A técnica do Lugar Geométrico das Raízes (ou *Root Locus*) 2ª-parte

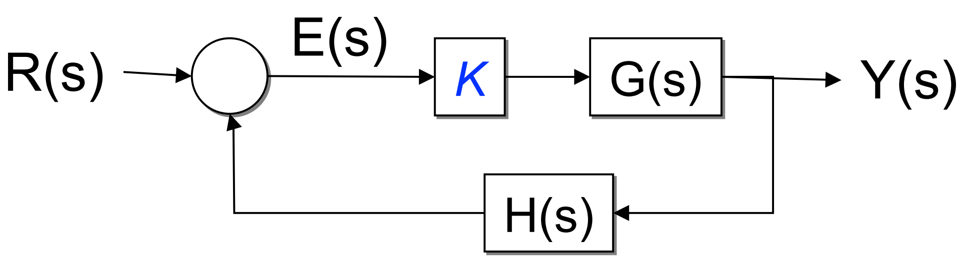
Propriedades, regras;
número de curvas (início/fim das trajetórias);
ângulos das assíntotas, centroides;
ângulos de partida, pontos de partida;
Com exemplos.

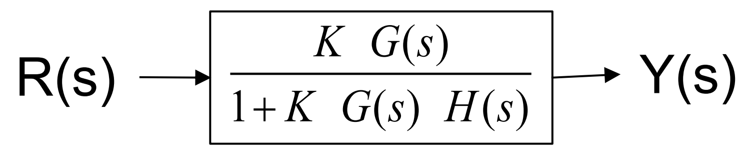
Fernando Passold

Abr/2020

Ideia básica:

1. O projetista deseja saber se o sistema é estável ou não[1].
   Isto pode ser determinado examinando-se as raízes obtidas a partir da equação característica do sistema, ou seja:





$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}$$ e $$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$ então: $$FTMF(s) = \frac{K \ N_G(s) \ D_H(S)}{D_G(s) \ D_H(s) + K \ N_G(s) \ N_H(S)}$$

$$FTMF(s) = \frac{K \ G(s)}{1 + K \ G(s) H(s)} \xrightarrow{\text{Equação característica}} 1 + K \ G(s) \ H(s) = 0$$

[1]*Comentario*: A estabilidade do sistema poderia ser determinada usando-se os critérios de Rout-Hurwitz, mas este critério não permite saber o tanto de *overshoot* ou tempo de ajuste do sistema para una entrada degrau.

Propriedades de um RL

A função transferencia de malha fechada é:

$$FTMF(s) = \frac{K\ G(s)}{1 + K\ G(s)H(s)} \qquad (2)$$

De (2), um polo, existe quando o polinômio característico do denominador se torna nulo:

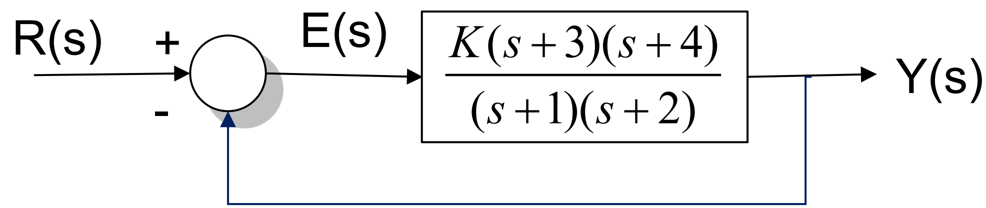
$$K\ G(s)\ H(s) \quad = \quad -1 \quad = 1\angle(2k+1)180^o, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (3)$$

Significa que:

1. $|K\ G(s)\ H(s)| = 1$ sempre!

2. $\angle$ K G(s) H(s), sempre deve de ser múltiplo impar de π (180°, 360°, etc)

Exemplo$_1$:



Malha aberta:

$$K\,G(s)\,H(s)=\frac{K(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

Malha fechada:

$$T(s)=\frac{K(s+3)(s+4)}{(1+K)s^2+(3+7K)s+(2+12K)}$$

Quando K=0: $EC(s)=s^2+3s+2$

Polos em s= -1 e s= -2

Cuando K=1: $EC(s)=2s^2+10s+14$

Raizes em: s = -2,5 $\pm$ j 0,866

Cuando $K \rightarrow \infty$: $EC(s)\rightarrow s^2+7s+12$

Raizes em: s= -4 y s= -3

Script MATLAB:

```
>> G=tf( poly([-3 -4]), poly([-1 -2]) );
>> zpk(G)

   (s+4) (s+3)
   -----------
   (s+2) (s+1)
>>
```

Script MATLAB (continuação):

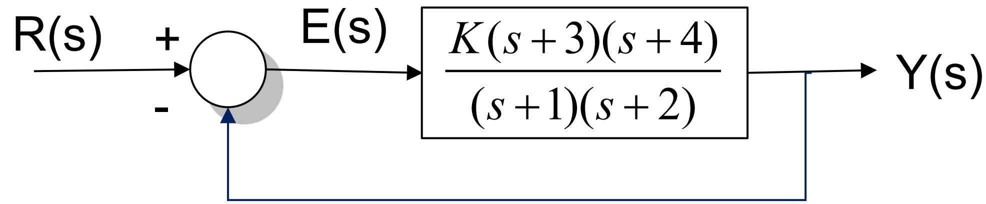
```
>> K=1;
>> ftmf=feedback(K*G, 1);
>> ftmf

   s^2 + 7 s + 12
  -----------------
  2 s^2 + 10 s + 14

>> pole(ftmf)
ans =
  -2.5000 + 0.8660i
  -2.5000 - 0.8660i

>> [num,den]=tfdata(ftmf,'v');
>> den
den =
     2    10    14
>> roots(den)
ans =
  -2.5000 + 0.8660i
  -2.5000 - 0.8660i
>> % K --> /infty
>> roots( [1 7 12] )
ans =
    -4
    -3
>>
```

Exemplo$_1$:



Malha aberta:

$$K\,G(s)\,H(s) = \frac{K(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

Malha fechada:

$$T(s) = \frac{K(s+3)(s+4)}{(1+K)s^2 + (3+7K)s + (2+12K)}$$

Quando K=0: $EC(s) = s^2 + 3s + 2$

Polos em s= -1 e s= -2

Cuando K=1: $EC(s) = 2s^2 + 10s + 14$

Raizes em: s = -2,5 $\pm$ j 0,866

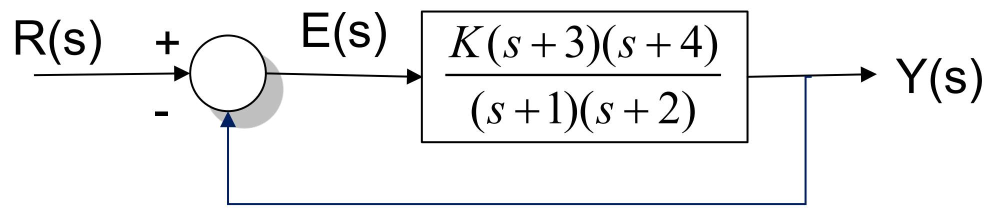
Cuando $K\rightarrow\infty$: $EC(s) \rightarrow s^2 + 7s + 12$

Raizes em: s= -4 y s= -3

Notar que:

- São considerados todos os valores positivos de K;
- Quando $K\rightarrow 0$: os polos de malha fechada são iguais aos polos da *FTMA*(s), ou aos polos de malha aberta.
- Quando $K\rightarrow\infty$: os polos de malha fechada são iguais aos zeros da *FTMA*(s).

Exemplo$_1$:

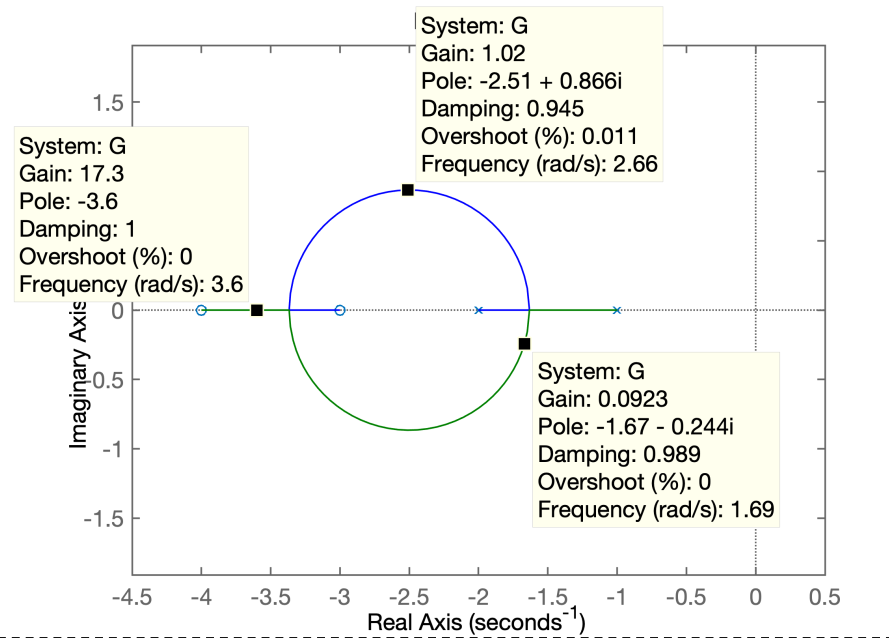


Malha aberta:

$$K\ G(s)\ H(s) = \frac{K(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

Malha fechada:

$$T(s) = \frac{K(s+3)(s+4)}{(1+K)s^2+(3+7K)s+(2+12K)}$$



Quando K=0: $EC(s) = s^2 + 3s + 2$

Polos em s= -1 e s= -2

Cuando K=1: $EC(s) = 2s^2 + 10s + 14$

Raizes em: s = -2,5 ± j 0,866

Cuando $K \rightarrow \infty$: $EC(s) \rightarrow s^2 + 7s + 12$

Raizes em: s= -4 y s= -3

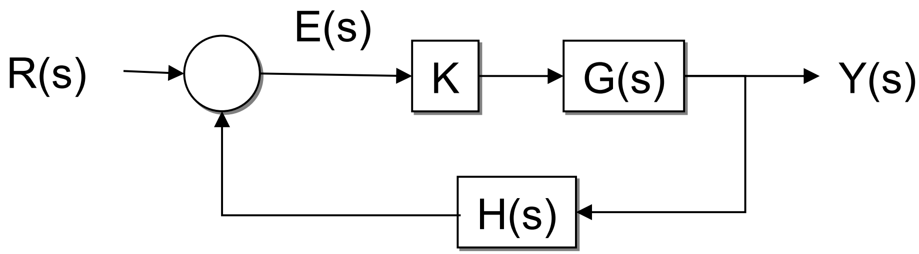
Notar que:

- São considerados todos os valores positivos de K;
- Quando $K \rightarrow 0$: os polos de malha fechada são iguais aos polos da *FTMA*(*s*), ou aos polos de malha aberta.
- Quando $K \rightarrow \infty$: os polos de malha fechada são iguais aos zeros da *FTMA*(*s*).

Script MATLAB (*continuação*):

```
>> rlocus(G)
>> axis equal % para círculos parecerem círculos...
```

Regras para desenhar o RL:



R(s) $\longrightarrow$ $T(s) = \dfrac{K \quad (s)}{1 + K\, G(s)\, H(s)}$ $\longrightarrow$ Y(s)

$$1 + K\, G(s)\, H(s) = 0 \longrightarrow G(s)H(s) = \frac{\Sigma_{i=0}^{m}(s - c_i)}{\Sigma_{j=0}^{n}(s - p_i)}$$

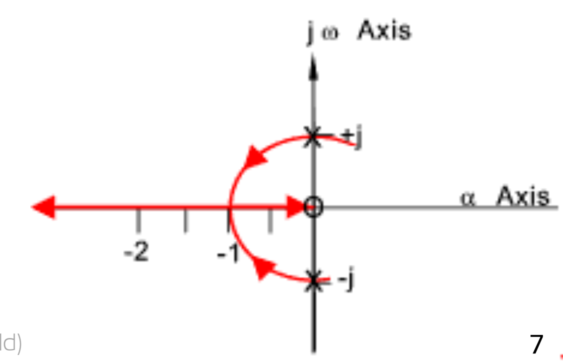
Pólos FTMA(s): x

K=0

zeros FTMF(s): o

K→∞

1. **Número de traços (curvas)**:
   ***n* , onde *n* é o número de polos de *FTMA*(s).**
   Cada uma das curvas se inicia num polo da *FTMA*(s) e termina num zero da *FTMA*(s).
2. **Inicio das trajetórias → Polos de G(s)H(s) (K=0):**
3. **Fim das trajetórias → Zeros de G(s)H(s) (K=∞):**
4. **Número de trajetórias que vão (o partem de) -∞: = |n - m|**
   Se a *FTMA*(s) possui maior quantidade de polos que zeros (como é comum), *m < n,* afirmamos que a *FTMA*(s) possui **zeros no infinito**. Neste caso, o limite da *FTMA*(s) quando *s* tende à infinito é igual a zero. O numero de zeros no infinito é igual a *(n-m)*, ou seja, a diferença entre o número de polos e zeros, corresponde ao numero de traços do L.G.R. que vão até o infinito (assíndotas).
5. **Simetria**:
   O gráfico do RL é simétrico em relação ao eixo Real.



Regras para desenhar o RL

$$1 + K\,G(s)\,H(s) = 0 \longrightarrow G(s)H(s) = \frac{\Sigma_{i=0}^{m}(s - c_i)}{\Sigma_{j=0}^{n}(s - p_i)}$$

1. **Ângulos das Retas Assíntotas, θ:**
   Se a *EC*(s) possui mais ***t*** polos que zeros, então o RL é assintótico para ***t*** linhas segundo os ângulos: $t = |n\text{-}m|$

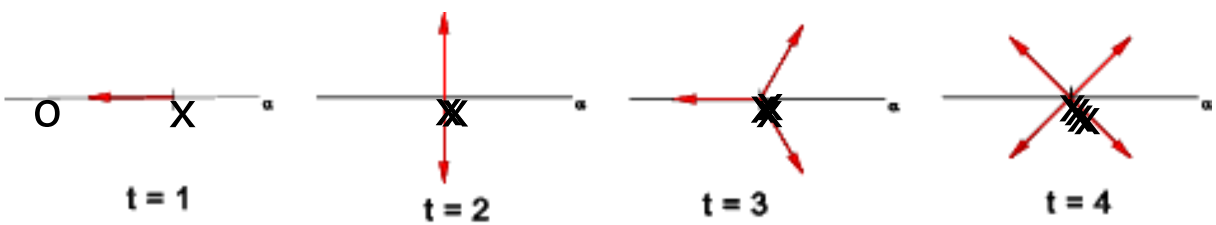
$$\theta = \frac{(2b+1)\cdot 180^o}{t}, b = 0,1,2,\dots,t-1$$

Exemplos:

Angulo assintótico em relação ao eixo real para Polos – Zeros, $t = p - z$

- $t = 1$, $\theta = 180^o$;
- $t = 2$, θ's = 90^o e 270^o (-90^o);
- $t = 3$, θ's = 60^o, 180^o e 300^o (-60^o);
- $t = 4$, θ's = 45^o, 135^o, 225^o (-135^o) e 315^o (-45^o);

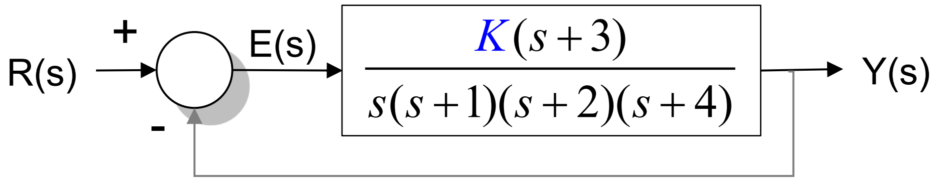
2. **Centroide das retas assíntotas:**

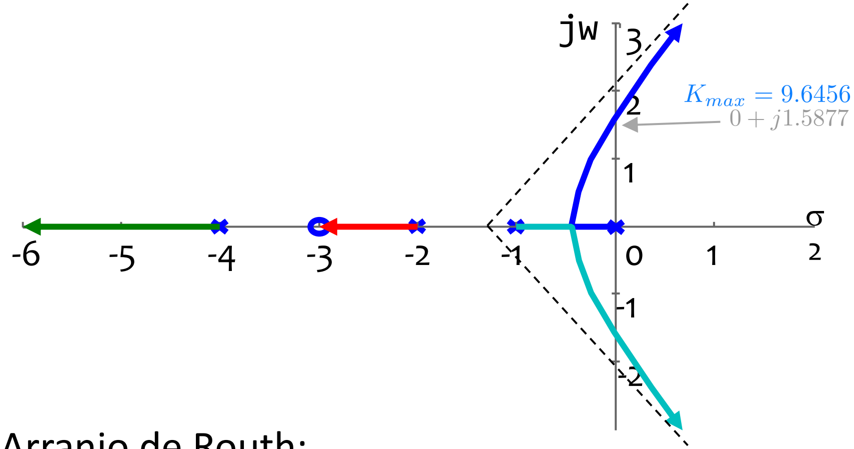


$$\sigma_c = \frac{\Sigma_n polos\{G(s)H(s)\} - \Sigma_m zeros\{G(s)H(s)\}}{|n - m|}$$

$$\theta_c = \frac{(2k+1)\cdot 180^o}{|n-m|}$$

Exemplo de RL a mão:





Identificando os pontos onde o RL encontra o eixo *jw*,
Como ocorre quando *K*=máximo ganho, se pode aplicar o **critério de Routh-Hurwitz**:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} \qquad H(s) = 1$$

$$T(s) = \frac{K\ N_G(s)\ D_H(S)}{D_G(s)\ D_H(s) + K\ N_G(s)\ N_H(S)}$$

$$T(s) = \frac{K(s+3)}{s^4 + 7s^3 + 14s^2 + (8+K)s + 3K}$$

Arranjo de Routh:

s^4	1	14	3K
s^3	7	8 + K	
s^2	$\frac{-(8+K-7\cdot 14)}{7} = \frac{90-K}{7}$	21K	
s^1	$\frac{-K^2-65K+720}{90-K}$		
s^0	21K		

$K < 90$

Somente s^1 pode levar à $K < 0$, então:

$$-K^2 - 65K + 720 = 0$$

```
>> K = roots([-1 -65 720])
K =
  -74.6456
    9.6456
>>
```

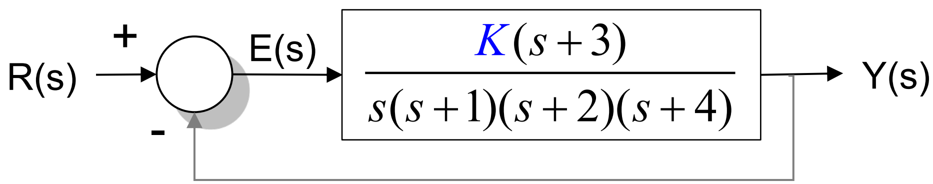
Formando o polinômio a partir da linha s^2, com K = 9,65:

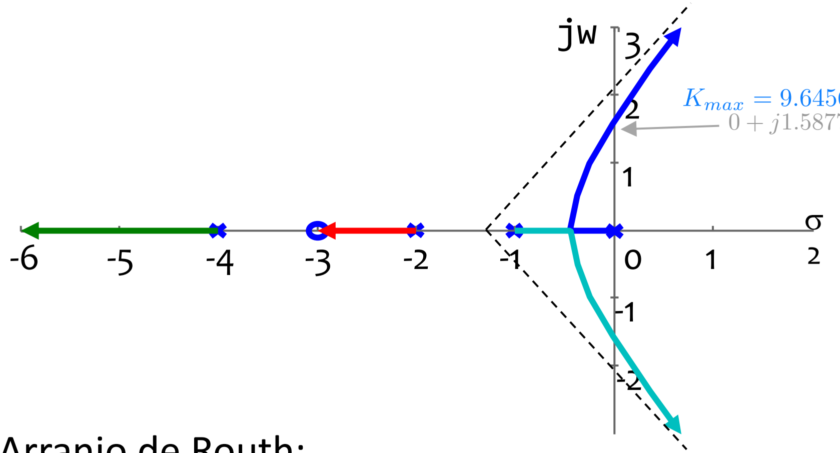
$$\left(\frac{90-K}{7}\right)s^2 + \underbrace{\cancel{\frac{(-K^2-65K+720)}{(90-K)}}}_{=0}s^1 + 21Ks^0 = 0$$

$$(90 - K)s^2 + 21K = 80{,}35s^2 + 202{,}7 = 0$$

```
>> roots([90-K(2) 0 21*K(2)])
ans =
        0 + 1.5877i
        0 - 1.5877i
>>
```

Exemplo de RL a mão:





Identificando os pontos onde o RL encontra o eixo *jw*,
Como ocorre quando *K*=máximo ganho, se pode aplicar o **critério de Routh-Hurwitz**:

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} \qquad H(s) = 1$$

$$T(s) = \frac{K\ N_G(s)\ D_H(S)}{D_G(s)\ D_H(s) + K\ N_G(s)\ N_H(S)}$$

$$T(s) = \frac{K(s+3)}{s^4 + 7s^3 + 14s^2 + (8+K)s + 3K}$$

Somente s^1 pode levar à $K < 0$, então:

$$-K^2 - 65K + 720 = 0$$

```
>> K = roots([-1 -65 720])
K =
  -74.6456
    9.6456
>>
```

Arranjo de Routh:

s^4	1	14	3K
s^3	7	8 + K	
s^2	$\frac{-(8+K-7\cdot 14)}{7} = \frac{90-K}{7}$	21K	
s^1	$\frac{-K^2-65K+720}{90-K}$		
s^0	21K		

$K < 90$

Formando o polinômio a partir da linha s^2, com $K = 9{,}65$:

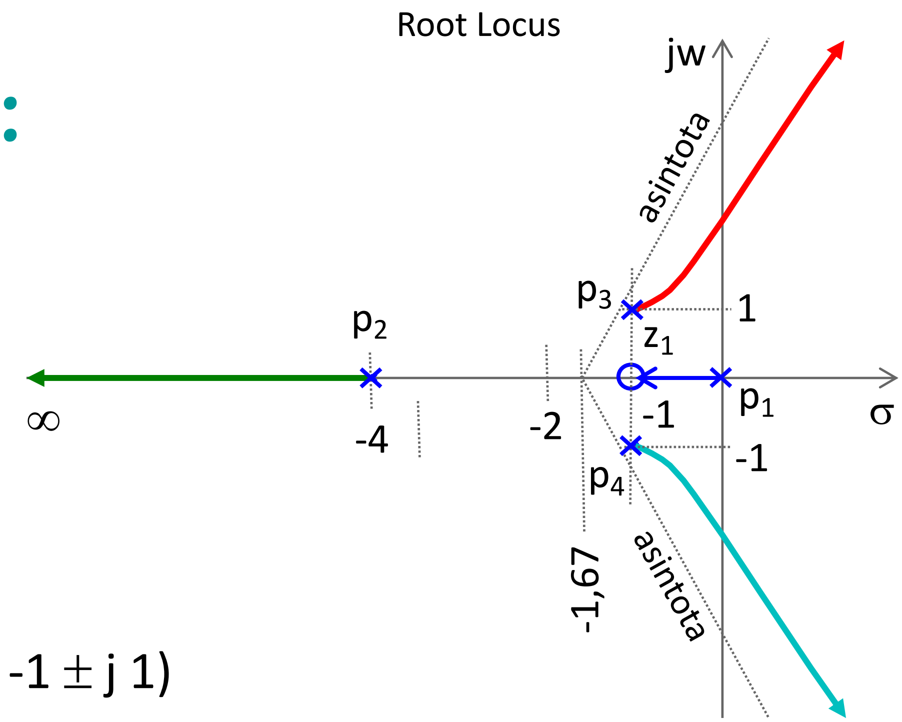
$$\left(\frac{90-K}{7}\right)s^2 + \underbrace{\cancel{\frac{(-K^2-65K+720)}{(90-K)}}}_{=0}s^1 + 21Ks^0 = 0$$

$$(90-K)s^2 + 21K = 80{,}35s^2 + 202{,}7 = 0$$

```
>> roots([90-K(2) 0 21*K(2)])
ans =
        0 + 1.5877i
        0 - 1.5877i
>>
```

Exemplo de RL a mão:

- Seja: $G(s) = \dfrac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$



Número de zeros: m = 1 (z_1= -1)

Número de polos: n = 4 (p_1= 0, p_2= -4, $p_{3,4}$= -1 $\pm$ j 1)

Número de trajetórias que vão (ou partem de) ∞, t = |n-m|=|4-1|=3

Ângulos das Retas Assíntotas,

Neste caso, t = 3, então: θ = 60º, 180º y 300º

$$\theta = \frac{(2b+1)\cdot 180^o}{t}, b = 0,1,2,\ldots, t-1$$

RL sobre o eixo Real{s}: de p_1 → z_1 (para a esquerda),

Outros traços: p_2 → ∞, p_3 → ∞, p_4 → ∞.

Centroide das retas assíntotas:

$$\sigma = \frac{\sum_n \text{polos}\{G(s)H(s)\} - \sum_m \text{zeros}\{G(s)H(s)\}}{|n-m|}$$

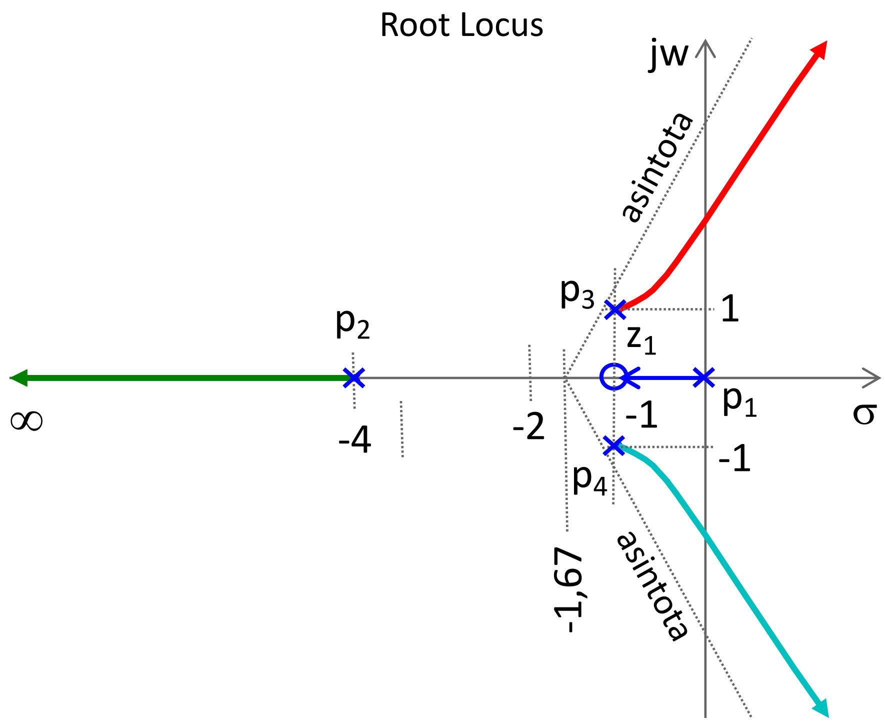
$$\sigma = \frac{(0-4-1-j-1+j)-(-1)}{|4-3|} =$$

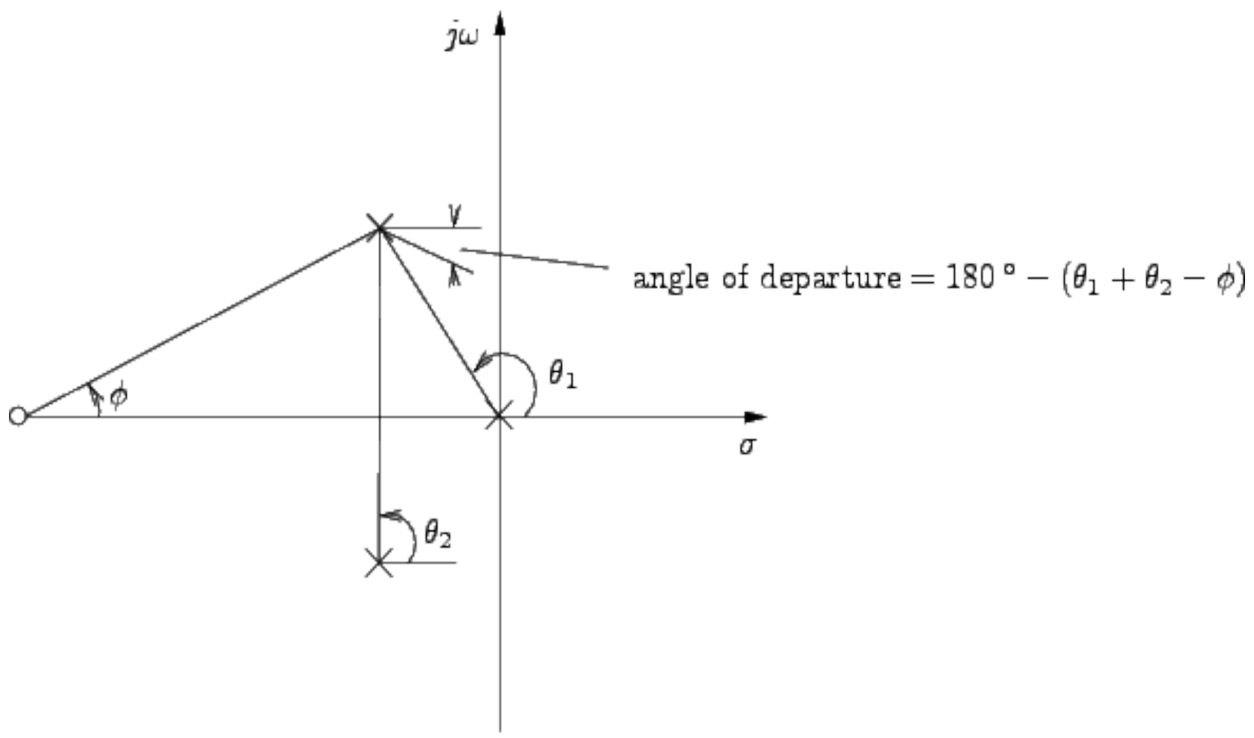
$$\sigma = -\frac{5}{3} = -1,6667$$

Exemplo de RL a mão:

- Sea: $G(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$

Ângulos de partida

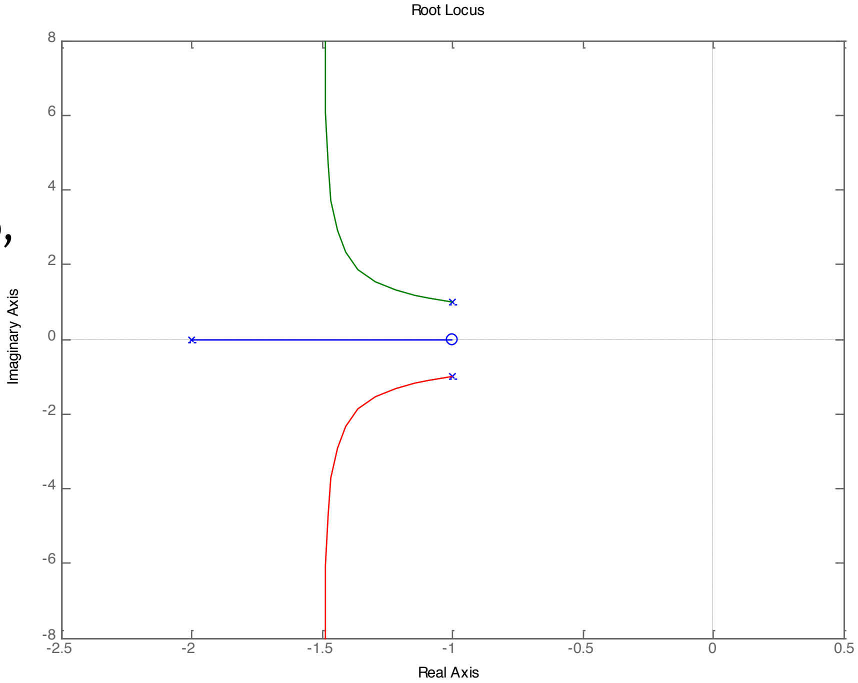


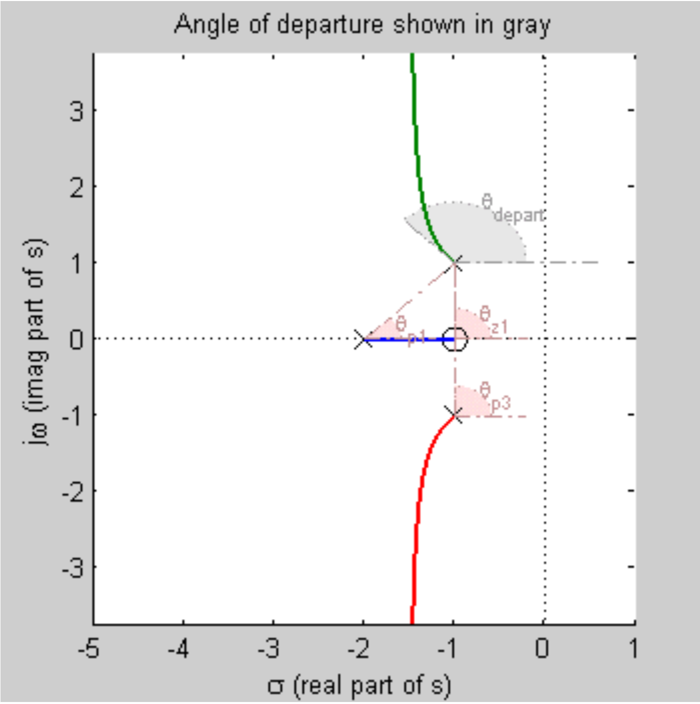


Outro Exemplo:

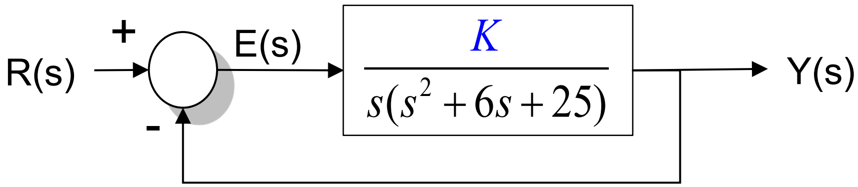
$$G(s)H(s) = \frac{s+1}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4}$$

- Temos n = 3 polos em s = -2, -1 ± 1j.
- Temos m = 1 zero finito em s = -1.
- Portanto existe |3-1| = 2 zeros que tendem ao infinito.
- A equação característica é: 1 + KG(s)H(s) = 0; o, 1 + KN(s)/D(s) = 0,
- ou D(s) + KN(s) = $s^3 + 4s^2 + 6s + 4 + K(s + 1) = 0$





Outro Exemplo



- m=0 (num. zeros);
- n=3 (polos);
- $\theta = \dfrac{r \cdot 180^o}{m-n}$

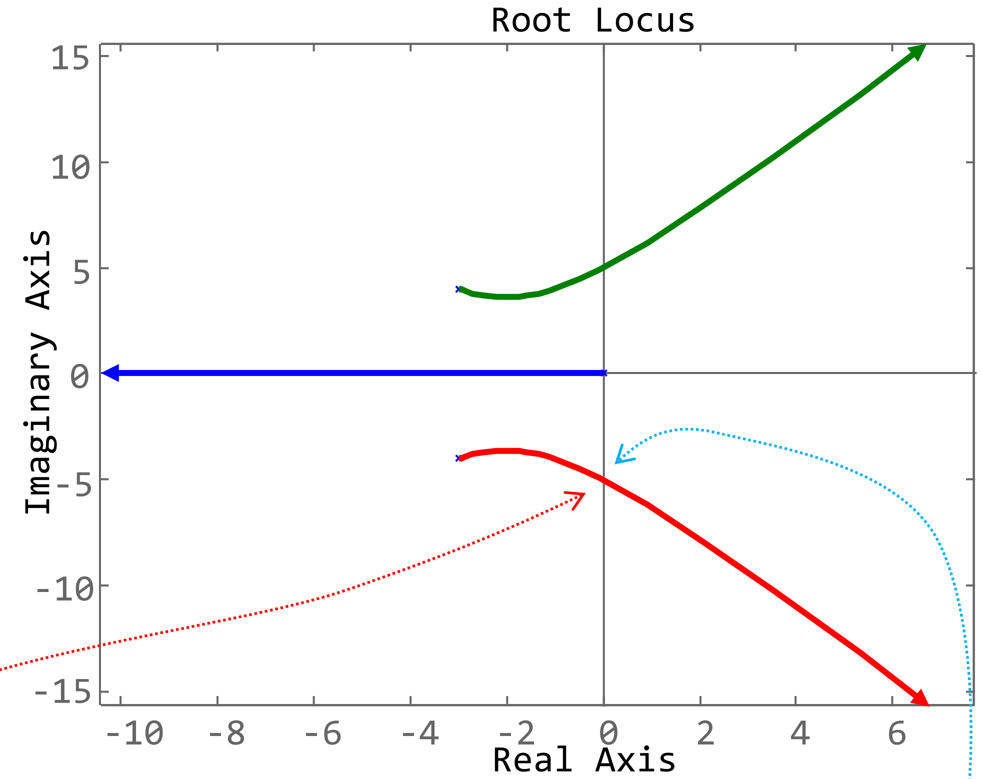
∀ θ=60°, -60°, 180°

- $T(s) = \dfrac{G(s)}{1+G(s)}$
- $T(s) = \dfrac{K}{s^3+6s^2+25s+K}$

Tabla de Routh:

s^3	1	25
s^2	6	K
s^1	$=\dfrac{150-K}{6}$	0
s^0	K	0

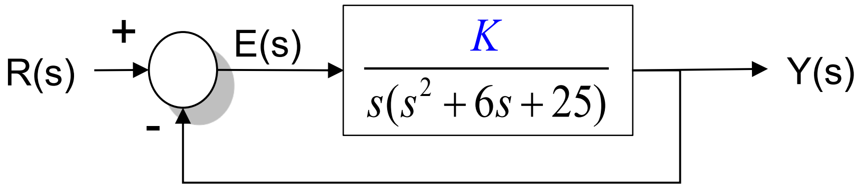
Marginalmente estável com K=150:
Pólos malha fechada em: s=0; s=... →




```
>> num=1;
>> den=conv([1 0],[1 6 25]);
>> g=tf(num,den)
Transfer function:
        1
------------------
s^3 + 6 s^2 + 25 s
>> zpk(g)
Zero/pole/gain:
        1
-----------------
s (s^2 + 6s + 25)
>> rlocus(g)
```

```
>> roots([1 6 25]);
ans =
  -3.0000 + 4.0000i
  -3.0000 - 4.0000i
>>
>>
    eval(solve('s*s*s+6*s*s+2
    5*s+150'))
ans =
  -6.0000
       0 + 5.0000i
       0 - 5.0000i
>>
```

Outro Exemplo



- m=0 (num. zeros);
- n=3 (polos);
- $\theta = \dfrac{r \cdot 180^o}{m-n}$

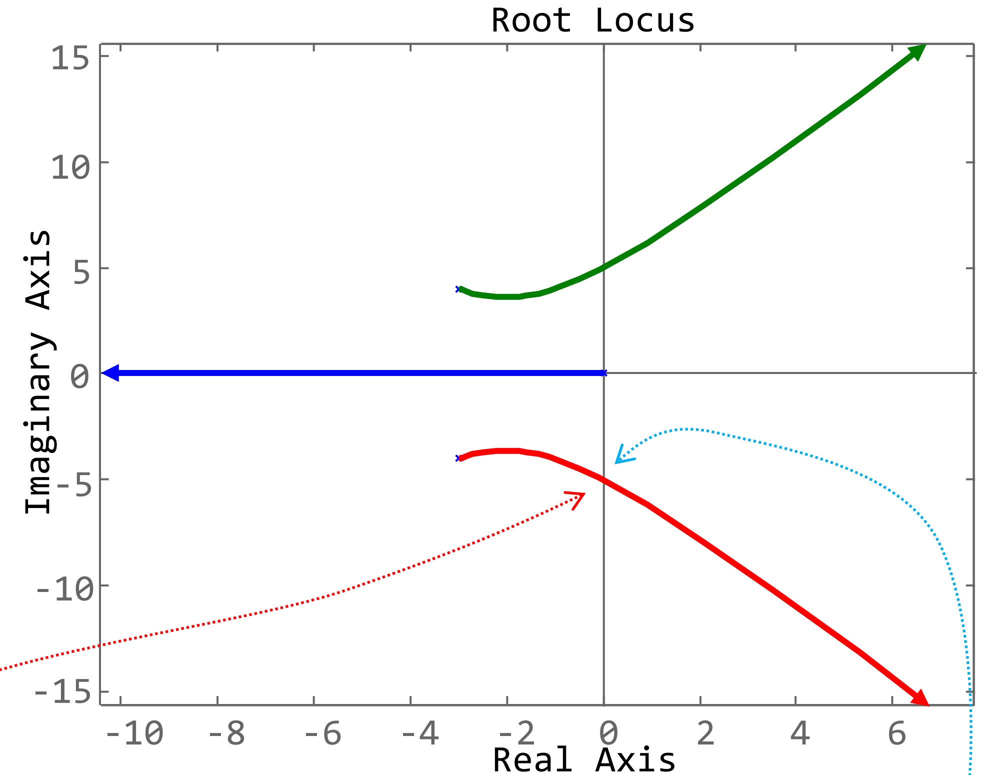
∀ θ=60°, -60°, 180°

- $T(s) = \dfrac{G(s)}{1+G(s)}$
- $T(s) = \dfrac{K}{s^3+6s^2+25s+K}$

Tabla de Routh:

s^3	1	25
s^2	6	K
s^1	$=\dfrac{150-K}{6}$	0
s^0	K	0

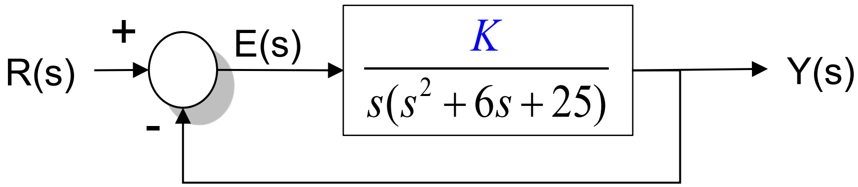
Marginalmente estável com *K*=150:
Pólos malha fechada em: s=0; s=... →

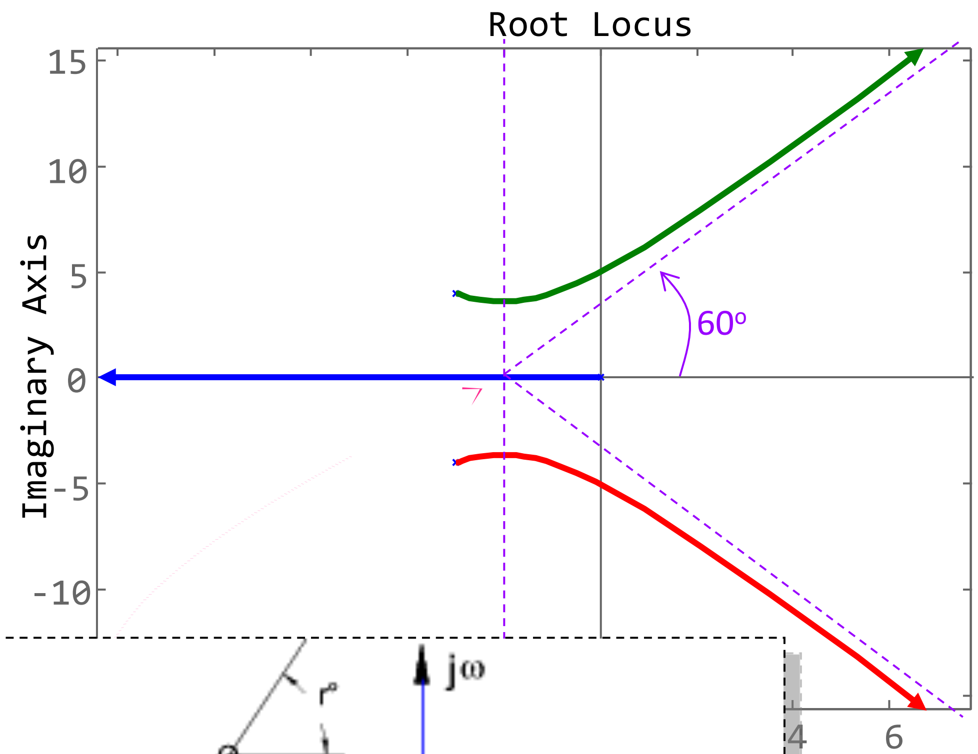



```
>> num=1;
>> den=conv([1 0],[1 6 25]);
>> g=tf(num,den)
Transfer function:
         1
------------------
s^3 + 6 s^2 + 25 s
>> zpk(g)
Zero/pole/gain:
         1
-----------------
s (s^2 + 6s + 25)
>> rlocus(g)
```

```
>> roots([1 6 25]);
ans =
  -3.0000 + 4.0000i
  -3.0000 - 4.0000i
>>
>>
    eval(solve('s*s*s+6*s*s+2
    5*s+150'))
ans =
  -6.0000
        0 + 5.0000i
        0 - 5.0000i
>>
```

Outro Exemplo





- m=0 (num. ceros);
- n=3 (polos);
- $\theta = \frac{r \cdot 180^o}{m-n}$

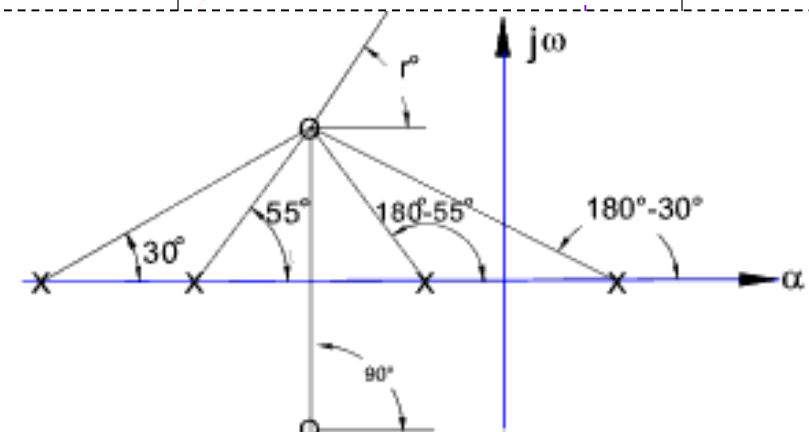
∀ θ=60°, -60°, 180°

- $T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$
- $T(s) = \frac{K}{s^3+6s^2+25s+K}$

$$\sigma = \frac{\sum_n \text{polos}\{G(s)H(s)\} - \sum_m \text{zeros}\{G(s)H(s)\}}{|n-m|}$$

$$\sigma_c = \frac{(-3-3)}{|3-0|} = -2$$

↑ Ponto de partida



To find angle r

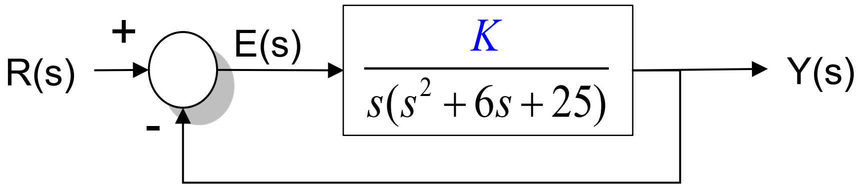
Angulo de partida: $\{\angle(s - z_1) \ldots + \angle(s - z_m)\} - \{\angle(s - p_1) \ldots + \angle(s - p_n)\}$

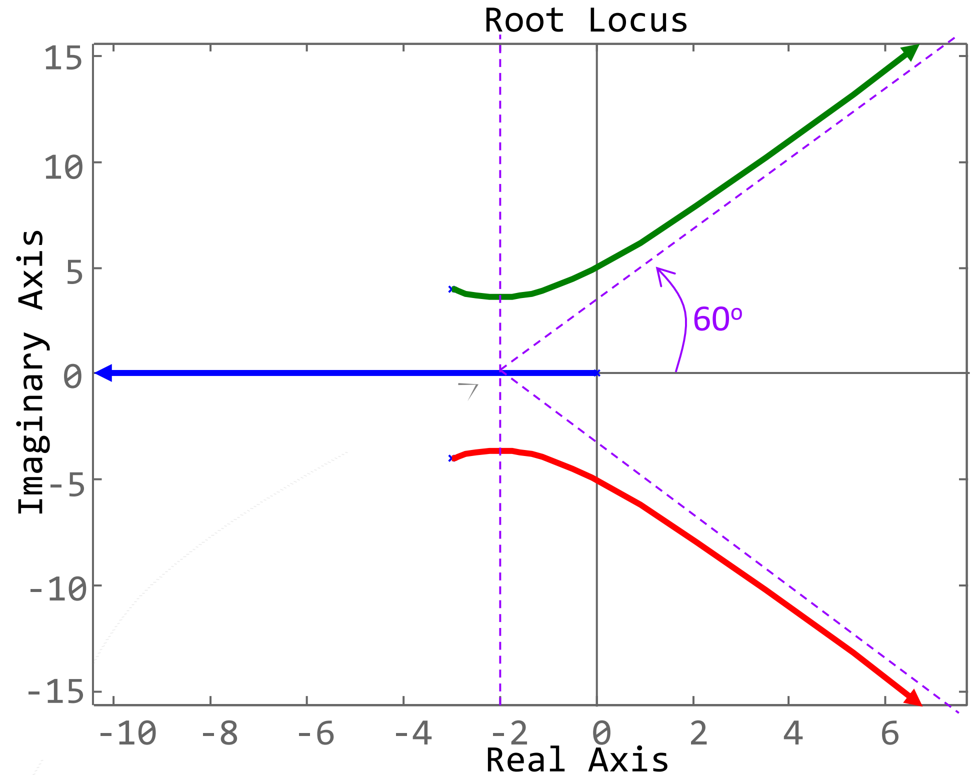
$= (2 . i + 1)\,\pi$ ... i = some real integer

$(90^\circ + r^\circ) - \{(180^\circ - 30^\circ) + 30^\circ + (180^\circ - 55^\circ) + 55^\circ = (2 . i + 1)\, 180^\circ$

Setting i = -1 Then $(90^\circ + r^\circ) = 360^\circ - 180^\circ$ therefore $r = 90^\circ$

Outro Exemplo





- m=0 (num. ceros);
- n=3 (polos);
- $\theta = \frac{r \cdot 180^o}{m-n}$

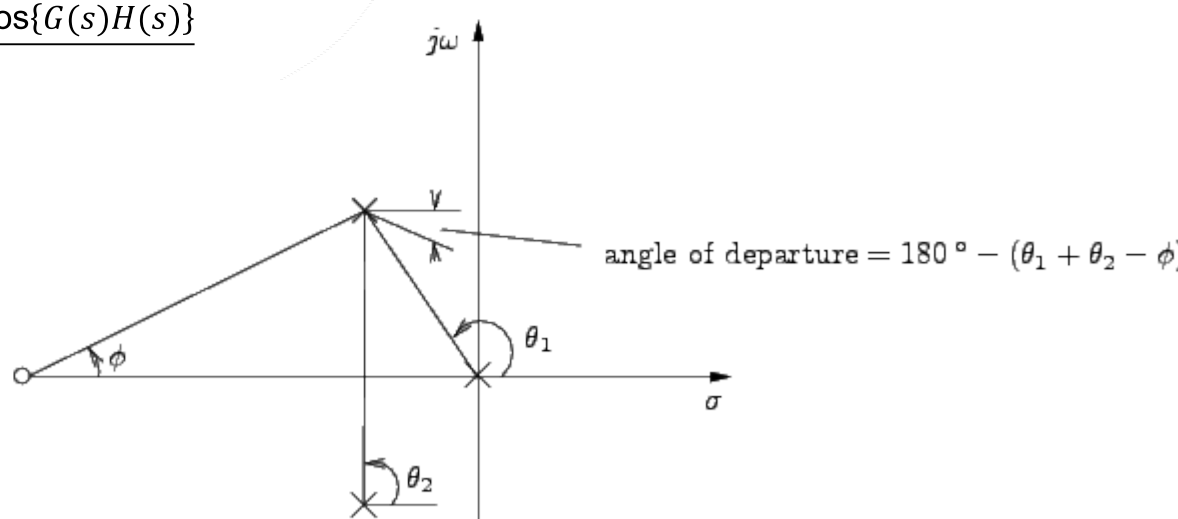
∀ θ=60º, -60º, 180º

- $T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$
- $T(s) = \frac{K}{s^3+6s^2+25s+K}$

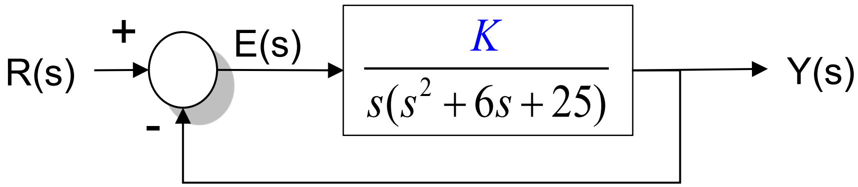
$$\sigma = \frac{\sum_n \text{polos}\{G(s)H(s)\} - \sum_m \text{zeros}\{G(s)H(s)\}}{|n-m|}$$

$$\sigma_c = \frac{(-3-3)}{|3-0|} = -2$$

Angulo de partida:



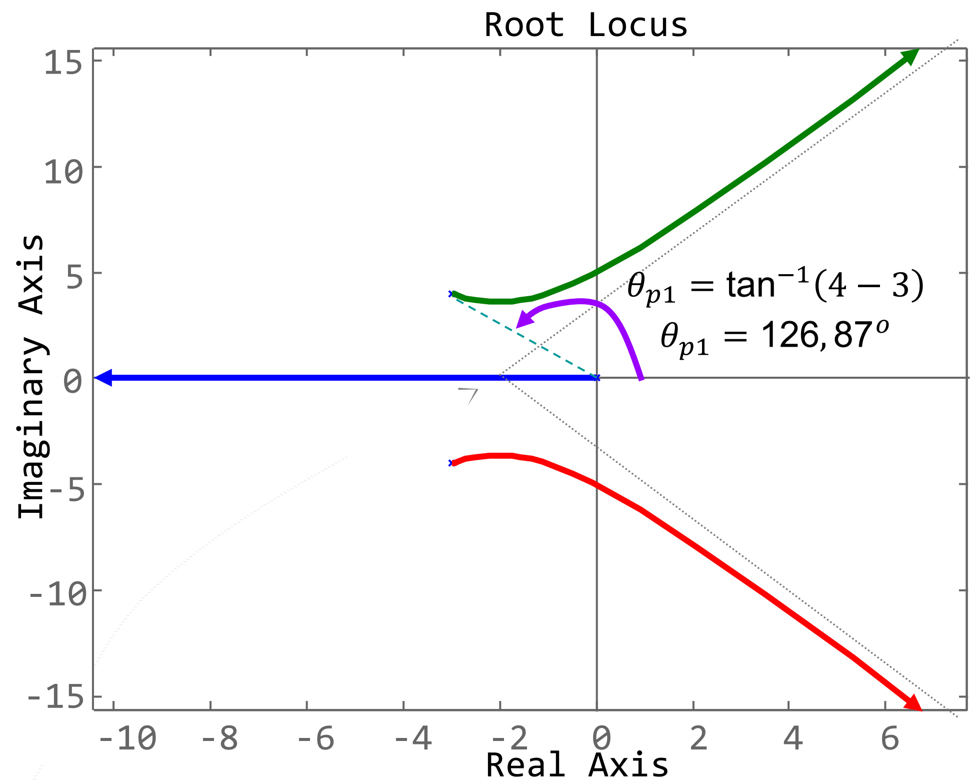
Otro Ejemplo



- m=0 (num. ceros);
- n=3 (polos);
- $\theta = \frac{r \cdot 180^o}{m-n}$

∀ θ=60°, -60°, 180°

- $T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$
- $T(s) = \frac{K}{s^3+6s^2+25s+K}$

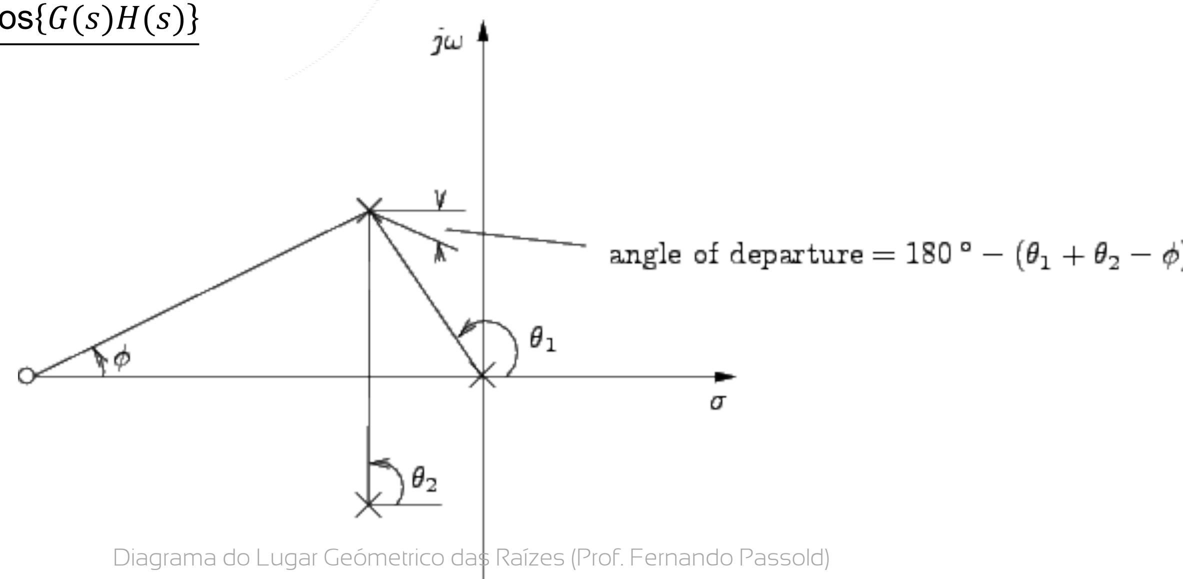


$$\sigma = \frac{\sum_n \text{polos}\{G(s)H(s)\} - \sum_m \text{zeros}\{G(s)H(s)\}}{|n-m|}$$

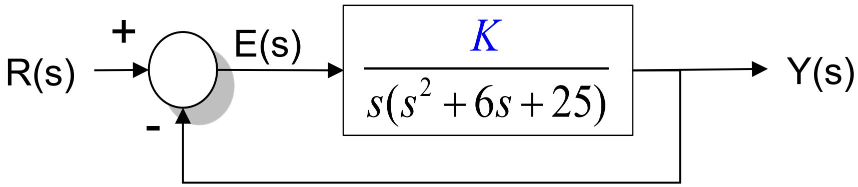
$$\sigma_c = \frac{(-3-3)}{|3-0|} = -2$$

Angulo de partida:

$$\alpha = 180^o - 126.87^o - 90^o$$
$$\alpha = -36,87^o$$



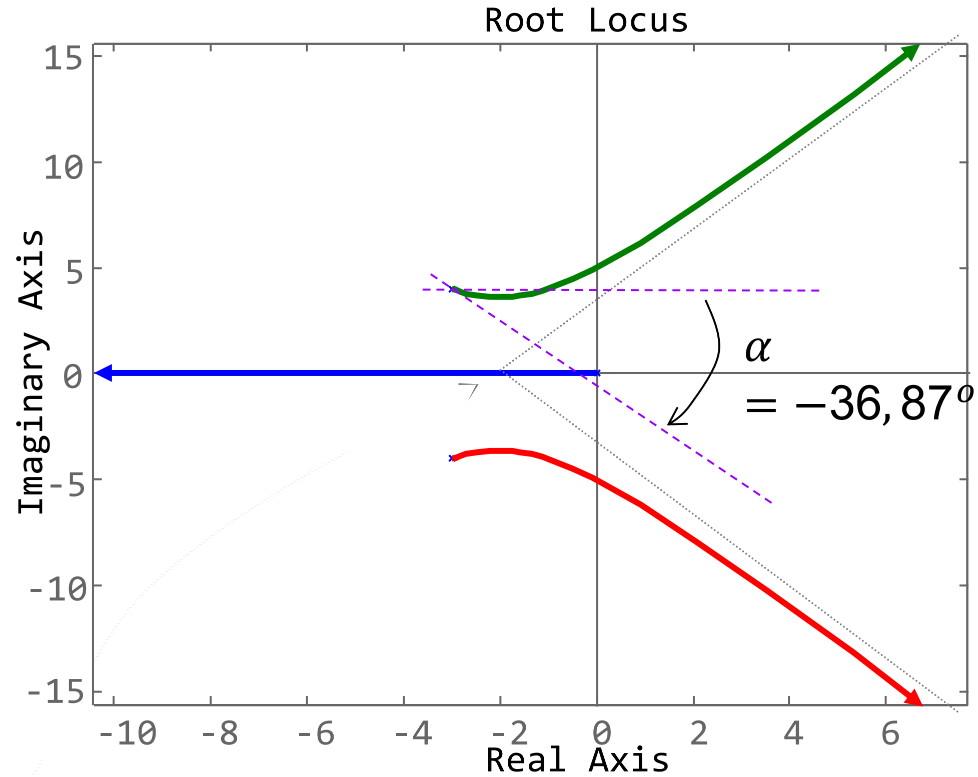
Outro Exemplo



- m=0 (num. ceros);
- n=3 (polos);
- $\theta = \frac{r \cdot 180^o}{m-n}$

∀ θ=60°, -60°, 180°

- $T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$
- $T(s) = \frac{K}{s^3+6s^2+25s+K}$

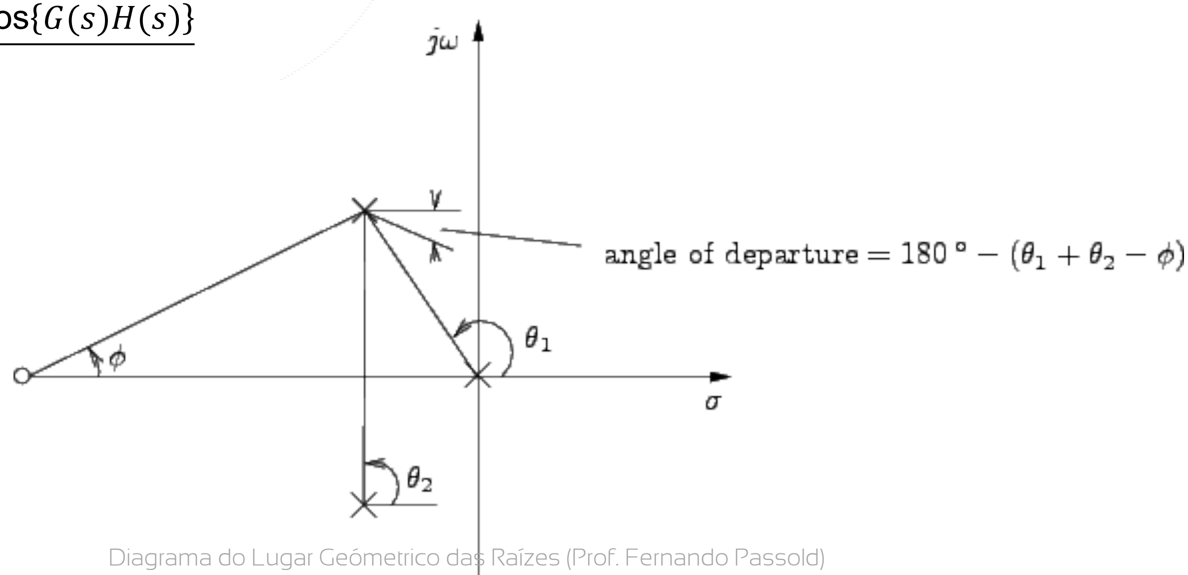


$$\sigma = \frac{\sum_n \text{polos}\{G(s)H(s)\} - \sum_m \text{zeros}\{G(s)H(s)\}}{|n-m|}$$

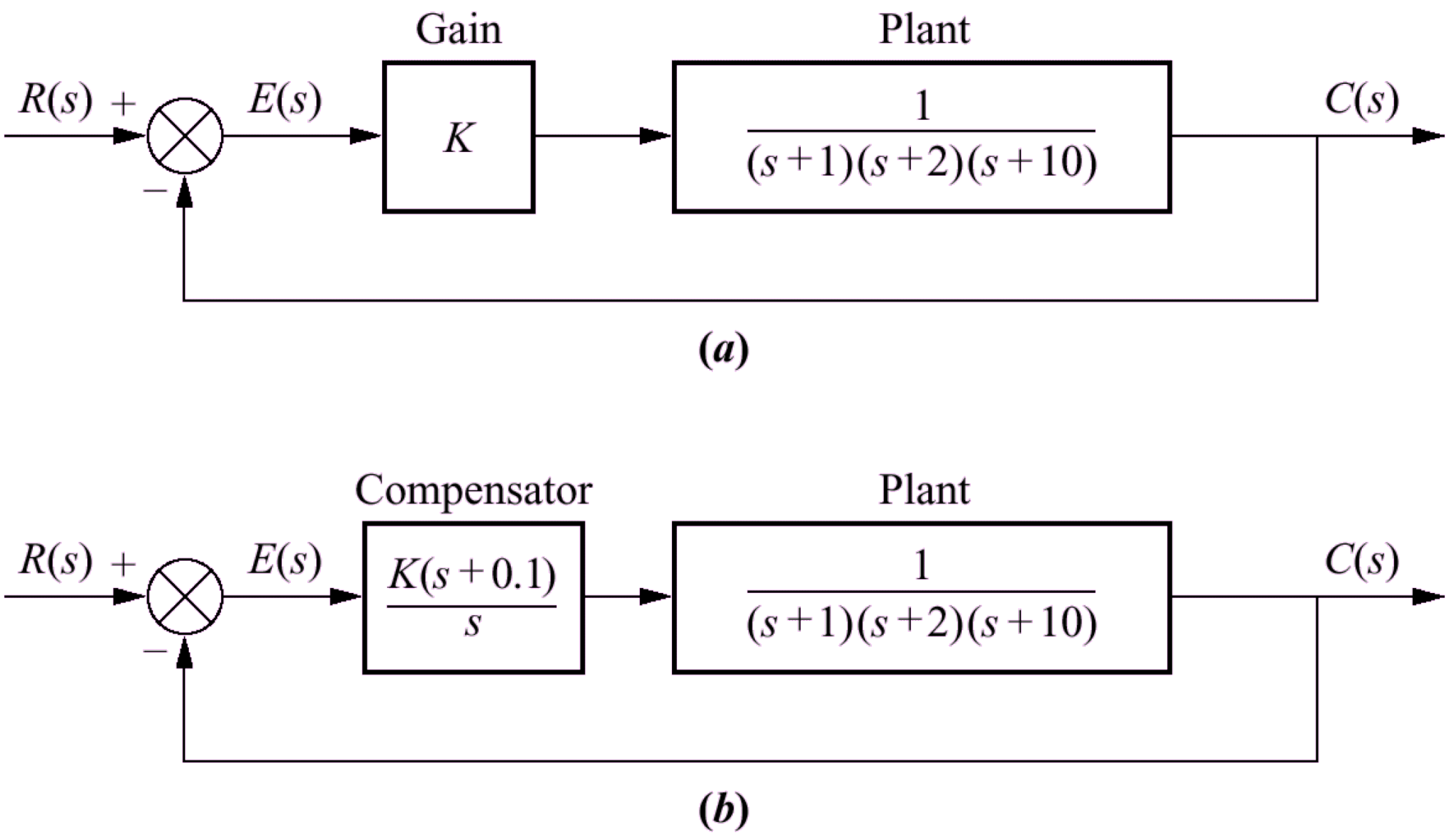
$$\sigma_c = \frac{(-3-3)}{|3-0|} = -2$$

Angulo de partida:

$$\alpha = 180^o - 126.87^o - 90^o$$
$$\alpha = -36,87^o$$



Projeto usando RL



a) Antes da Compensação
b) Depois de uma melhor compensação.