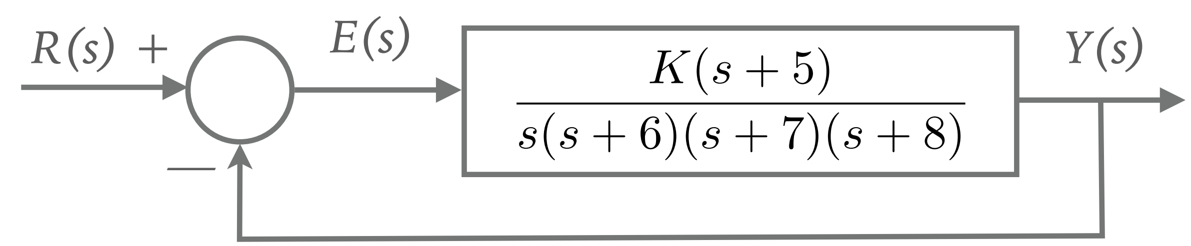
ROOT LOCUS

INTRO…

Controle Automático II
Prof. Fernando Passold
Engenharia Elétrica — UPF

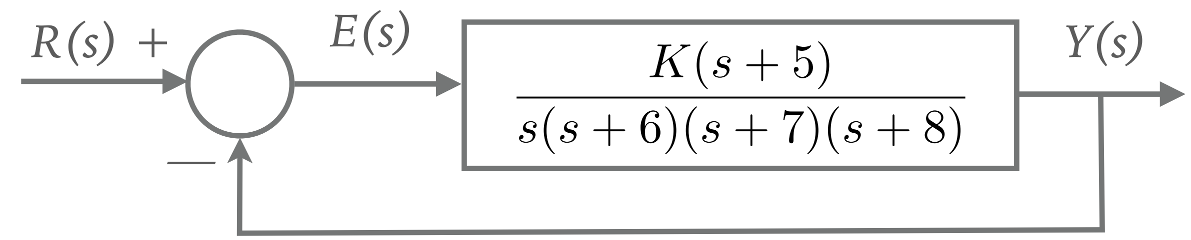
EXEMPLO 7.6

- Dado o sistema de controle mostrado na figura ao lado, encontre o valor de K para limitar o valor do erro de regime permanente à 10%.



EXEMPLO 7.6

➤ Dado o sistema de controle mostrado na figura ao lado, encontre o valor de K para limitar o valor do erro de regime permanente à 10%.



Solução:

Como o sistema (FTMA(s)) é do tipo 1 (um integrador presente), o erro estabelecido no problema só faz sentido para entrada rampa; somente uma entrada rampa leva a um erro constante para sistemas do tipo 1.

$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{K_v}, \quad \text{onde:} \quad K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s)$$

$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0,1 \quad \therefore \quad K_v = 1/0,1 = 10$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = \frac{K\times 5}{6\times 7\times 8} = 10 \quad \therefore \quad K = 672$$

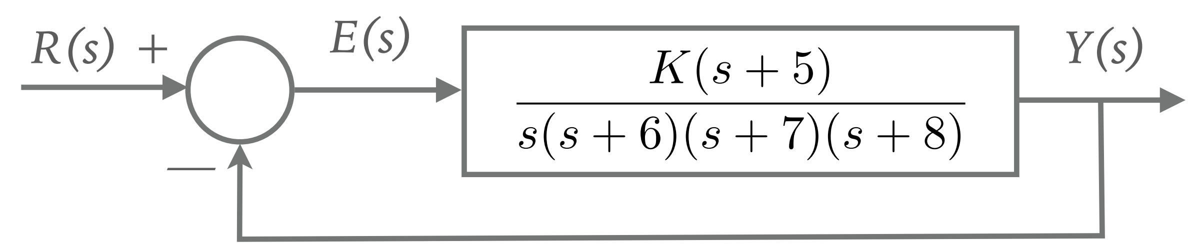
Simulando no MATLAB:

```
>> G=tf([1 5],poly([0 -6 -7 -8]));
>> zpk(G)
          (s+5)
  -------------------
  s (s+8) (s+7) (s+6)
>> K=672;
>> ftmf=feedback(K*G,1)
```

```
>> t=0:0.01:9; % criando vetor tempo
>> u=length(t) % qtdade termos gerados
u =   901
>> slope=1/5    % declive da rampa
slope =    0.2000
>> ramp=0.2*t;  % criando rampa
>> 5/0.01  % t= 5 (seg) = índice ?
ans =   500
>> t(500)
ans =    4.9900
>> ramp(501:u)=1; % limitando rampa p/ t>=5
>> plot(t,ramp) % opcional
>> figure; lsim(ftmf, ramp, t)
```

EXEMPLO 7.6

- Dado o sistema de controle mostrado na figura ao lado, encontre o valor de K para limitar o valor do erro de regime permanente à 10%.



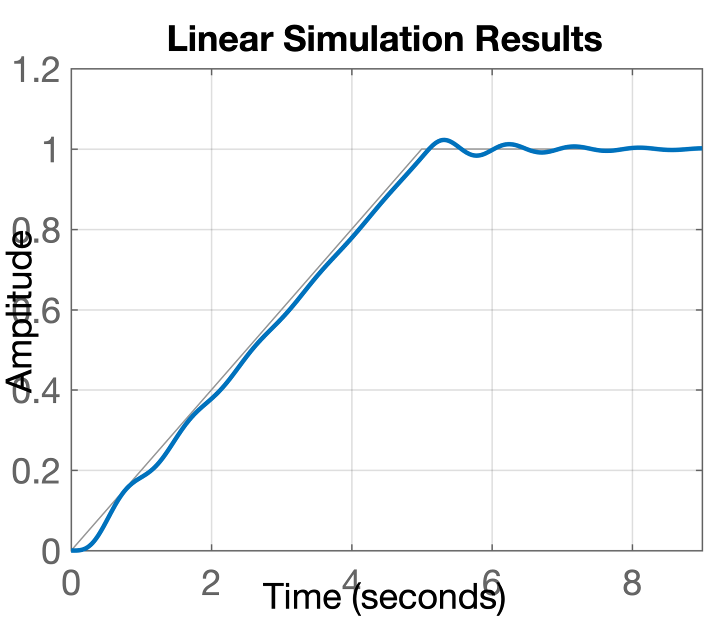
Solução:

Como o sistema (FTMA(s)) é do tipo 1 (um integrador presente), o erro estabelecido no problema só faz sentido para entrada rampa; somente uma entrada rampa leva a um erro constante para sistemas do tipo 1.

$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{K_v}, \quad \text{onde:} \quad K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s)$$

$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0,1 \quad \therefore \quad K_v = 1/0,1 = 10$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = \frac{K \times 5}{6 \times 7 \times 8} = 10 \quad \therefore \quad K = 672$$

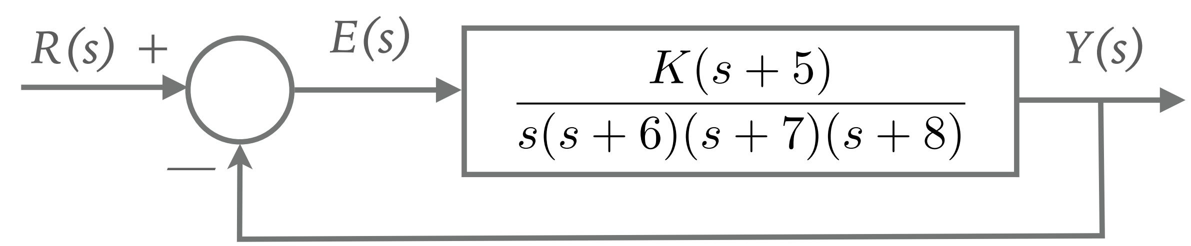


));

```
>> t=0:0.01:9; % criando vetor tempo
>> u=length(t) % qtdade termos gerados
u =   901
>> slope=1/5    % declive da rampa
slope =    0.2000
>> ramp=0.2*t;  % criando rampa
>> 5/0.01  % t= 5 (seg) = índice ?
ans =   500
>> t(500)
ans =    4.9900
>> ramp(501:u)=1; % limitando rampa p/ t>=5
>> plot(t,ramp) % opcional
>> figure; lsim(ftmf, ramp, t)
```

EXEMPLO 7.6

➤ Dado o sistema de controle mostrado na figura ao lado, encontre o valor de K para limitar o valor do erro de regime permanente à 10%.

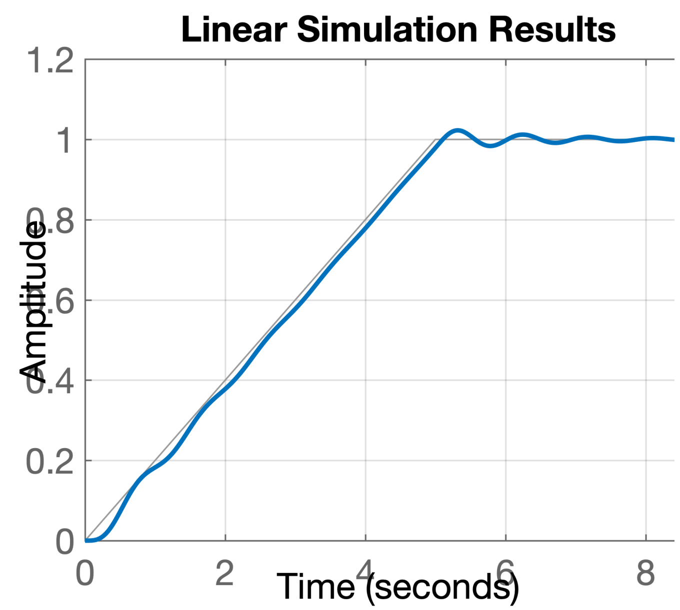


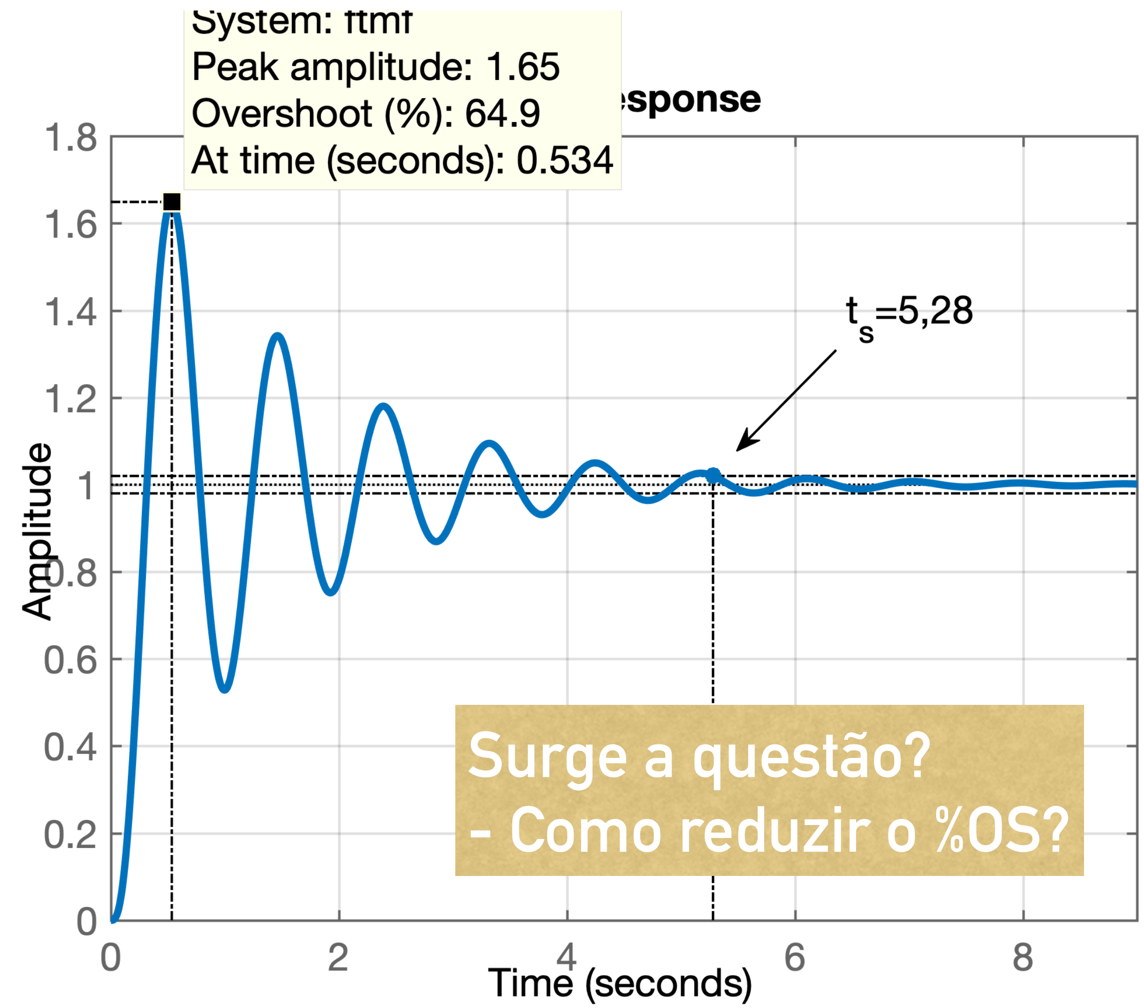
Detalhes:

O erro para entrada rampa pode ter ficado limitado à 10%, porém observe a dinâmica do sistema para uma entrada degrau (apesar do erro nulo em regime permamente):

Simulando no MATLAB:

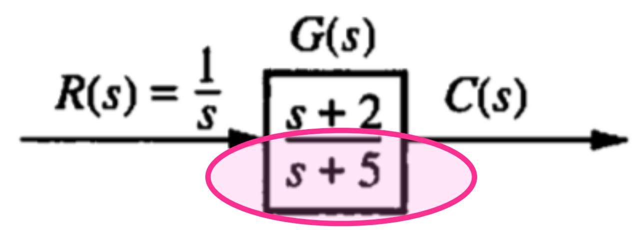
```
>> G=tf([1 5],poly([0 -6 -7 -8]));
>> zpk(G)
          (s+5)
   -------------------
   s (s+8) (s+7) (s+6)
>> K=672;
>> ftmf=feedback(K*G,1)
```



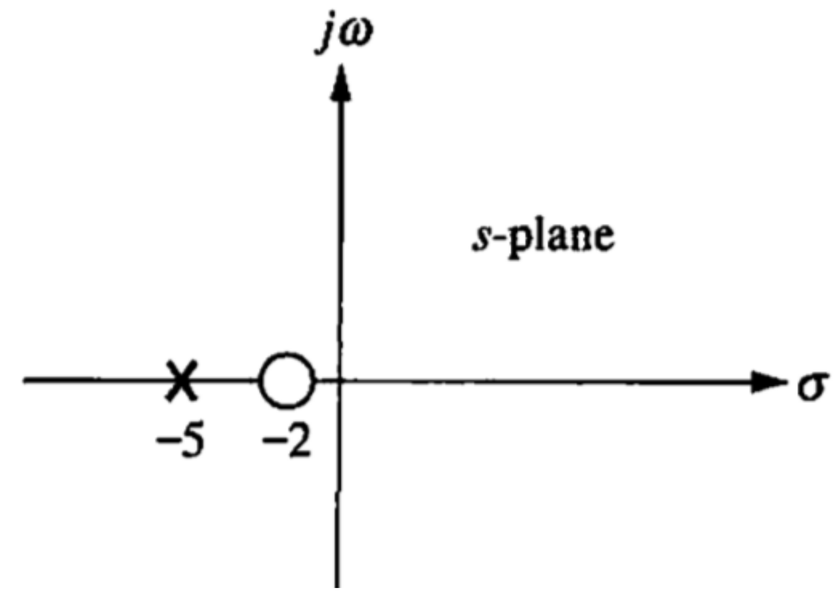


POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- A resposta a uma entrada degrau unitário leva à:



(a) Sistema em MA.



(b) Pólos e zeros de MA no plano-s

Degrau: $\mathcal{L}\{u(t)\} = 1/s$

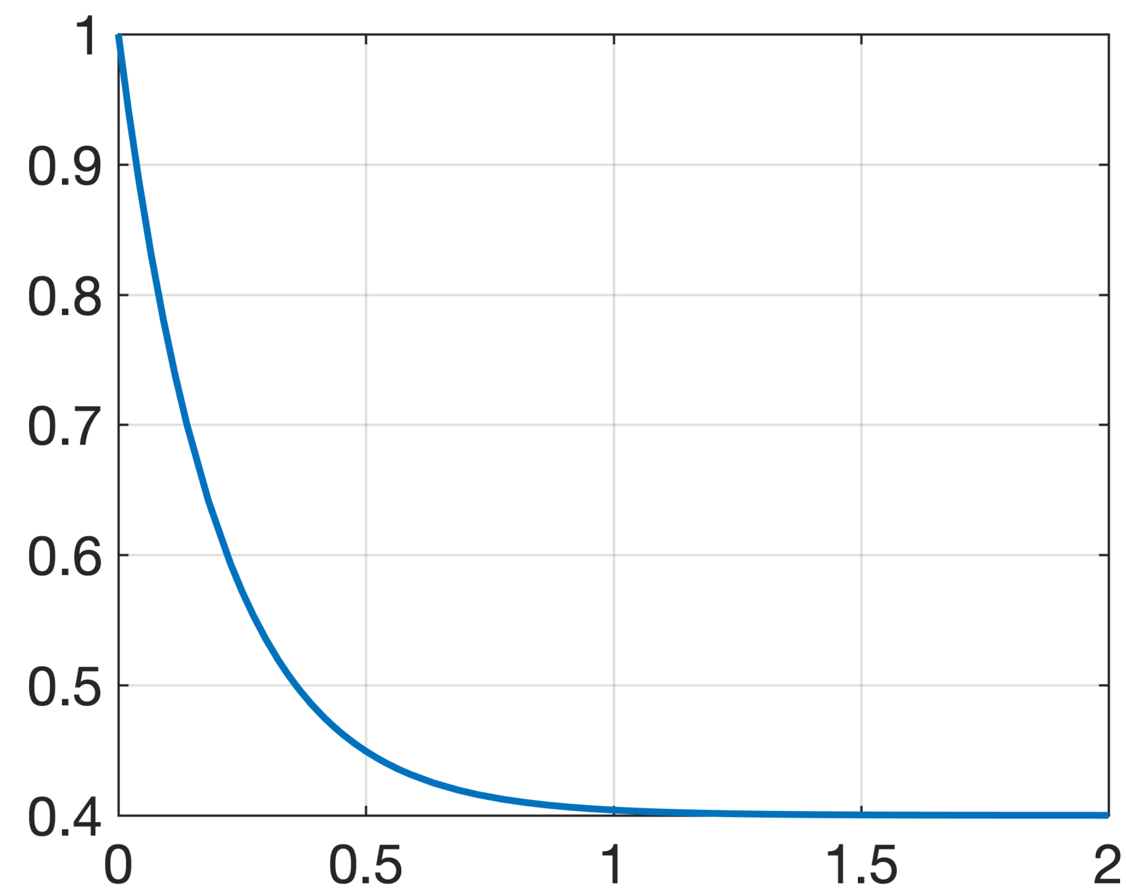
$$C(s) = \frac{(s+2)}{s\,(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5}$$

$$A = \left.\frac{(s+2)}{(s+5)}\right|_{s=0} = \frac{2}{5}$$

$$B = \left.\frac{(s+2)}{s}\right|_{s=-5} = \frac{3}{5}$$

$$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{e}^{-5t}$$

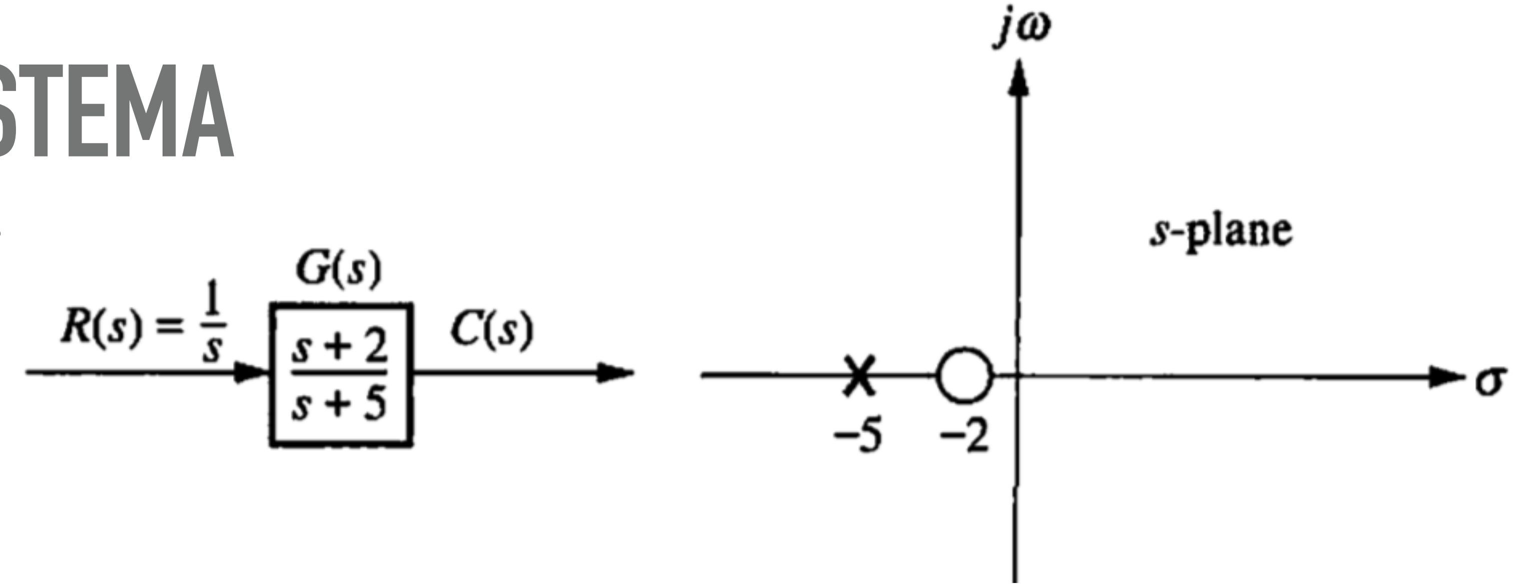
```
>> fplot(@(t) (2/5)+(3/5)*exp(-5*t), [0 2])
>> grid
```



ps.: Note que o pólo em s = −5 é estável (resposta converge no tempo)

POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- A resposta a uma entrada degrau unitário leva à:



(a) Sistema em MA. *(b) Pólos e zeros de MA no plano-s*

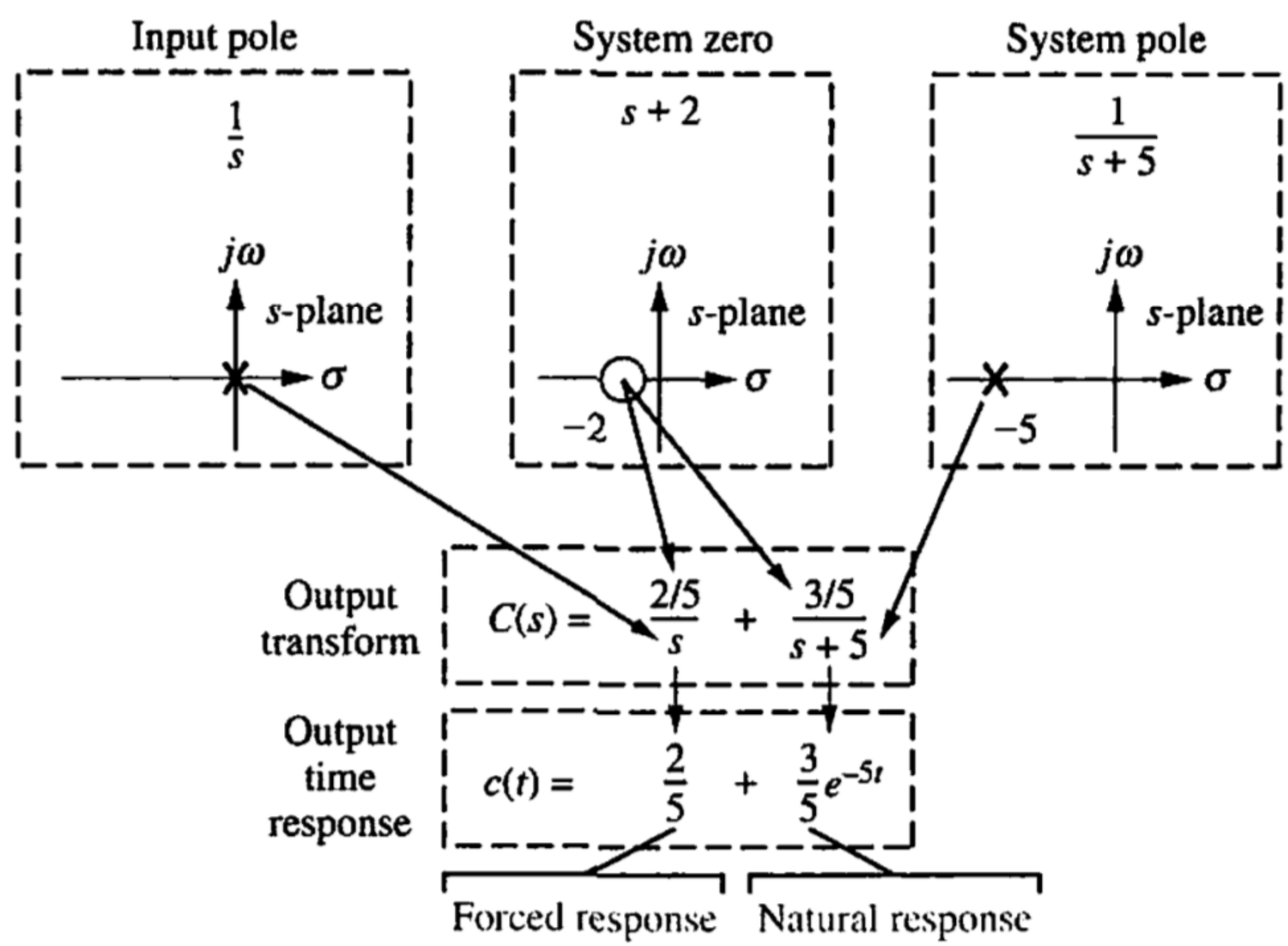
Degrau: $\mathcal{L}\{u(t)\} = 1/s$

$$C(s) = \frac{(s+2)}{s\,(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} = \frac{2/5}{s} +$$

$$A = \left.\frac{(s+2)}{(s+5)}\right|_{s=0} = \frac{2}{5}$$

$$B = \left.\frac{(s+2)}{s}\right|_{s=-5} = \frac{3}{5}$$

$$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{e}^{-5t}$$



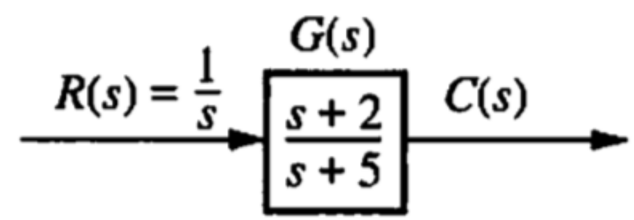
zeros $\rightarrow$ x

polos $\rightarrow$ ○

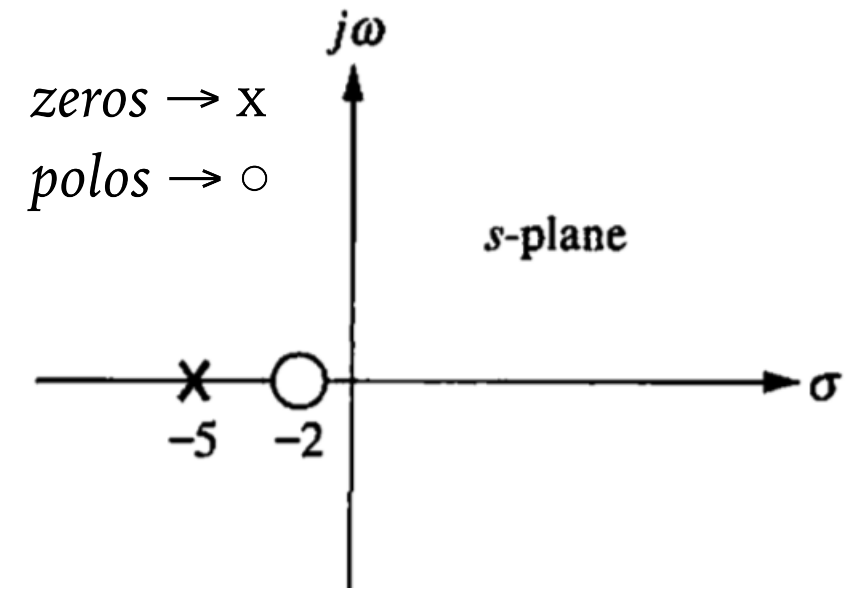
POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- A resposta a uma entrada degrau unitário leva à:
- O que acontece quando fechamos a malha com controlador proporcional?

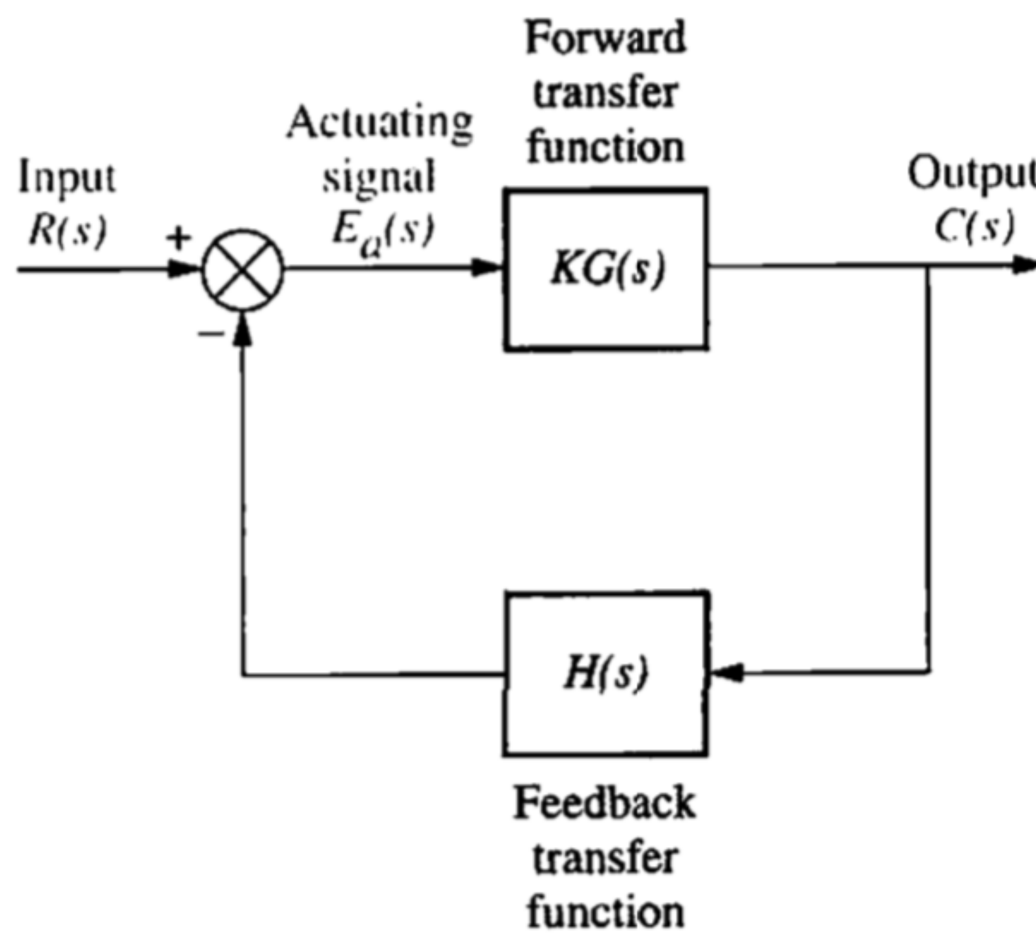
Vamos perceber que a medida que aumentamos K, os pólos em MF mudam de local.



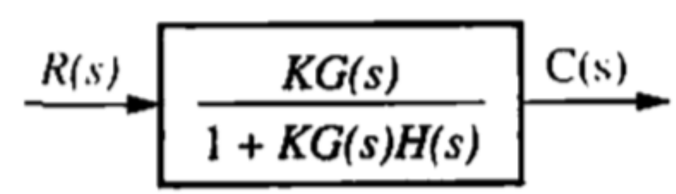
(a) Sistema em MA.



(b) Pólos e zeros de MA no plano-s



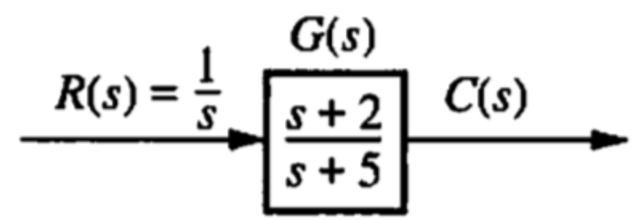
(c) Fechando a malha.



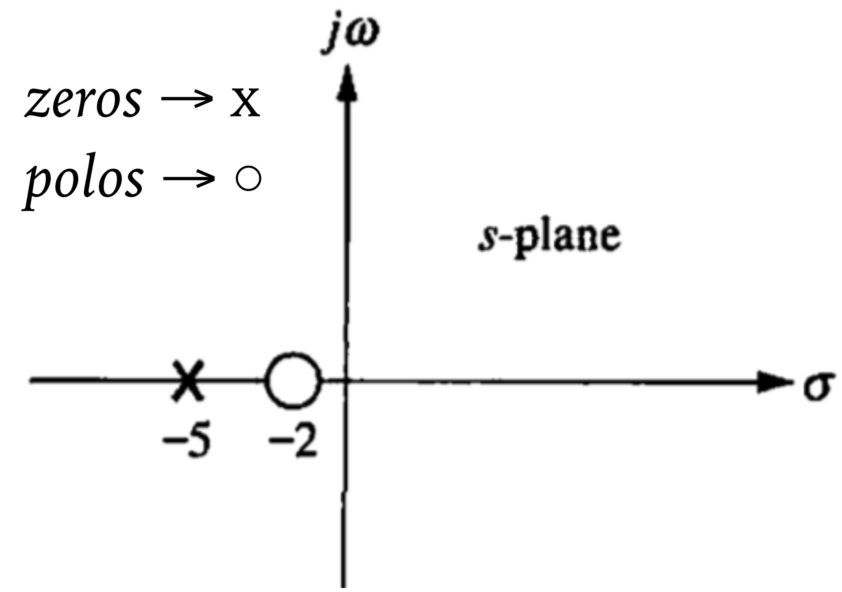
(d) Sistema equivalente (FTMF).

POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- A resposta a uma entrada degrau unitário leva à:
- O que acontece quando fechamos a malha com controlador proporcional



(a) Sistema em MA.



(b) Pólos e zeros de MA no plano-s

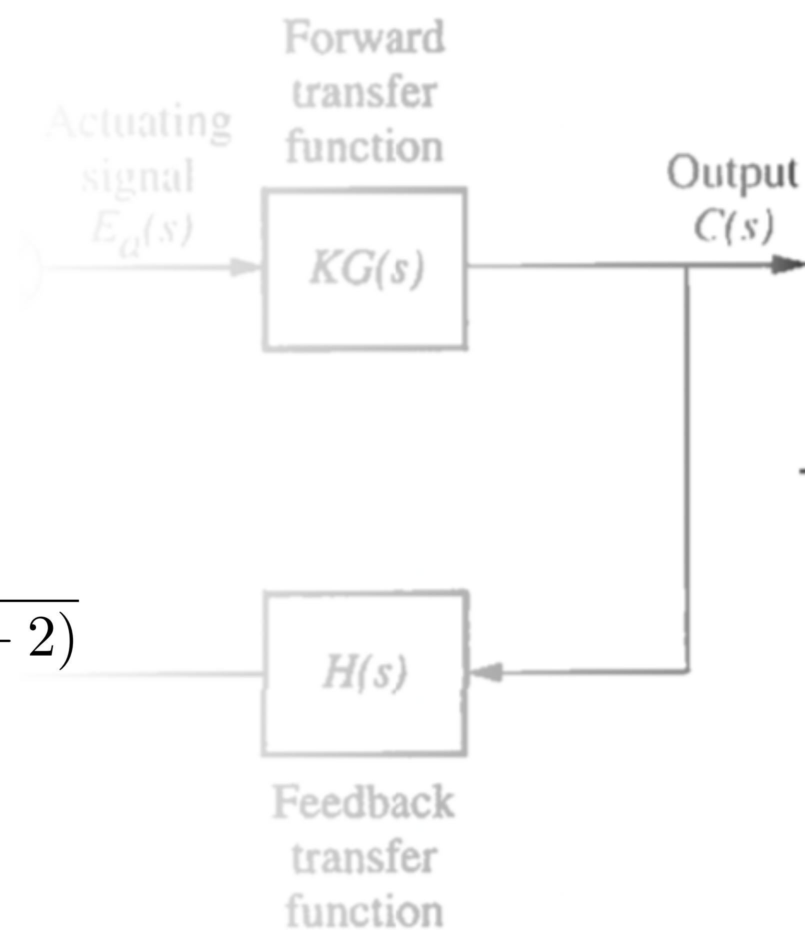
(c) Fechando a malha:

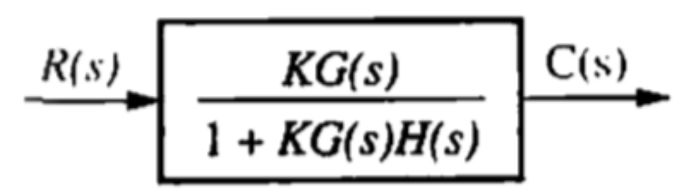
$$FTMF(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)} = \frac{R(s)}{C(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{\frac{K(s+2)}{(s+5)}}{1 + \frac{K(s+2)}{(s+5)}} = \frac{K(s+2)}{(s+5) + K(s+2)}$$

$$FTMF(s) = \frac{K(s+2)}{(K+1)s + (2K+5)}$$

$EC(s)$

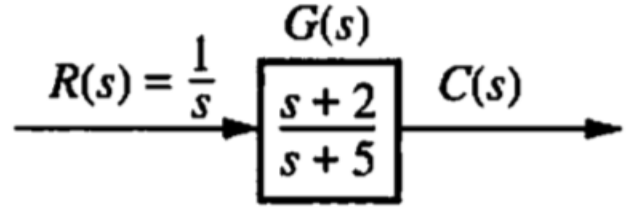




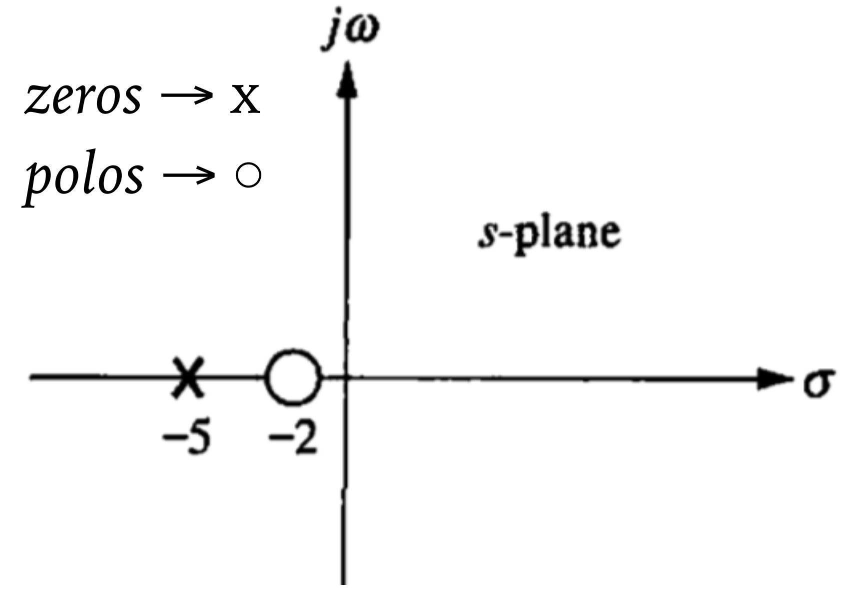
(d) Sistema equivalente (FTMF).

POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- O que acontece quando fechamos a malha com controlador proporcional?



(a) Sistema em MA.



(b) Pólos e zeros de MA no plano-s

(c) Fechando a malha:

$$FTMF(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)} = \frac{R(s)}{C(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{K(s+2)}{(K+1)s + (2K+5)}$$

Calculando pólos de MF, variando K:

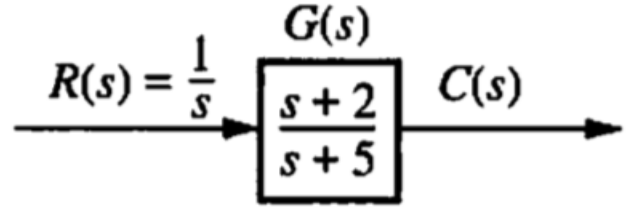
K	EC(s)=0	Polo em (s=)
0.0	1 s + 5 = 0	-5.00
0.1	1.1 s + 5.2 = 0	-4.73
0.5	1.5 s + 6 = 0	-4.00
1.0	2 s + 7 = 0	-3.50
1.5	2.5 s + 8 = 0	-3.20
2.0	3 s + 9 = 0	-3.00
4.0	5 s + 13 = 0	-2.60
10.0	11 s + 25 = 0	-2.27
50.0	51 s + 105 = 0	-2.06
100.0	101 s + 205 = 0	-2.03

```
% Determinando faixa de polos em MF,
% variando ganho para fig. 4.1 NISE
% Fernando Passold, em 01.04.2019
K=[0 0.1 0.5 1 1.5 2 4 10 50 100];
u=length(K);
fprintf(' K | EC(s)=0 | Polo em (s=)\n');
for i=1:u
    EC = [(K(i) + 1) (2*K(i) + 5)]; % monta EC(s)
    polo = roots(EC);
    fprintf('%5.1f | %g s + %g = 0 | %7.2f\n', K(i),
EC(1), EC(2), polo);
end
```

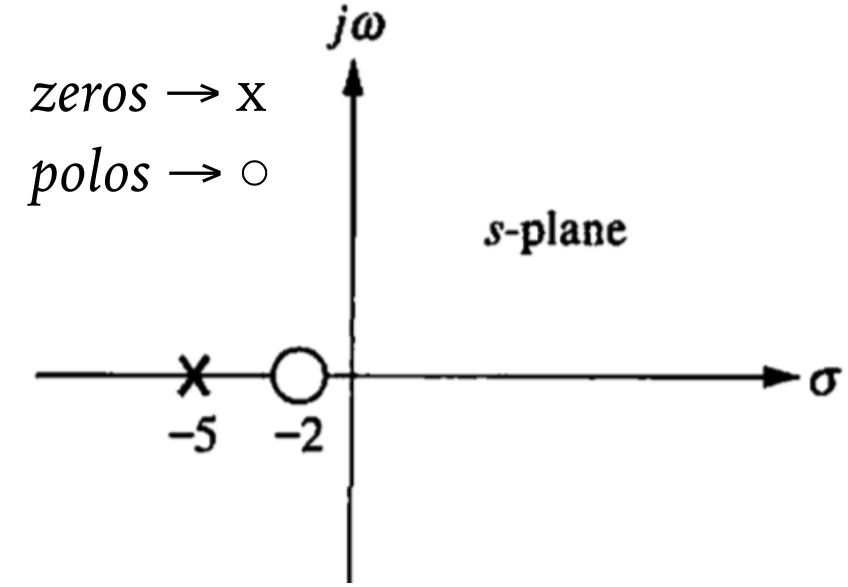
(d) Sistema equivalente (FTMF).

POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

- Seja o seguinte sistema:
- O que acontece quando fechamos a malha com controlador proporcional?



(a) Sistema em MA.



(b) Pólos e zeros de MA no plano-s

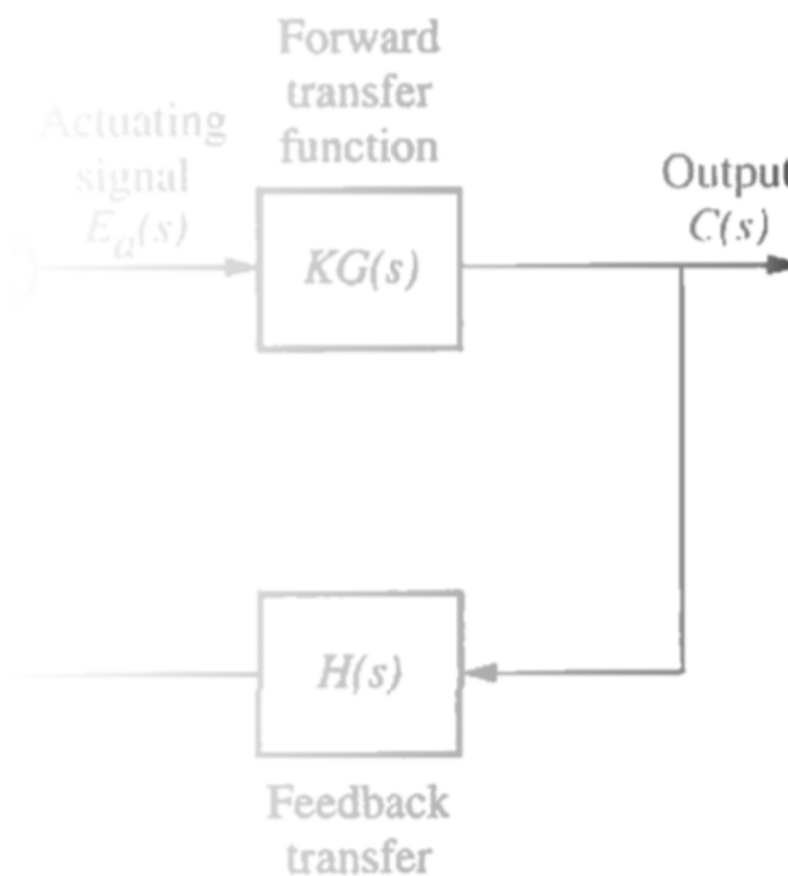
(c) Fechando a malha:

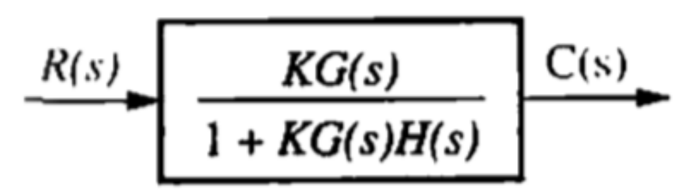
$$FTMF(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)} = \frac{R(s)}{C(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{K(s+2)}{(K+1)s + (2K+5)}$$

Calculando pólos de MF, variando K:

K	EC(s)=0	Polo em (s=)
0.0	1 s + 5 = 0	-5.00
0.1	1.1 s + 5.2 = 0	-4.73
0.5	1.5 s + 6 = 0	-4.00
1.0	2 s + 7 = 0	-3.50
1.5	2.5 s + 8 = 0	-3.20
2.0	3 s + 9 = 0	-3.00
4.0	5 s + 13 = 0	-2.60
10.0	11 s + 25 = 0	-2.27
50.0	51 s + 105 = 0	-2.06
100.0	101 s + 205 = 0	-2.03



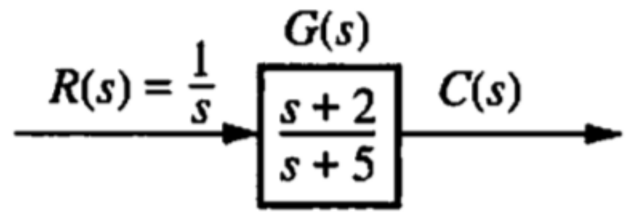


(d) Sistema equivalente (FTMF).

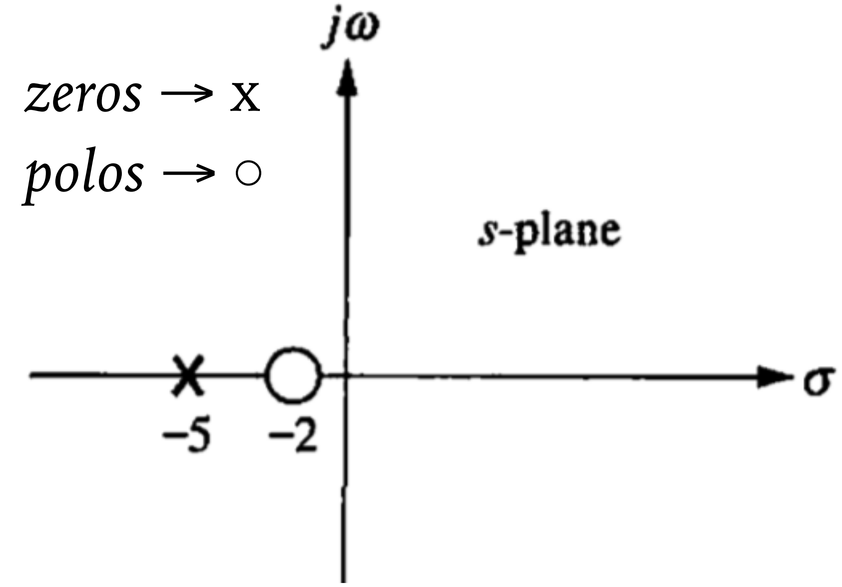
Note: o pólo de MA "caminha" na direção do zero (mais próximo)

POLOS E ZEROS DE UM SISTEMA

```
>> G=tf([1 2],[1 5])
G =
   s + 2
   -----
   s + 5
>> rlocus(G)
```



(a) Sistema em MA.



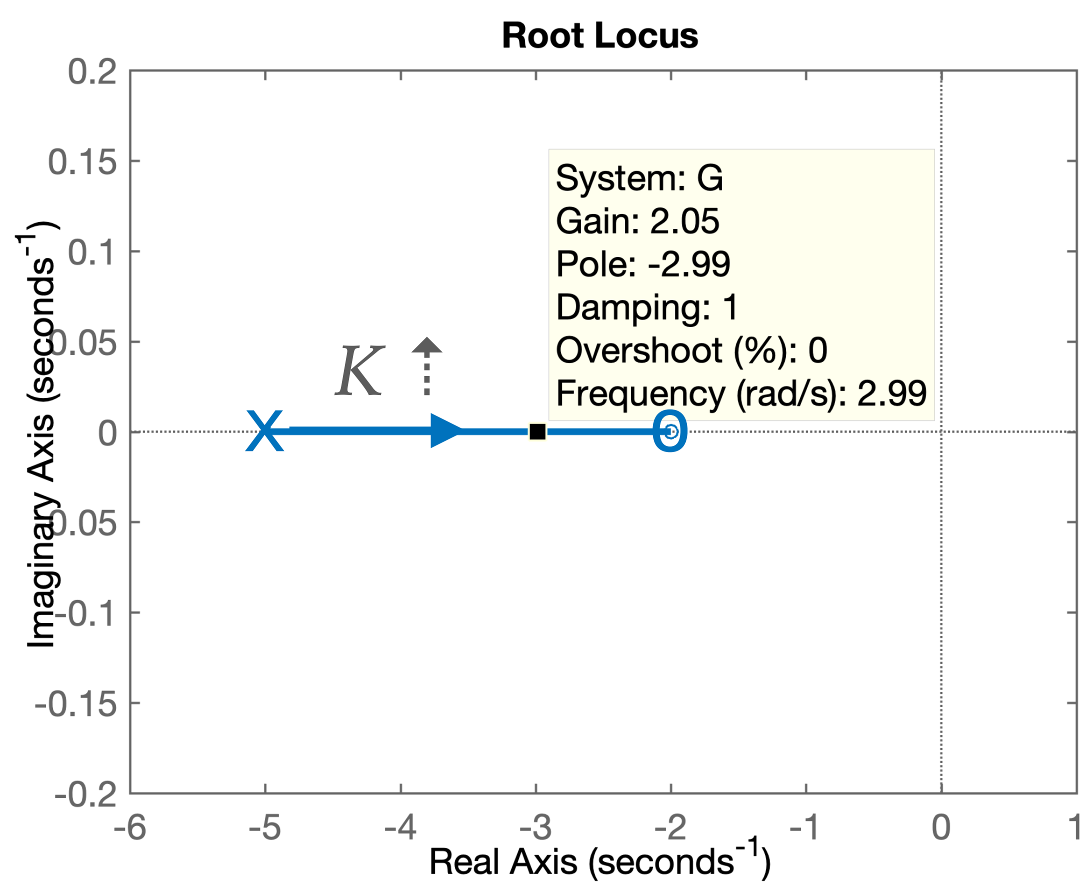
(b) Pólos e zeros de MA no plano-s

$$FTMF(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)} = \frac{R(s)}{C(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{K(s+2)}{(K+1)s + (2K+5)}$$

Calculando pólos de MF, variando K:

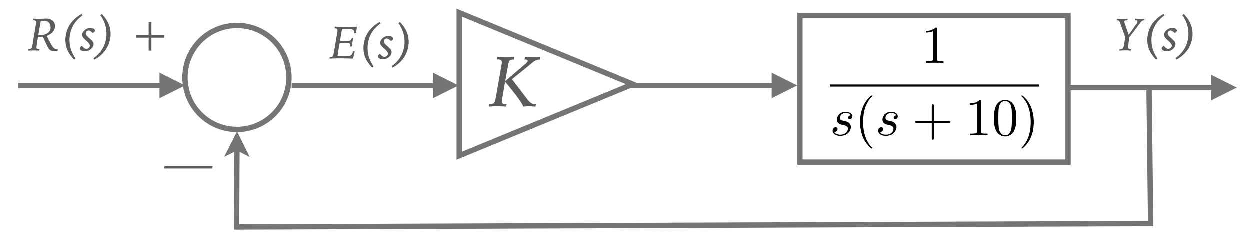
K	EC(s)=0	Polo em (s=)
0.0	1 s + 5 = 0	-5.00
0.1	1.1 s + 5.2 = 0	-4.73
0.5	1.5 s + 6 = 0	-4.00
1.0	2 s + 7 = 0	-3.50
1.5	2.5 s + 8 = 0	-3.20
2.0	3 s + 9 = 0	-3.00
4.0	5 s + 13 = 0	-2.60
10.0	11 s + 25 = 0	-2.27
50.0	51 s + 105 = 0	-2.06
100.0	101 s + 205 = 0	-2.03



Note: o pólo de MA "caminha" na direção do zero (mais próximo)

EX_2: SISTEMA DE 2ª-ORDEM (SOMENTE 2 POLOS)

➤ Seja o seguinte sistema:



Pólos de MA em s=0 e s=-10.

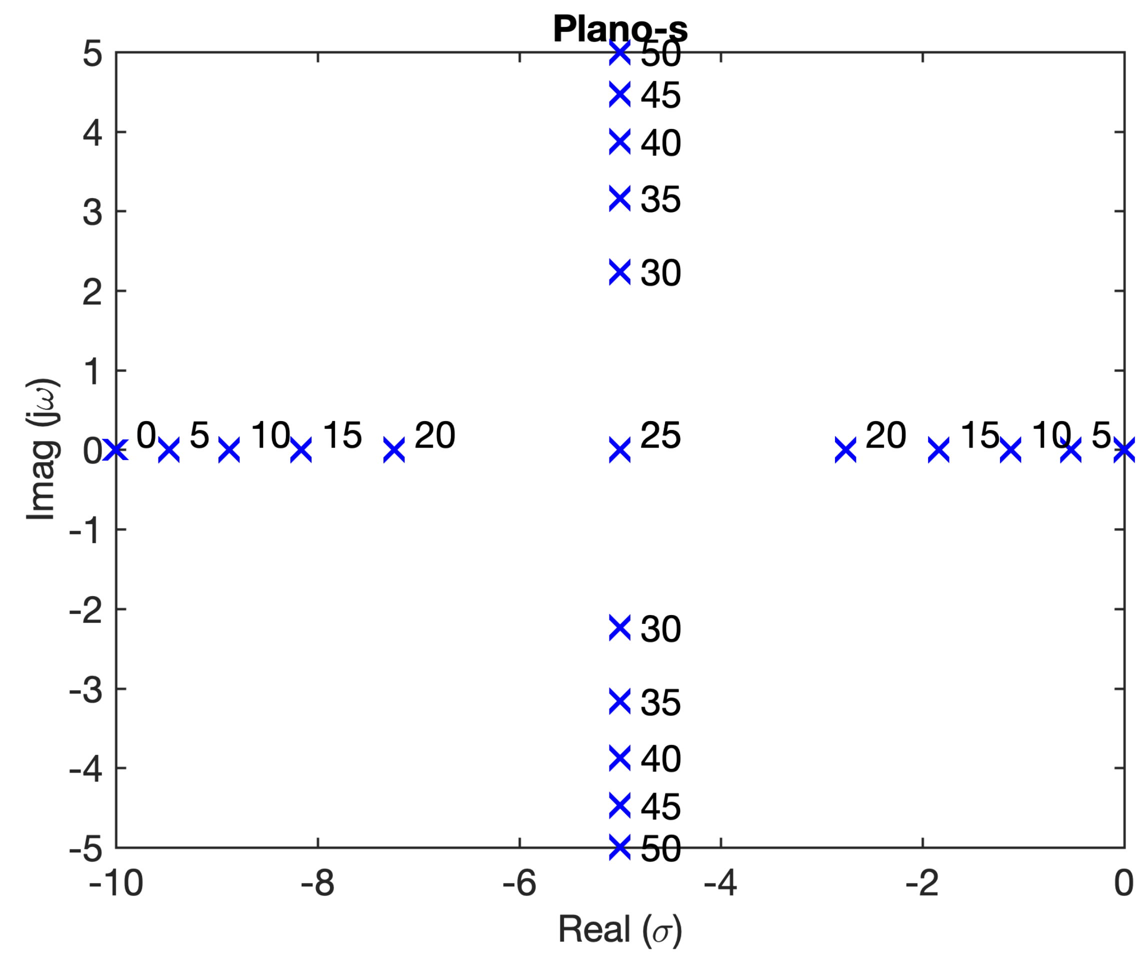
$$FTMF(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)} = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{\frac{K}{s(s+10))}}{1 + \frac{K}{s(s+10)}} = \frac{K}{s(s+10)+K}$$

$$FTMF(s) = \frac{K}{s^2 + 10s + K}$$

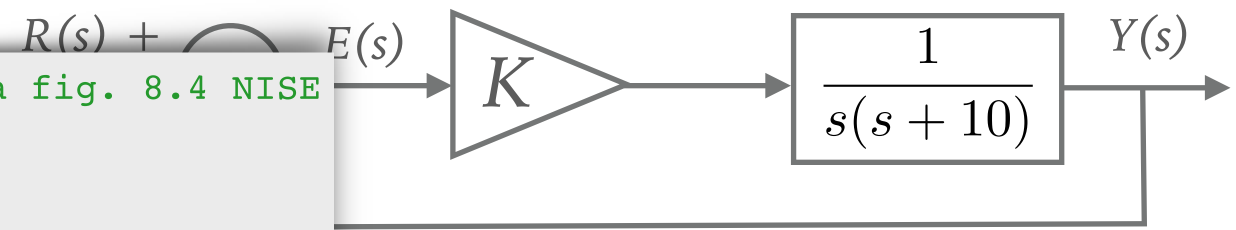
Variando K obteremos os pólos de MF em:

K	Polo 1	Polo 2
0	0	-10
5	-9.47214	-0.527864
10	-8.87298	-1.12702
15	-8.16228	-1.83772
20	-7.23607	-2.76393
25	-5	-5
30	$-5 + j2.23607$	$-5 - j2.23607$
35	$-5 + j3.16228$	$-5 - j3.16228$
40	$-5 + j3.87298$	$-5 - j3.87298$
45	$-5 + j4.47214$	$-5 - j4.47214$
50	$-5 + j5$	$-5 - j5$

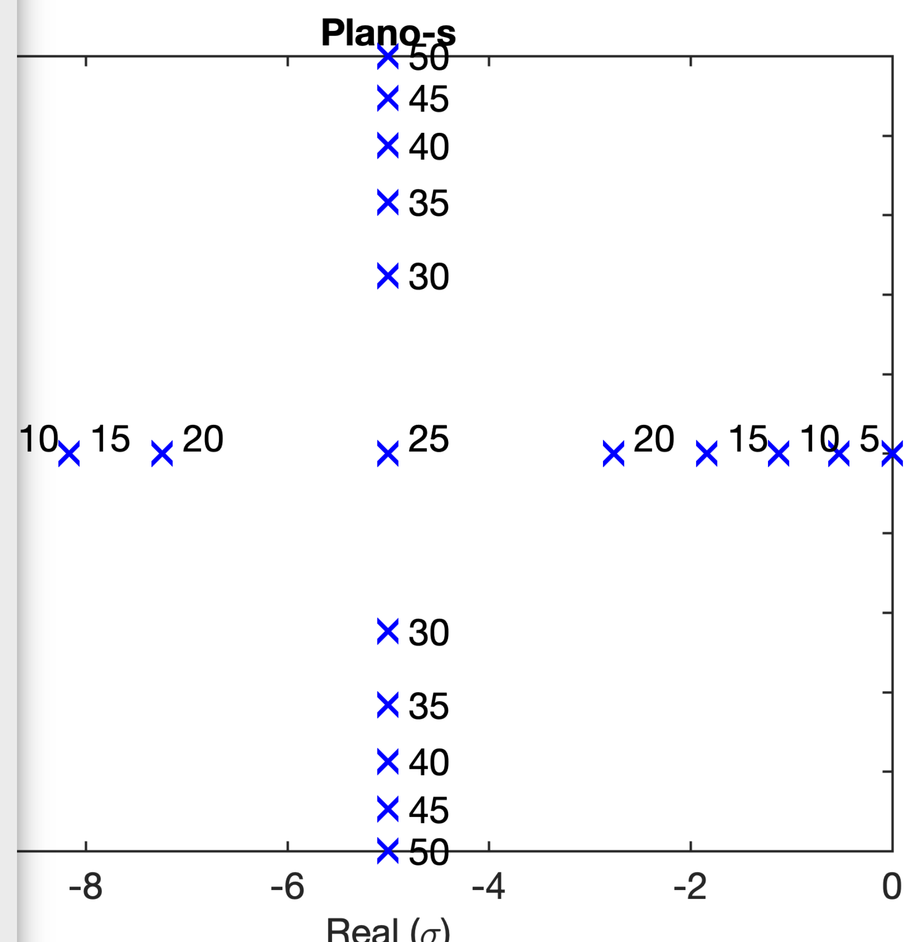


EX_2: SISTEMA DE 2ª-ORDEM (SOMENTE 2 POLOS)

- Seja o seguinte sistema:

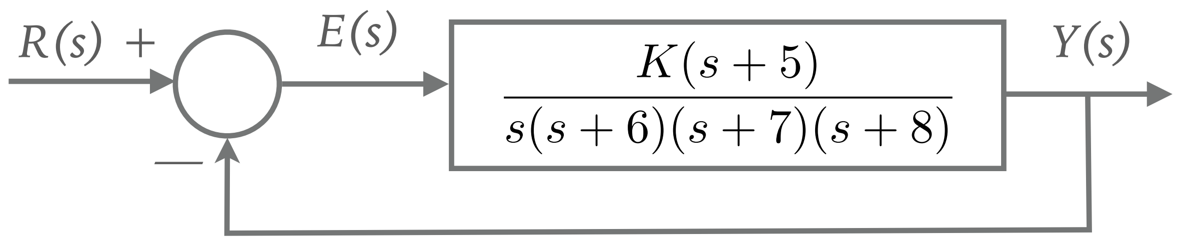



```
% Determinando faixa de p?los em MF, variando ganho para fig. 8.4 NISE
% Fernando Passold, em 01.04.2019
K=0:5:50;
u=length(K);
fprintf(' K & \\text{Polo 1} & \\text{Polo 2} \\\\ \n');
figure;
for i=1:u
    fprintf('%2g & ', K(i));
    EC = [1 10 K(i)]; % monta EC(s) (e mostra polin?mio)
    polo = roots(EC);
    fprintf('%g ', real(polo(1)));
    aux=num2str(K(i));
    if ~(isreal(polo(1)))
        plot(real(polo),imag(polo),'bx','LineWidth',2,'MarkerSize',12)
        text(real(polo)+.2,imag(polo),aux);
        aux=abs(imag(polo(j)));
        fprintf('+ j%g ', aux);
    else
        plot(real(polo),[0 0],'bx','LineWidth',2,'MarkerSize',12)
        text(real(polo)+.2,[0.2 0.2],aux);
    end
    fprintf(' & %g ', real(polo(2)));
    if ~(isreal(polo(1)))
        fprintf('- j%g ', aux);
    end
    if i==1
        hold on
    end
    fprintf(' \\\\\n');
end
title('Plano-s');
xlabel('Real (\sigma)');
ylabel('Imag (j\omega)');
```

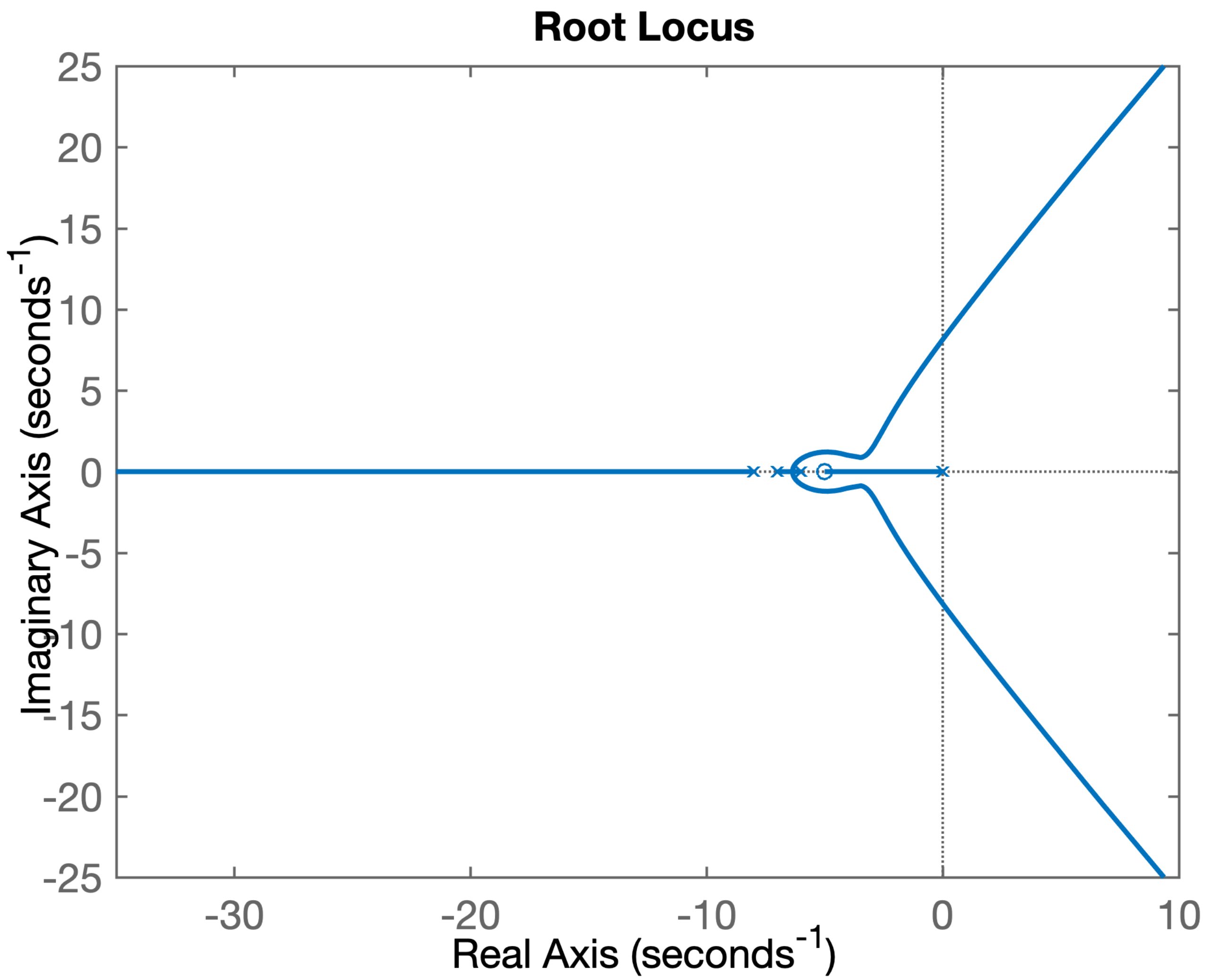


EX_3: VOLTANDO AO EXEMPLO DO INÍCIO DA AULA

➤ Seja o sistema:



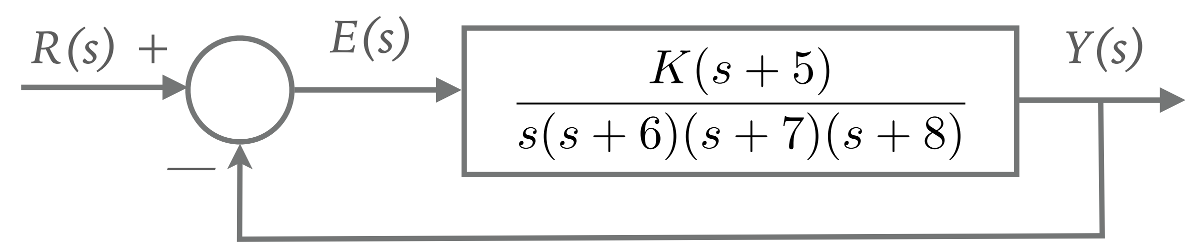

```
>> G=tf([1 5],poly([0 -6 -7 -8]));
>> zpk(G)

ans =

           (s+5)
  -------------------
  s (s+8) (s+7) (s+6)

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> rlocus(G)
```



Ganho máximo, Ku=1056,9

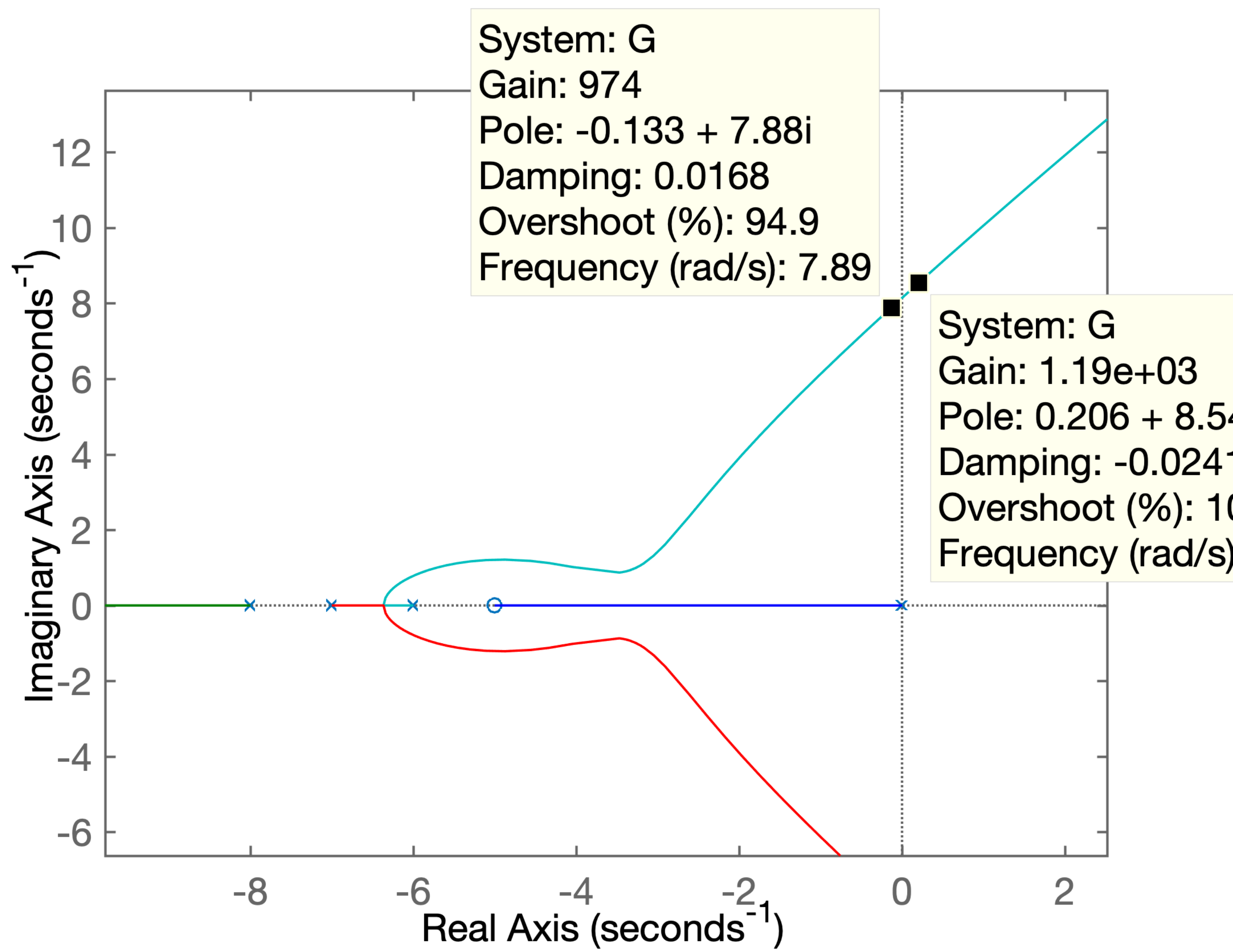
EX_3: VOLTANDO AO EXEMPLO DO INÍCIO DA AULA

➤ Seja o sistema:




```
>> G=tf([1 5],poly([0 -6 -7 -8]));
>> zpk(G)

           (s+5)
   --------------------
   s (s+8) (s+7) (s+6)

>> rlocus(G)
>> G
G =
                  s + 5
   -----------------------------
   s^4 + 21 s^3 + 146 s^2 + 336 s
>>
```

Ganho máximo, Ku=1056,9



$$FTMF(s) = \frac{K(s+5)}{s^4 + 21s^3 + 146s^2 + 336s + K(s+5)}$$

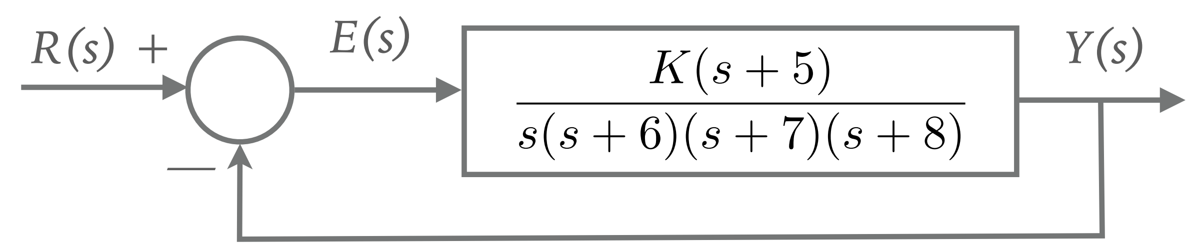
$$EC(z) = s^4 + 21s^3 + 146s^2 + (K+336)s + 5K = 0$$

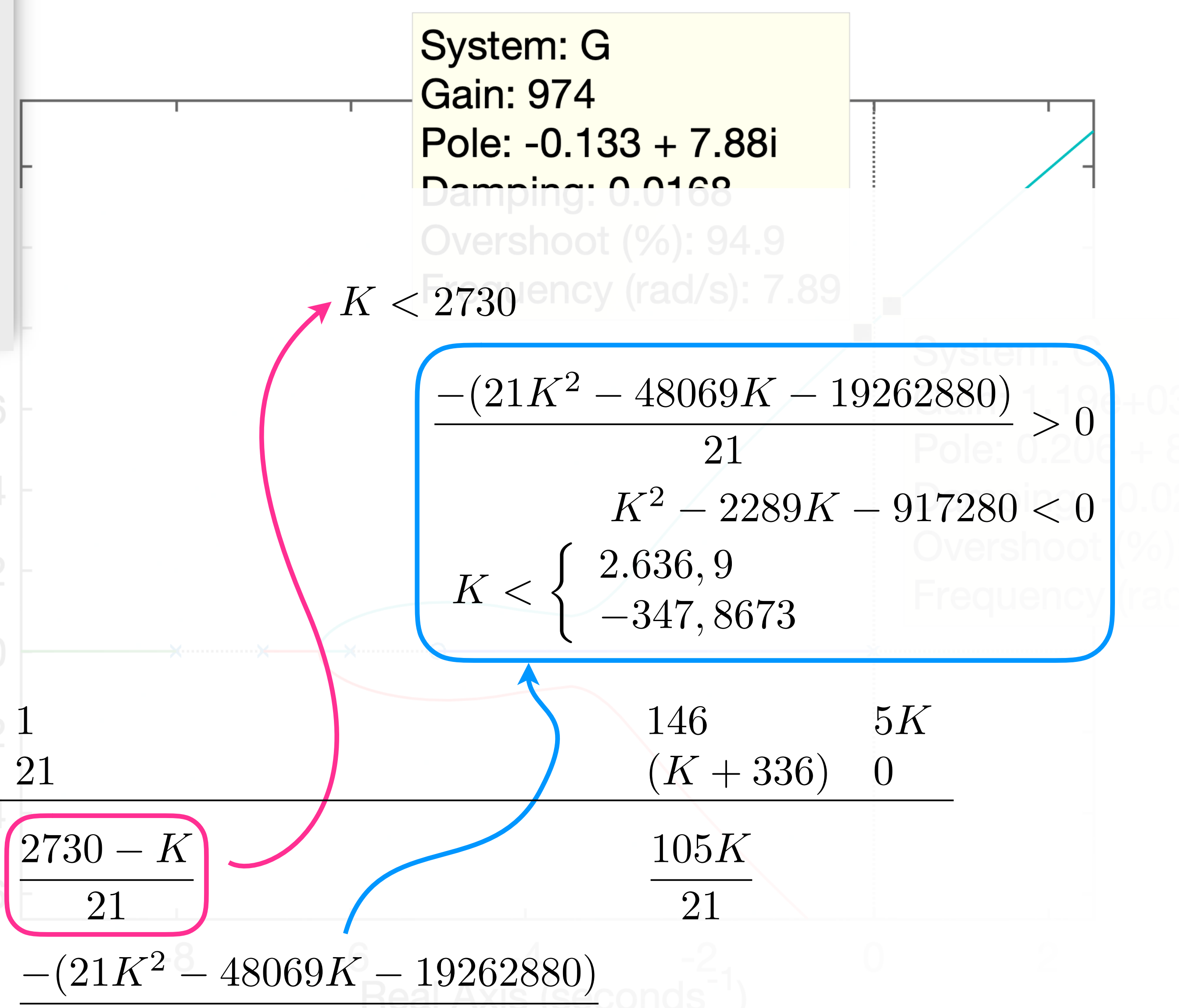
s^4	1	146	$5K$
s^3	21	$(K+336)$	0
s^2	b_1	b_2	
s^1	c_1		
s^0	d_1		

EX_3: VOLTANDO AO EXEMPLO DO INÍCIO DA AULA

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$b_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3}$	$b_2 = \dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3}$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$c_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$d_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1}$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

>>





Ganho máximo, Ku=1056,9

$$FTMF(s) = \frac{K(s+5)}{s^4 + 21s^3 + 146s^2 + 336s + K(s+5)}$$

$$EC(z) = s^4 + 21s^3 + 146s^2 + (K+336)s + 5K = 0$$

Condições preliminares $\Rightarrow K > -336$ *e* $K > 0 \therefore K > 0$

s^4	1	146	$5K$
s^3	21	$(K+336)$	0
s^2	b_1	b_2	
s^1	c_1		
s^0	d_1		

s^4	1	146	$5K$
s^3	21	$(K+336)$	0
s^2	$\boxed{\dfrac{2730-K}{21}}$	$\dfrac{105K}{21}$	
s^1	$\dfrac{-(21K^2-48069K-19262880)}{21}$		
s^0	$\boxed{\dfrac{105K}{21}}$		

$K < 2730$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{-(21K^2-48069K-19262880)}{21} > 0 \\ &K^2 - 2289K - 917280 < 0 \\ &K < \begin{cases} 2.636,9 \\ -347,8673 \end{cases} \end{aligned}}$$

$K > 0$

PROPRIEDADES (REGRAS) DO ROOT LOCUS (RL)

$$FTMF(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)H(s)}$$

$$EC(z) = 1 + K \cdot G(s)H(s) = 0$$

$$K \cdot G(s)H(s) = -1 \quad = 1\ \angle[(2k+1)\cdot 180^o], \quad \text{onde: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

$$\left|K \cdot G(s)H(s)\right| = 1$$

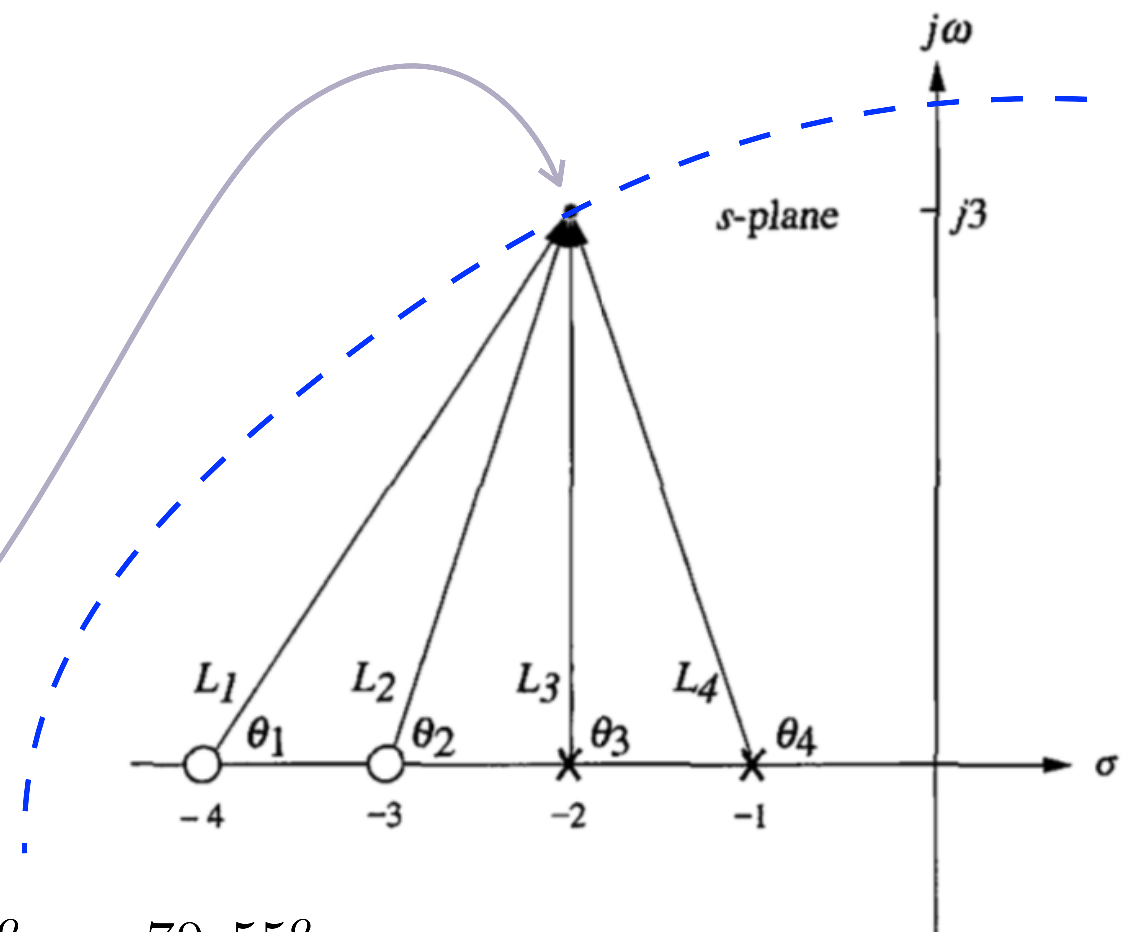
$$\angle KG(s)H(s) = (2k+1)\cdot 180^o$$

Para um ponto no plano-s pertencer ao traço do RL:

Somatório dos ângulos = 180º:

$$\sum \angle(\text{Zeros}) - \sum \angle(\text{Polos}) = \text{No. Ímpar} \cdot 180^o$$

Exemplo: ponto s=-2+j3 pertence ao RL (para certo valor de K) !?



$$\theta_1 + \theta_2 - (\theta_3 + \theta_4) = 56,31^o + 71,57^o - 90^o - 108,43^o = -70,55^o$$

$\Rightarrow$ *Conclusão: Não pertence ao RL (não pode ser um pólo de MF).*

PROPRIEDADES (REGRAS) DO ROOT LOCUS (RL)

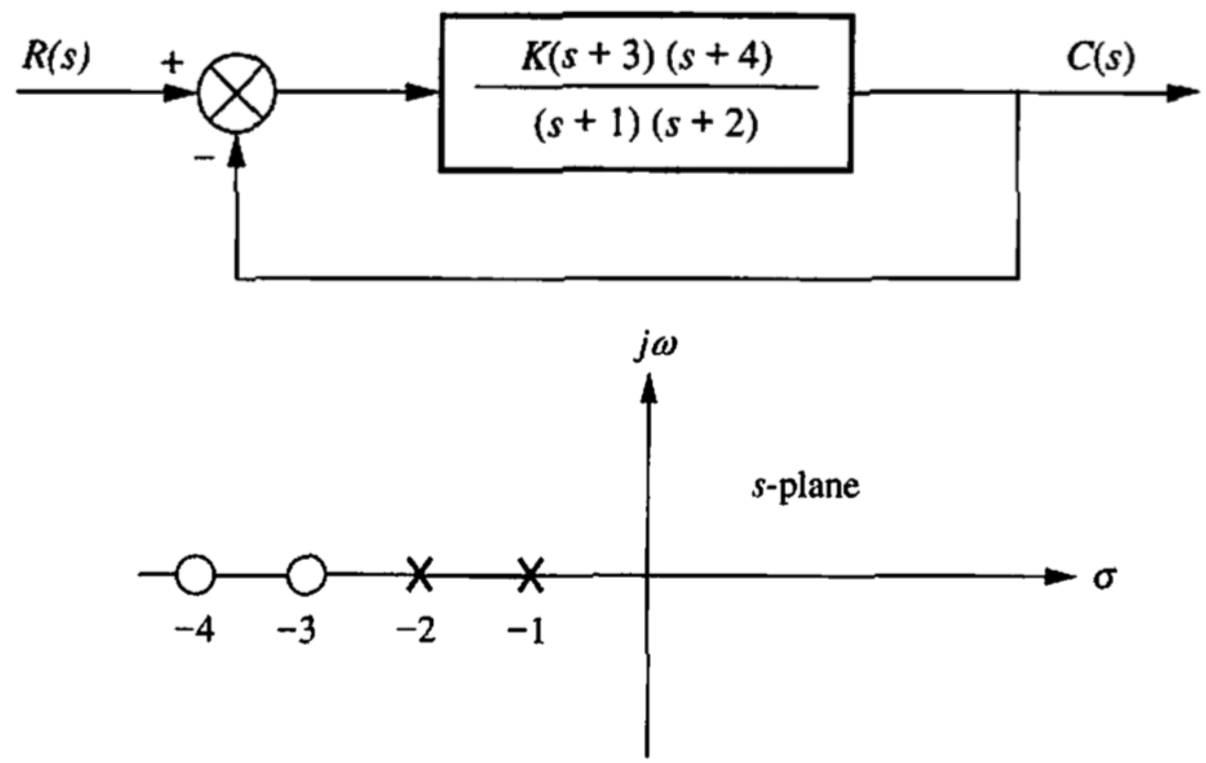
$$FTMF(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)H(s)}$$

$$EC(z) = 1 + K \cdot G(s)H(s) = 0$$

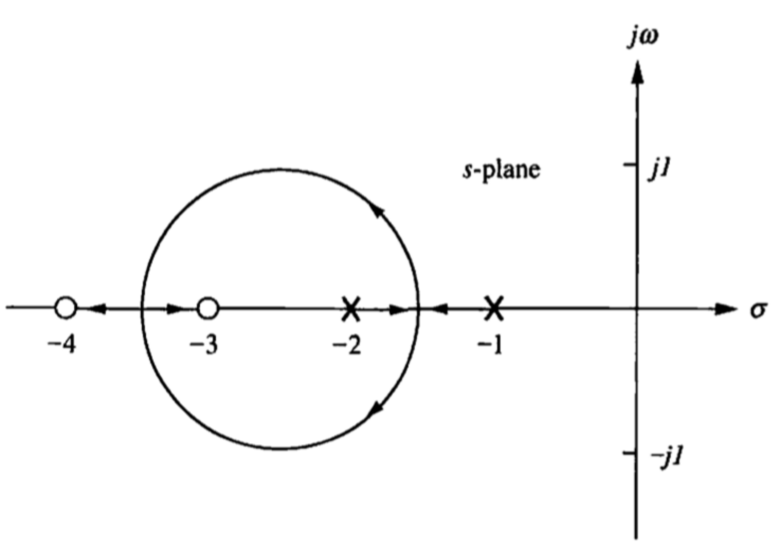
$$K \cdot G(s)H(s) = -1 \quad = 1\,\angle[(2k+1)\cdot 180^o], \quad \text{onde: } k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

$$\left| K \cdot G(s)H(s) \right| = 1$$

$$\angle KG(s)H(s) = (2k+1)\cdot 180^o$$



No eixo real, para K> O, o RL existe à esquerda de um número ímpar de pólos de MA finitos (no eixo real) e/ou à esquerda de um número de zeros de MA finitos.



De acordo com a regra, os segmentos do eixo real do RL estão entre -1 e -2 e entre -3 e -4.

PROPRIEDADES (REGRAS) DO ROOT LOCUS (RL)

$$FTMF(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)H(s)}$$

$$EC(z) = 1 + K \cdot G(s)H(s) = 0$$

$$K \cdot G(s)H(s) = -1 \qquad = 1 \angle[(2k+1) \cdot 180^o], \quad \text{onde: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

$$\left| K \cdot G(s)H(s) \right| = 1$$

$$\angle KG(s)H(s) = (2k+1) \cdot 180^o$$

Ponto de partida da assíntota:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{Polos finitos} - \sum \text{zeros finitos}}{\text{No. Polos finitos} - \text{No. Zeros finitos}}$$

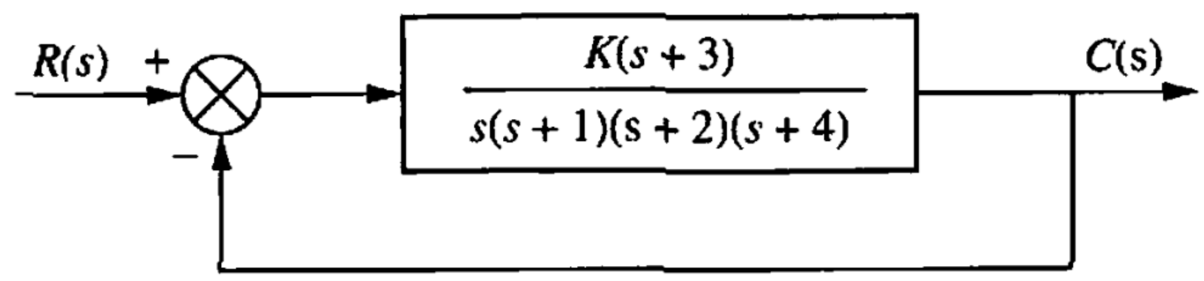
Ângulo de partida das assíntotas:

$$\theta_a = \frac{(2k+1) \cdot 180^o}{\text{No. Polos finitos} - \text{No. Zeros finitos}}, \quad \text{onde: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

PROPRIEDADES (REGRAS) DO ROOT LOCUS (RL)

Ponto de partida da assíntota:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{Polos finitos} - \sum \text{zeros finitos}}{\text{No. Polos finitos} - \text{No. Zeros finitos}}$$

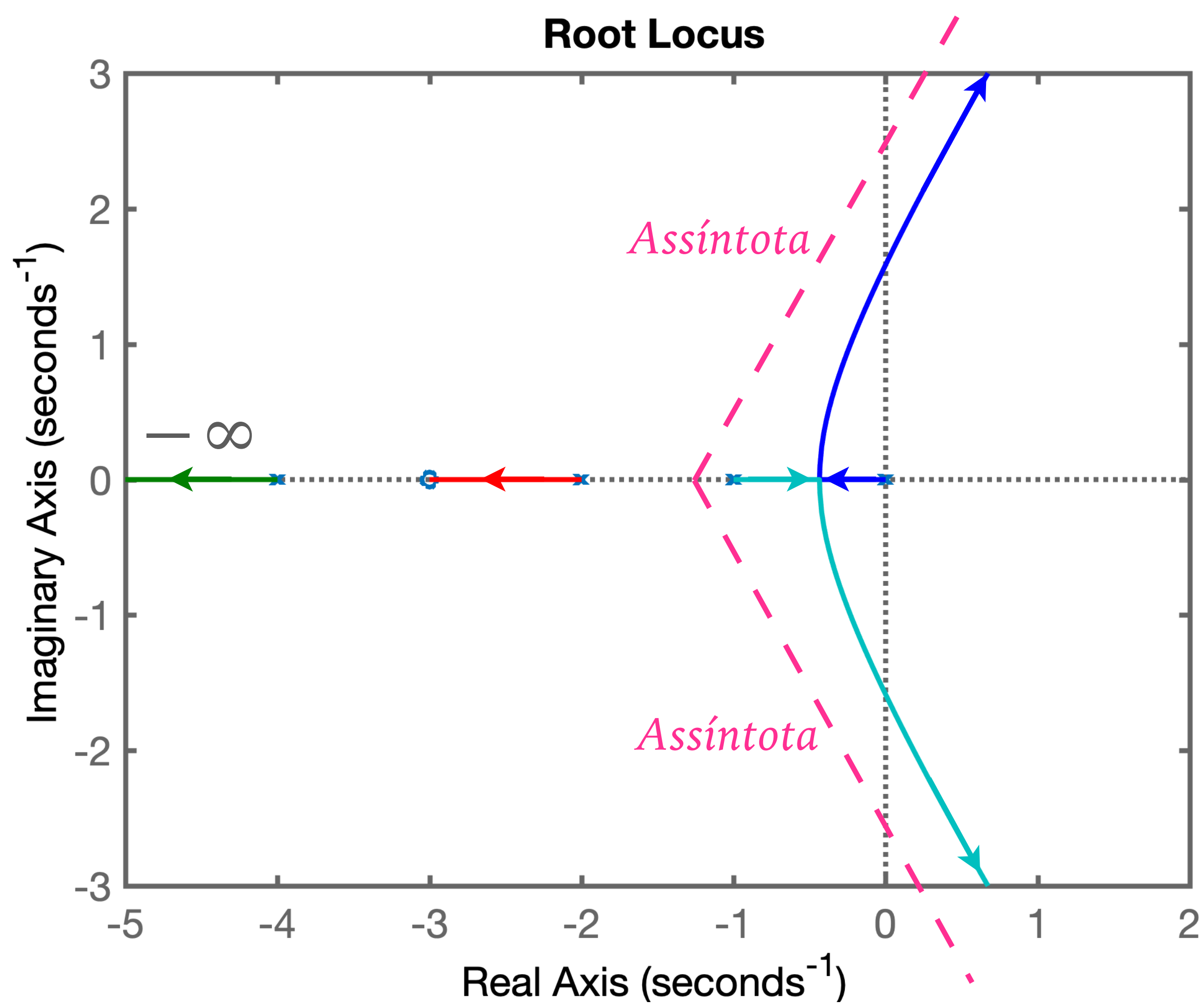


Ângulo de partida das assíntotas:

$$\theta_a = \frac{(2k+1)\cdot 180^o}{\text{No. Polos finitos} - \text{No. Zeros finitos}}, \quad \text{onde: } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

$$\sigma_a = \frac{(-1-2-4)-(-3)}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \theta_a &= \frac{(2k+1)\cdot 180^o}{4-1} \\ &= \frac{1\cdot 180^o}{3} = 60^o && \text{, para } k=0; \\ &= \frac{3\cdot 180^o}{3} = 0^o && \text{, para } k=1; \\ &= \frac{5\cdot 180^o}{5} = 300^o = -60^o && \text{, para } k=2; \end{aligned}$$



ALGUNS EXEMPLOS DE RL

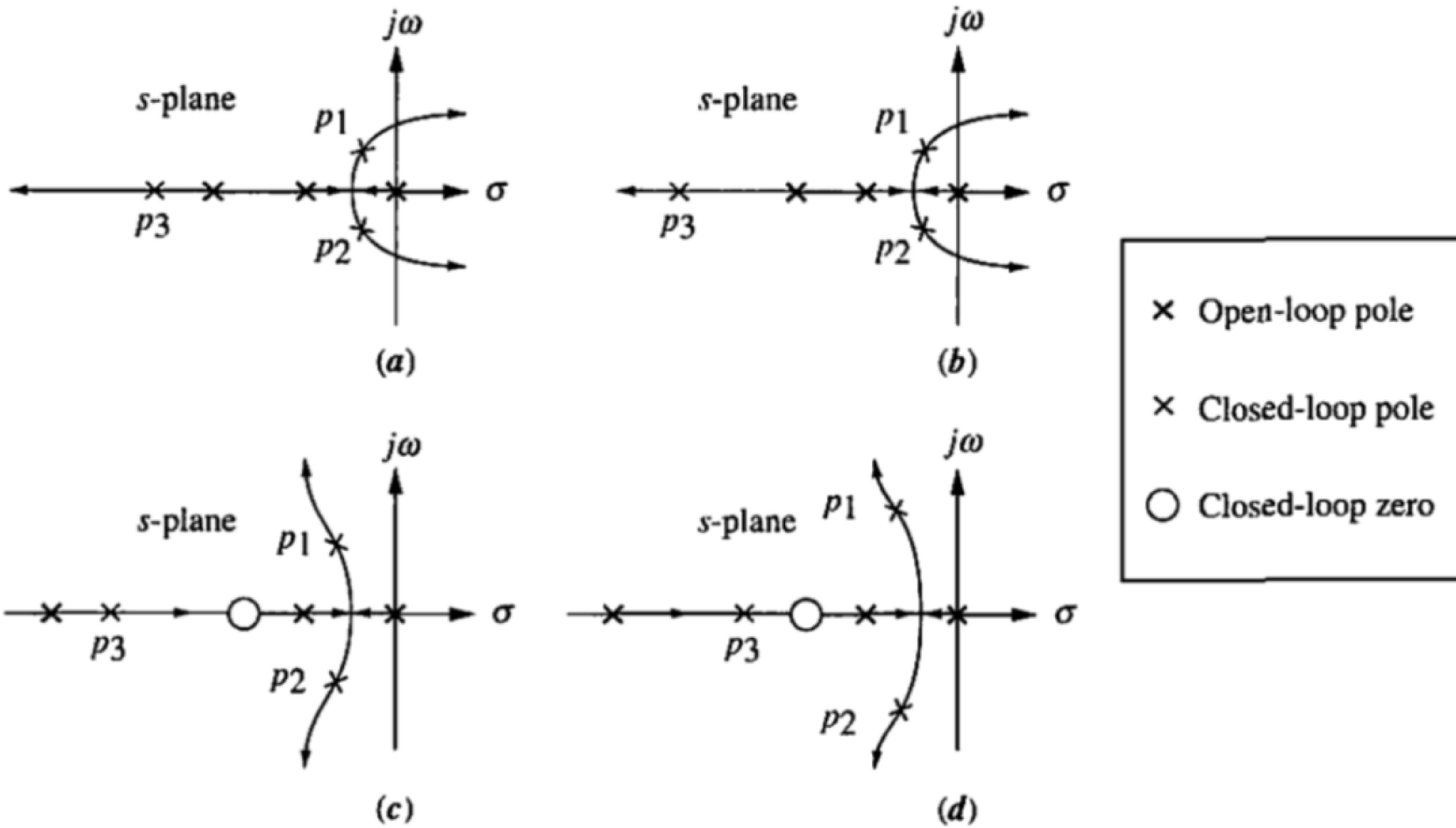


FIGURE 8.20 Making second-order approximations

REVISANDO…

- RL × respostas temporais de sistemas com múltiplos pólos simples reais;
- RL × respostas temporais de sistemas de 2ª-ordem (pólos complexos conjugados);
- Equações típicas prevendo respostas de sistemas de 2ª-ordem com pólos complexos (sub-amortecidos);
- Linhas guias no RL para valores constantes de:

σ	(parte real)
ω	(parte imaginária)
$\%OS$	(overshoot)
ζ	(fator amortecimento)
t_s	(tempo de assentamento)
t_p	(tempo do pico).