- Criticamente amortecido: $\zeta = 1$

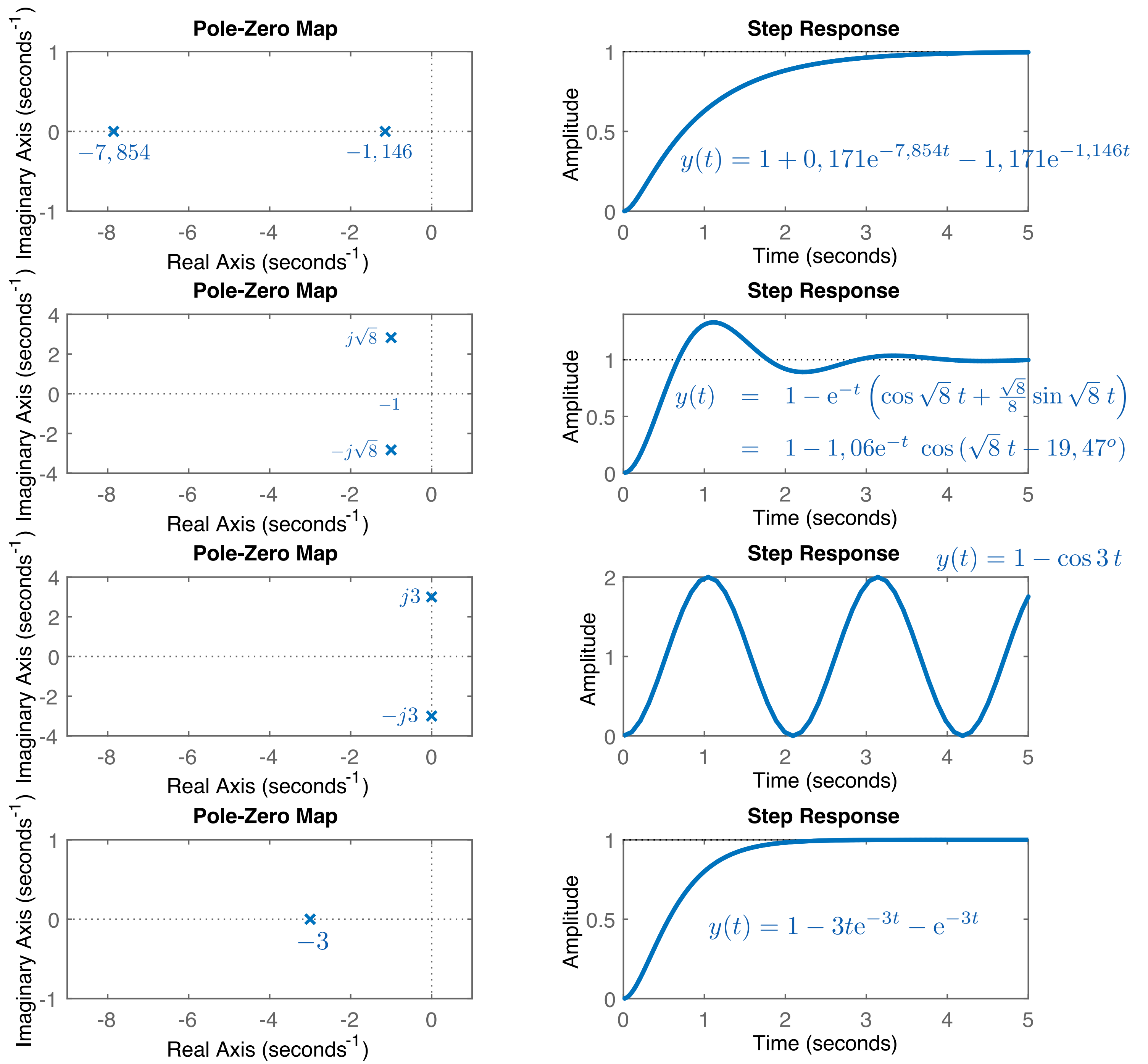
$$\frac{9}{s^2+6s+9}$$

```
>> pole(g4)
   -3.0000 + 0.0000i
   -3.0000 - 0.0000i
```

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{b}{s^2+as+b}$$

pólos em: $s = \sigma \pm j\omega_d$

$$\begin{cases} \sigma = \omega_n\zeta; \\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}; \end{cases}$$



# Linhas guias no plano-s

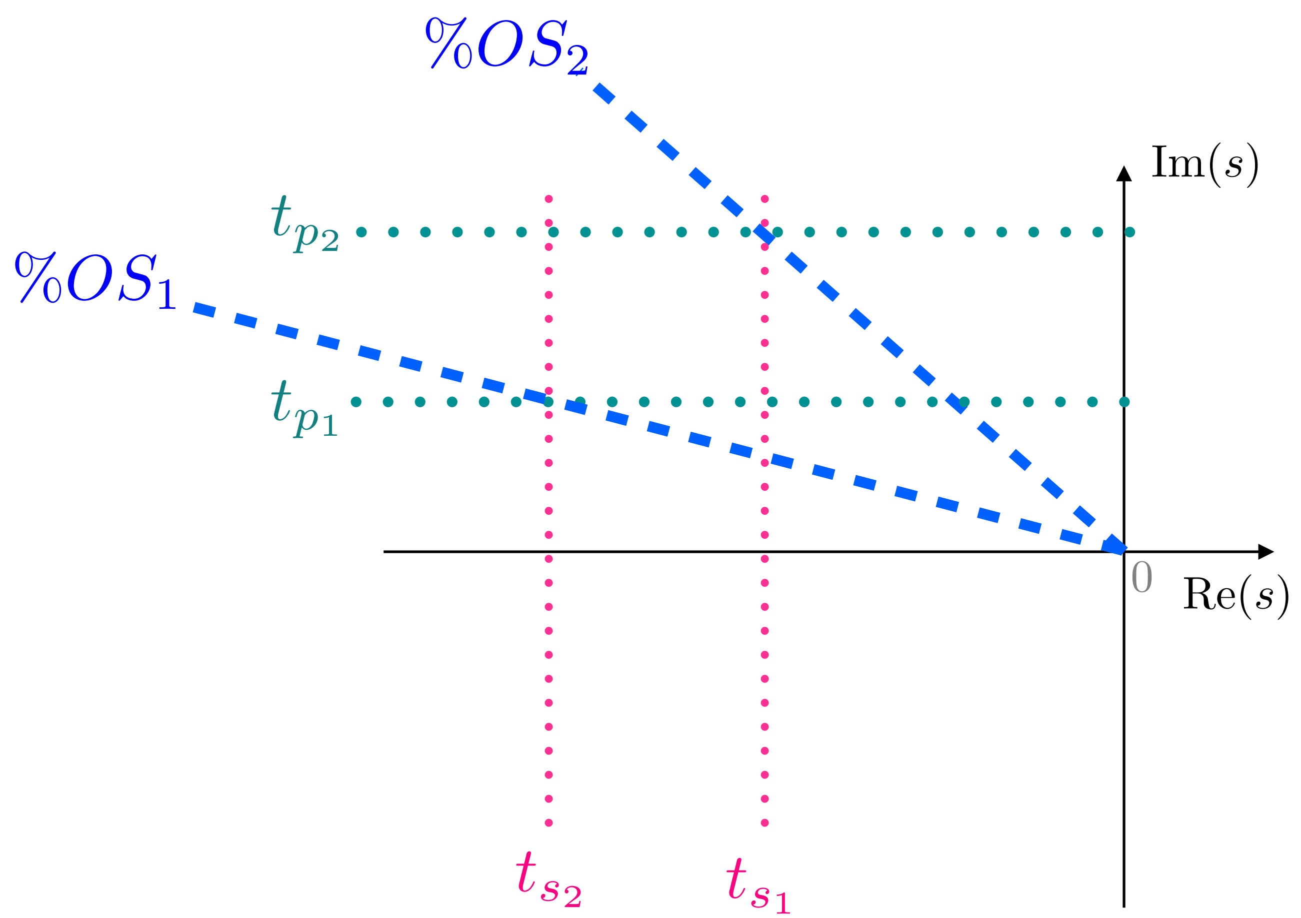
$$\%OS = \exp\left(-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}\right) \times 100$$

$$\zeta = \cos(\alpha)$$

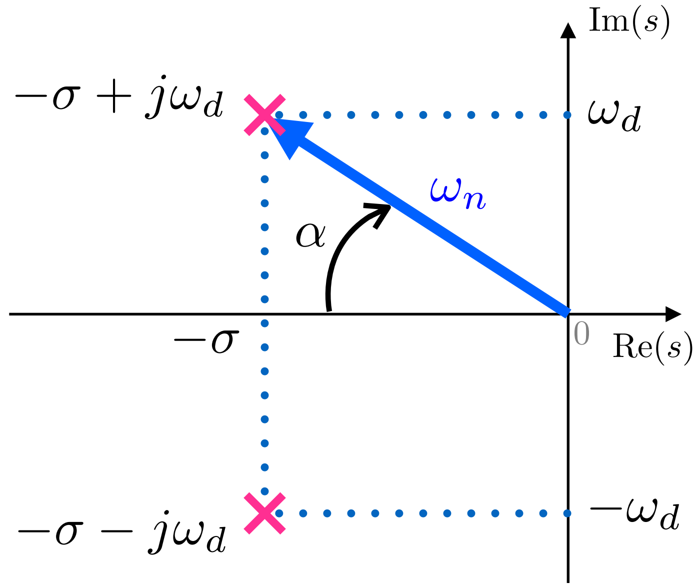
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$t_s = \frac{-\ln\left(0,02\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\zeta\omega_n}$$

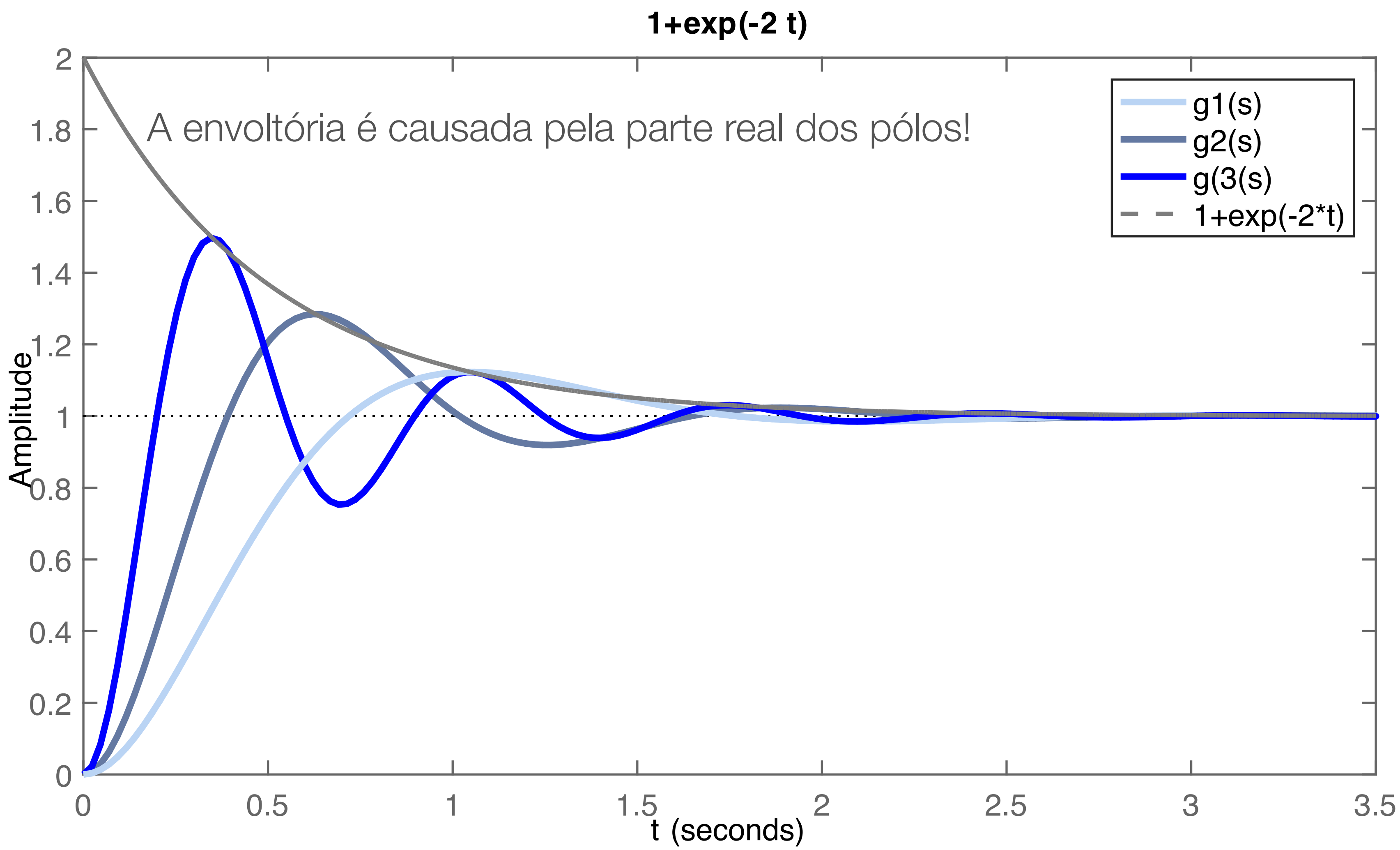
$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma} \qquad \text{para: } 0 < \zeta < 0,9$$

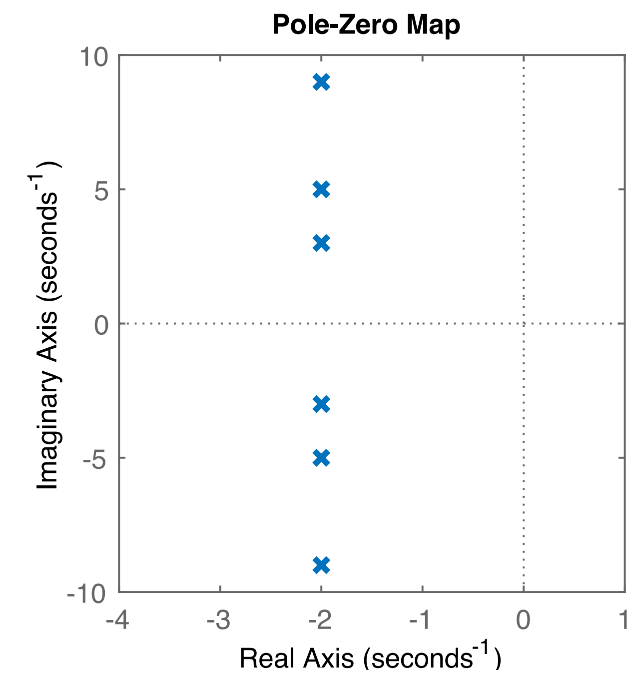



$$\%OS_2 > \%OS_1$$
$$t_{s_2} < t_{s_1}$$
$$t_{p_2} < t_{p_1}$$



# Respostas sistemas de 2ª-ordem subamortecidos




$$g_1(s) = \frac{13}{(s^2+4s+13)} = \frac{13}{(s+2+j3)(s+2-j3)}$$

$$= \frac{(3{,}6056)^2}{s^2+2(0{,}5547)(3{,}6056)s+(3{,}6056)^2}$$

$$g_2(s) = \frac{9}{(s^2+2s+9)} = \frac{13}{(s+2+j5)(s+2-j5)}$$

$$= \frac{(5{,}3852)^2}{s^2+2(0{,}3714)(5{,}3852)s+(5{,}3852)^2}$$

$$g_3(s) = \frac{85}{(s^2+4s+85)} = \frac{85}{(s+2+j9)(s+2-j9)}$$

$$= \frac{(9.2195)^2}{s^2+2(0{,}2169)(9.2195)s+(9.2195)^2}$$

Mesma parte real!