Estabilidade

Prof. Fernando Passold
Controle Automático II
Engenharia Elétrica / UPF

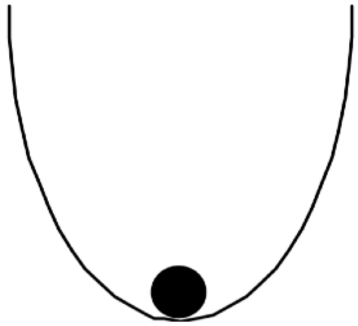
Atualizado em 26.03.2019

Objetivos do Capitulo

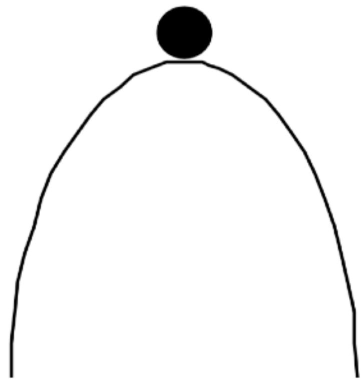
- Como determinar a estabilidade de um sistema baseado somente na sua função transferência?
- Como determinar (calcular) parâmetros do sistema de forma a garantir sua estabilidade?

Estabilidade

- Um sistema está em seu ponto de equilíbrio, se na ausência de novas entradas ou perturbações, permanece no mesmo estado.
- Um ponto de equilíbrio pode ser:



a) Estável (regressa ao estado inicial)

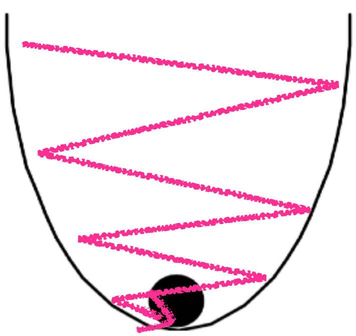


b) Instável (não regressa ao estado inicial)

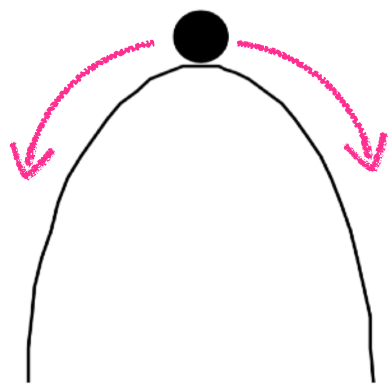
c) Marginalmente estável ou neutro

Estabilidade

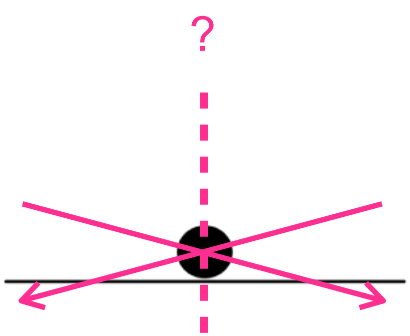
- Um sistema está em seu ponto de equilíbrio, se na ausência de novas entradas ou perturbações, permanece no mesmo estado.
- Um ponto de equilíbrio pode ser:



a) Estável (regressa ao estado inicial)



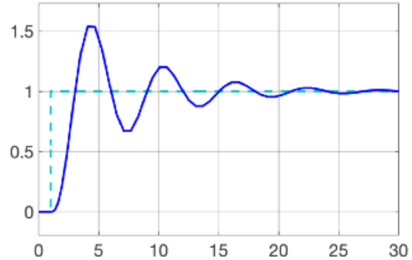
b) Instável (não regressa ao estado inicial)

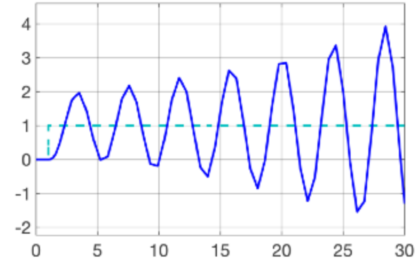


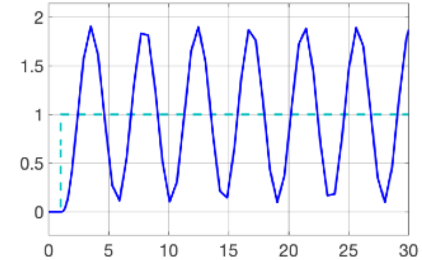
c) Marginalmente estável ou neutro

Definições

- Definições de estabilidade para um sistema LTI (*Linear Time Invariant* – Sistema Invariante no Tempo):

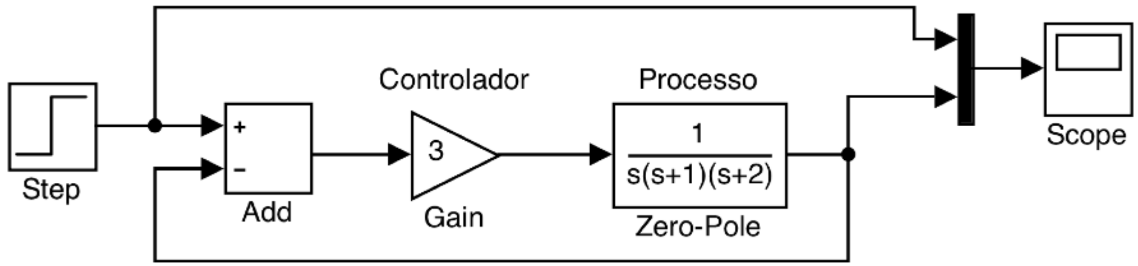






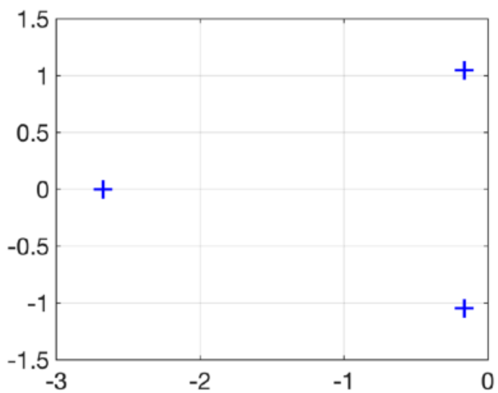
  - Estável: Si $y_n(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$
  - Instável: Si $y_n(t) \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow \infty$
  - Marginalmente estável: Si $y_n(t) \rightarrow cte$, cuándo $t \rightarrow \infty$, isto é, não cresce nem decresce no tempo (é oscilatório).
- Usando enfoque de resposta total (BIBO):
  - Estável: Se **toda** a entrada limitada → saída limitada;
  - Instável: Se **qualquer** entrada limitada → saída sem limites.

Exemplo[1]:
Seja o seguinte sistema:



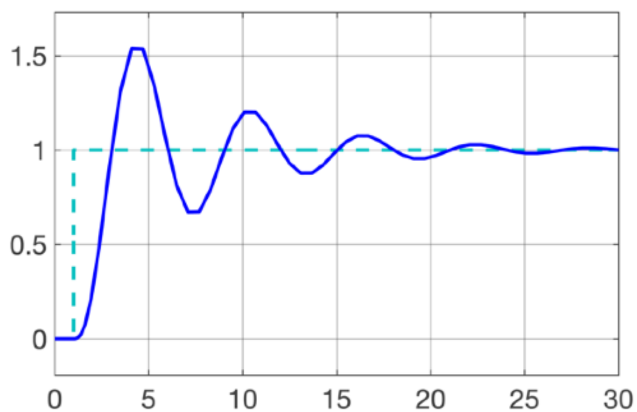
- **Estável:** Si $y_n(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$

plano-*s*



Pólos de MF estáveis
(no semi-plano esquerdo)

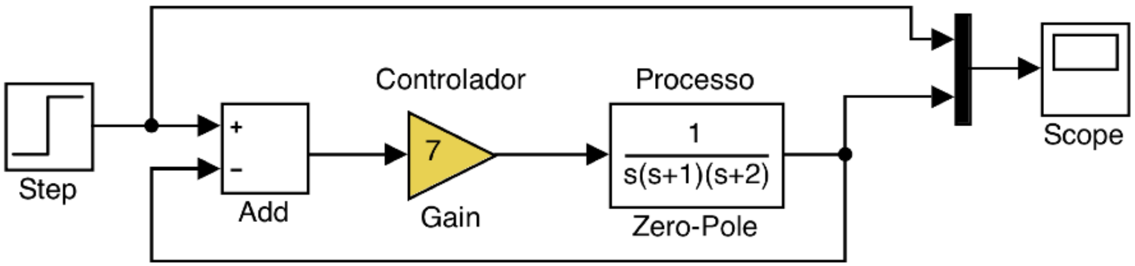
Resposta temporal




```
>> G=tf(1,poly([0 -1 -2]));
>> zpk(G)
        1
  -------------
  s (s+2) (s+1)
Continuous-time zero/pole/gain model.
>> K=3;
>> ftmf=feedback(K*G,1);
>> zpk(ftmf)
                   3
  ---------------------------------
  (s+2.672) (s^2 + 0.3283s + 1.123)
>> pole(ftmf)
  -2.6717 + 0.0000i
  -0.1642 + 1.0469i
  -0.1642 - 1.0469i
>>
```

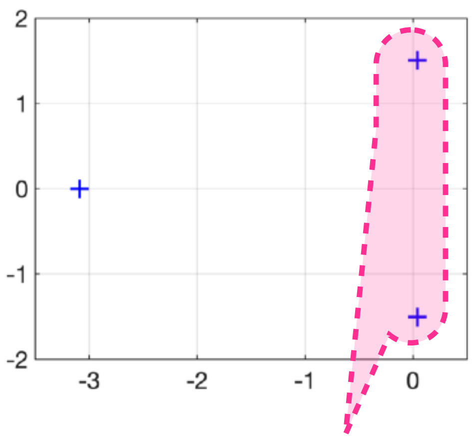
[NISE, Fig. 6.1]

Exemplo2:
Seja o seguinte sistema:



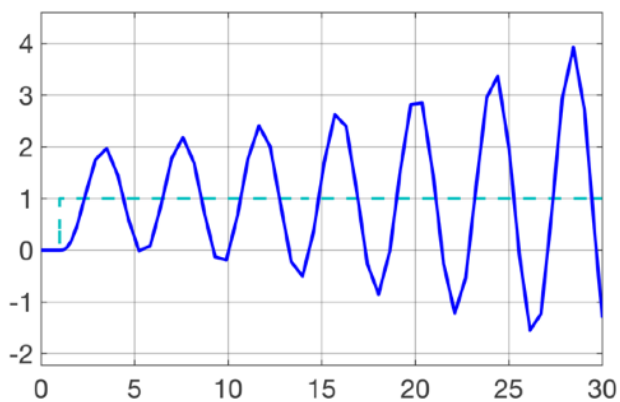
- **Instável:** Si $y_n(t) \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow \infty$

plano-*s*



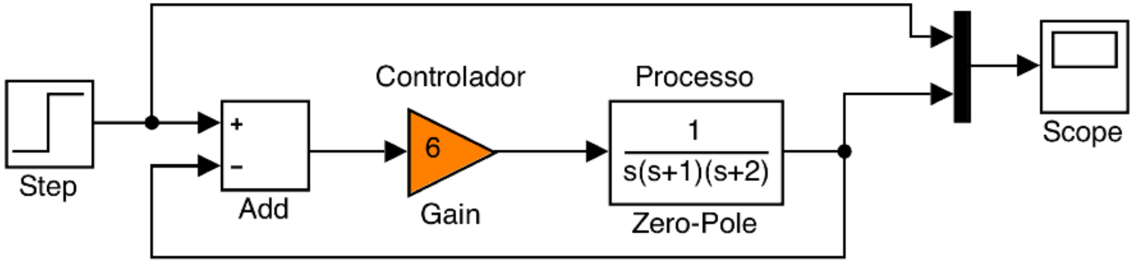
Pólos de MF **instáveis**
(no semi-plano direito)

Resposta temporal



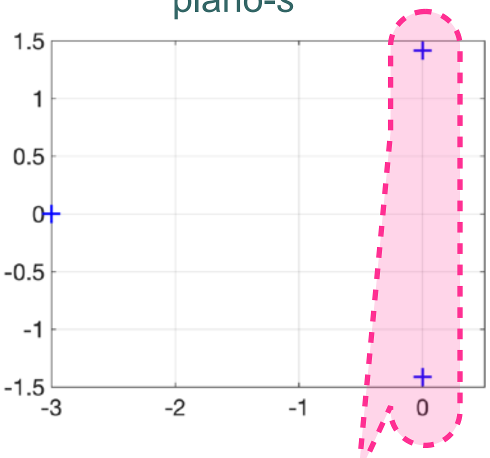
```
>> G=tf(1,poly([0 -1 -2]));
>> zpk(G)
        1
  -------------
  s (s+2) (s+1)
Continuous-time zero/pole/gain model.
>> K=7; % Note: ganho aumentou!
>> ftmf=feedback(K*G,1);
>> zpk(ftmf)
                   7
  ----------------------------------
  (s+3.087) (s^2 - 0.08675s + 2.268)
>> pole(ftmf)
  -3.0867 + 0.0000i
   0.0434 + 1.5053i
   0.0434 - 1.5053i
>>
```

Exemplo3:
Seja o seguinte sistema:



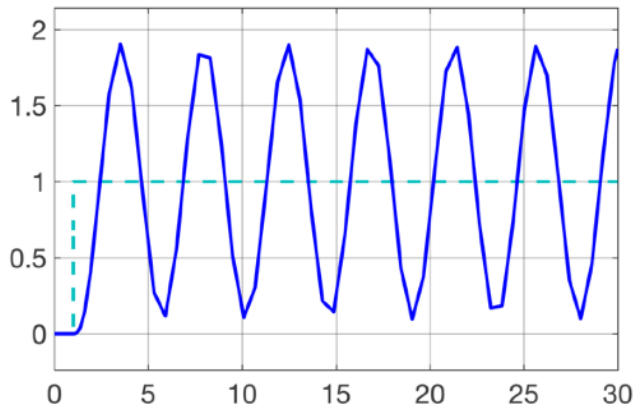
- **Marginalmente estável:** Si $y_n(t) \rightarrow cte$, cuándo $t \rightarrow \infty$

plano-*s*



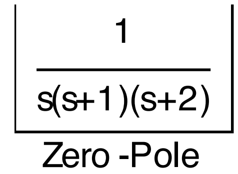
Pólos de MF **sobre** parte imaginária do plano-*s*

Resposta temporal

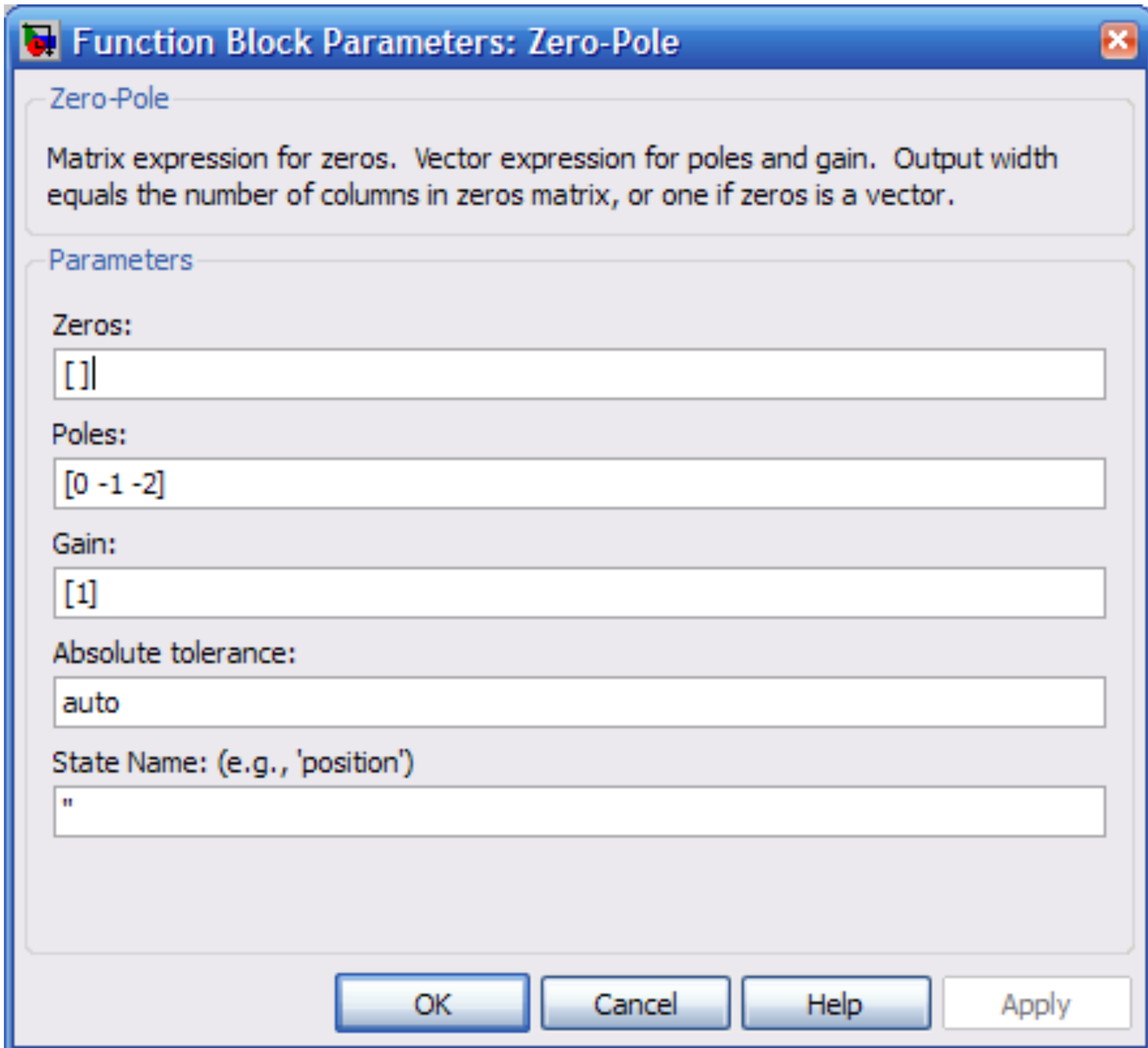


```
>> G=tf(1,poly([0 -1 -2]));
>> zpk(G)
        1
  -------------
  s (s+2) (s+1)
Continuous-time zero/pole/gain model.
>> K=7; % Note: ganho aumentou!
>> ftmf=feedback(K*G,1);
>> zpk(ftmf)
          6
  ---------------
  (s+3) (s^2 + 2)
>> pole(ftmf)
  -3.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 1.4142i
   0.0000 - 1.4142i
>>
```

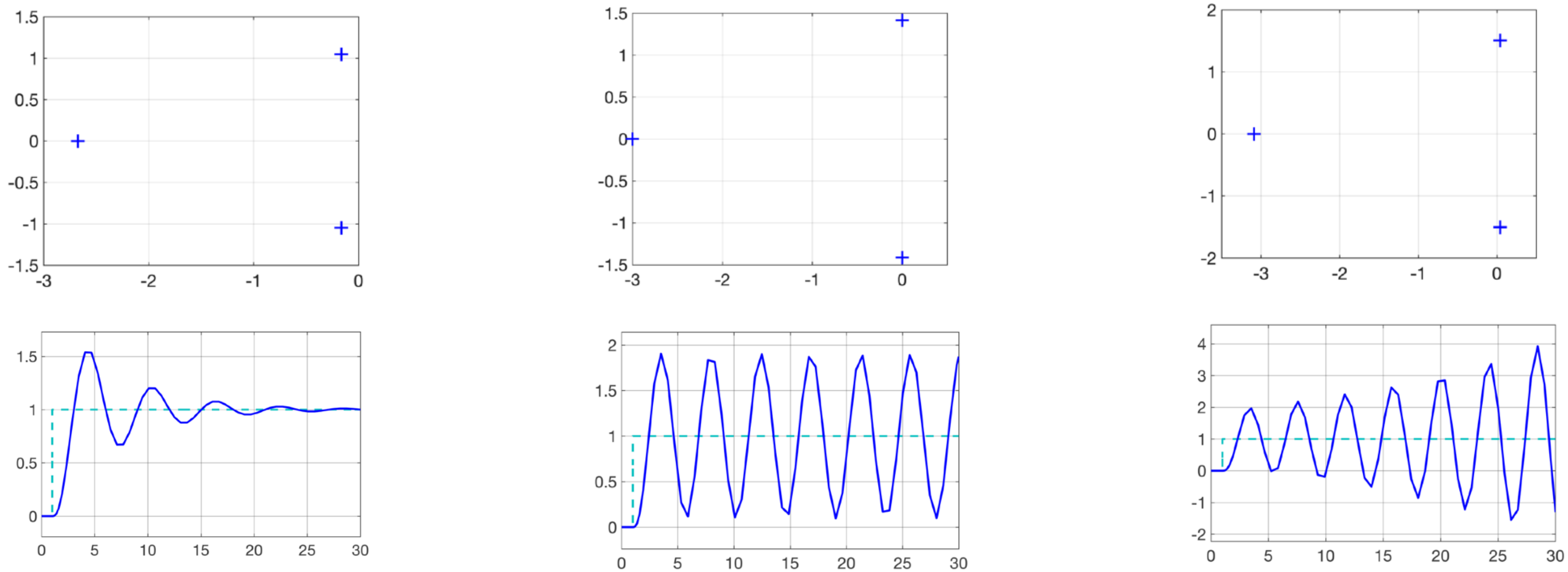
Detalhes



do [NISE ,2000]



Como determinar a estabilidade do sistema?



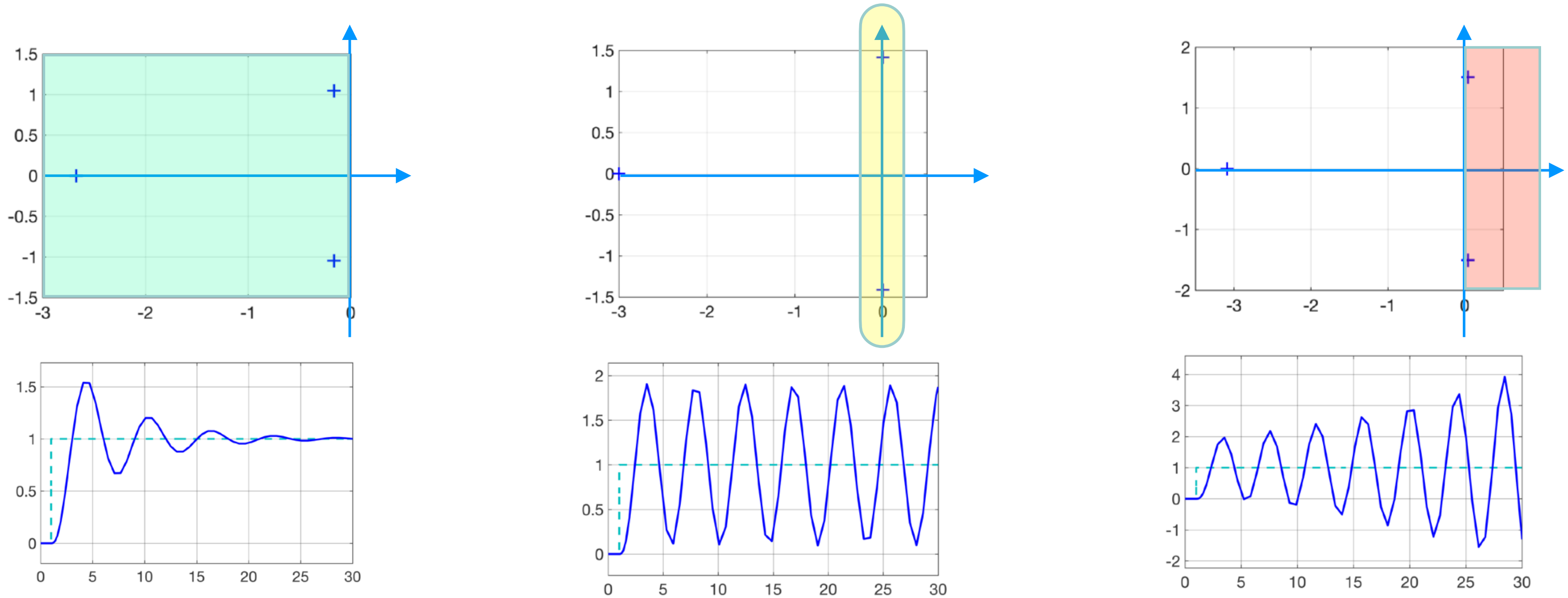
(a) (b) (c)

a) Sistema Estável: a função de transferência de laço fechado possui pólos somente no semiplano esquerdo do plano-*s*.

b) Sistemas Marginalmente Estáveis: suas funções de transferência de laço fechado exibem pólos sobre o eixo imaginário do plano-*s*.

c) Sistemas Instáveis: as funções de transferência de laço fechado possuem ao menos um de seus pólos no semiplano da direita do plano-*s*.

Estabilidade x Pólos (MF) do sistema?



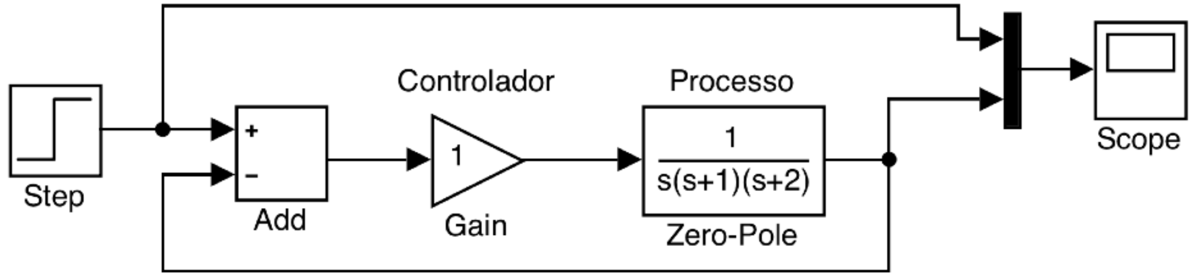
(a) (b) (c)

a) Sistema Estável: a função de transferência de laço fechado possui pólos somente no semiplano esquerdo do plano-*s*.

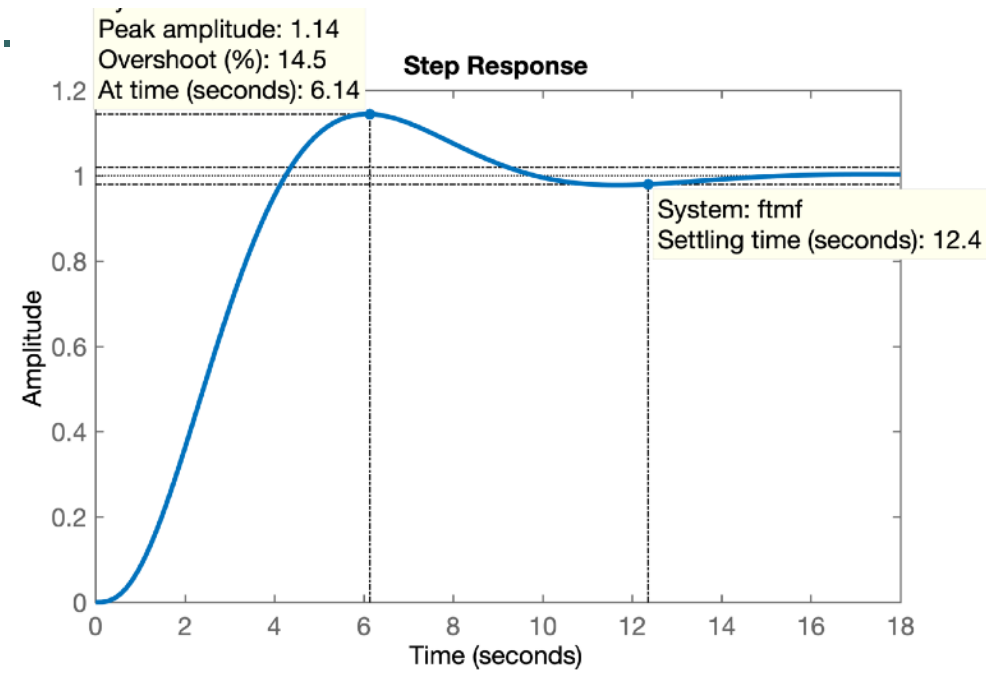
b) Sistemas Marginalmente Estáveis: suas funções de transferência de laço fechado exibem pólos sobre o eixo imaginário do plano-*s*.

c) Sistemas Instáveis: as funções de transferência de laço fechado possuem ao menos um de seus pólos no semiplano da direita do plano-*s*.

Exemplo4:
Seja o seguinte sistema:



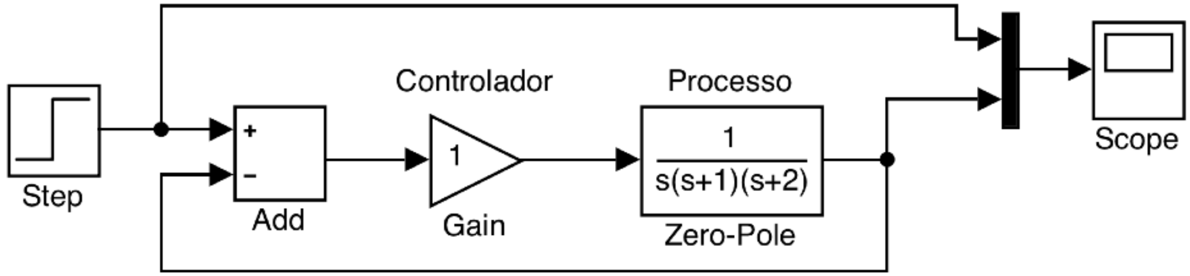

```
>> G=tf(1,poly([0 -1 -2]));
>> zpk(G)
        1
  -------------
  s (s+2) (s+1)
Continuous-time zero/pole/gain model.
>> K=1;
>> ftmf=feedback(K*G,1)
             1
  ---------------------
  s^3 + 3 s^2 + 2 s + 1
>> roots([1 3 2 1])
  -2.3247 + 0.0000i
  -0.3376 + 0.5623i
  -0.3376 - 0.5623i
>> zpk(ftmf)
                   1
  ----------------------------------
  (s+2.325) (s^2 + 0.6753s + 0.4302)
>> pole(ftmf)
  -2.3247 + 0.0000i
  -0.3376 + 0.5623i
  -0.3376 - 0.5623i
>> figure; step(ftmf)
>>
```



Função para plotar resposta ao degrau

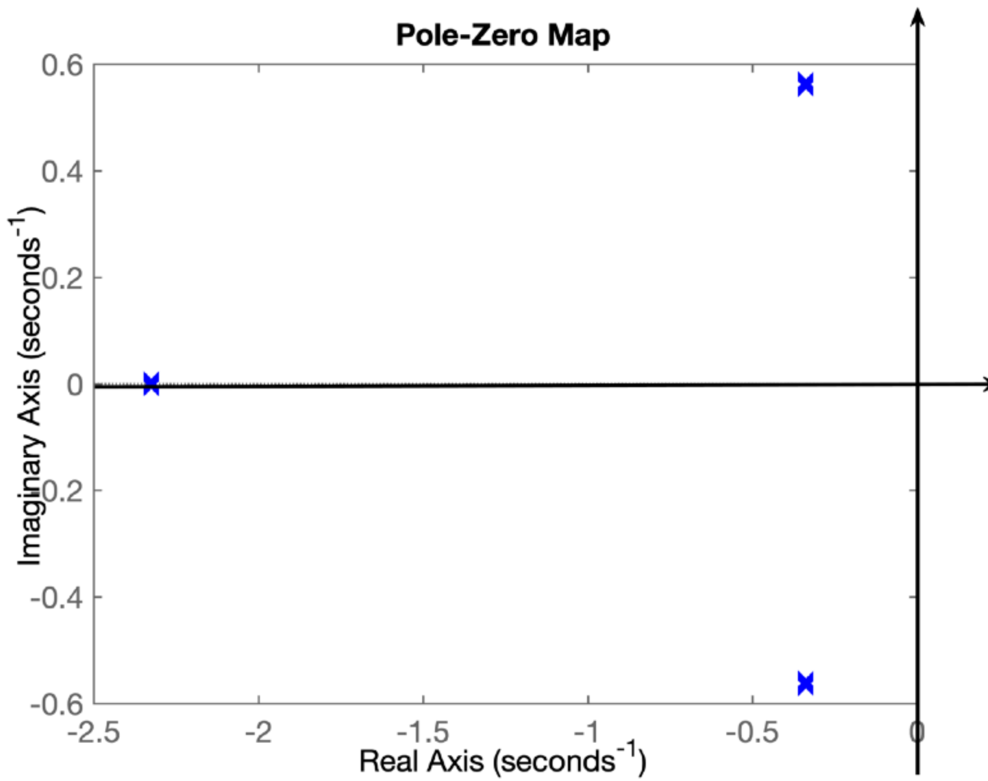
Exemplo4:

Seja o seguinte sistema:



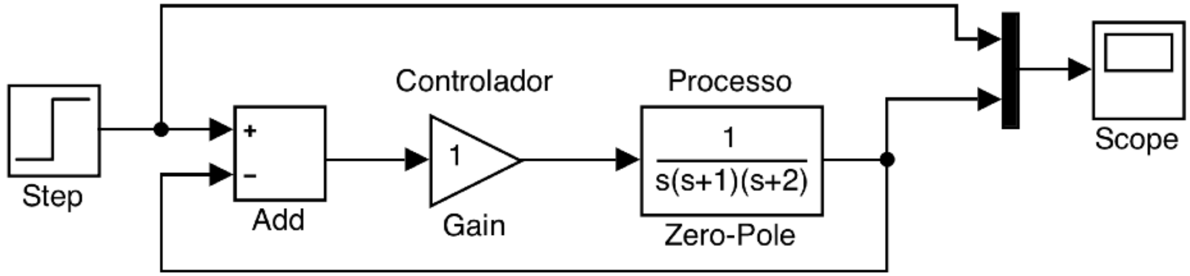

```
>> G=tf(1,poly([0 -1 -2]));
>> zpk(G)
         1
  -------------
  s (s+2) (s+1)
Continuous-time zero/pole/gain model.
>> K=1;
>> ftmf=feedback(K*G,1)
              1
  ---------------------
  s^3 + 3 s^2 + 2 s + 1
>> roots([1 3 2 1])
  -2.3247 + 0.0000i
  -0.3376 + 0.5623i
  -0.3376 - 0.5623i
>> figure; pzmap(ftmf)
```

mostra posição das raízes (pólos: x; e zeros: o) no plano-*s*



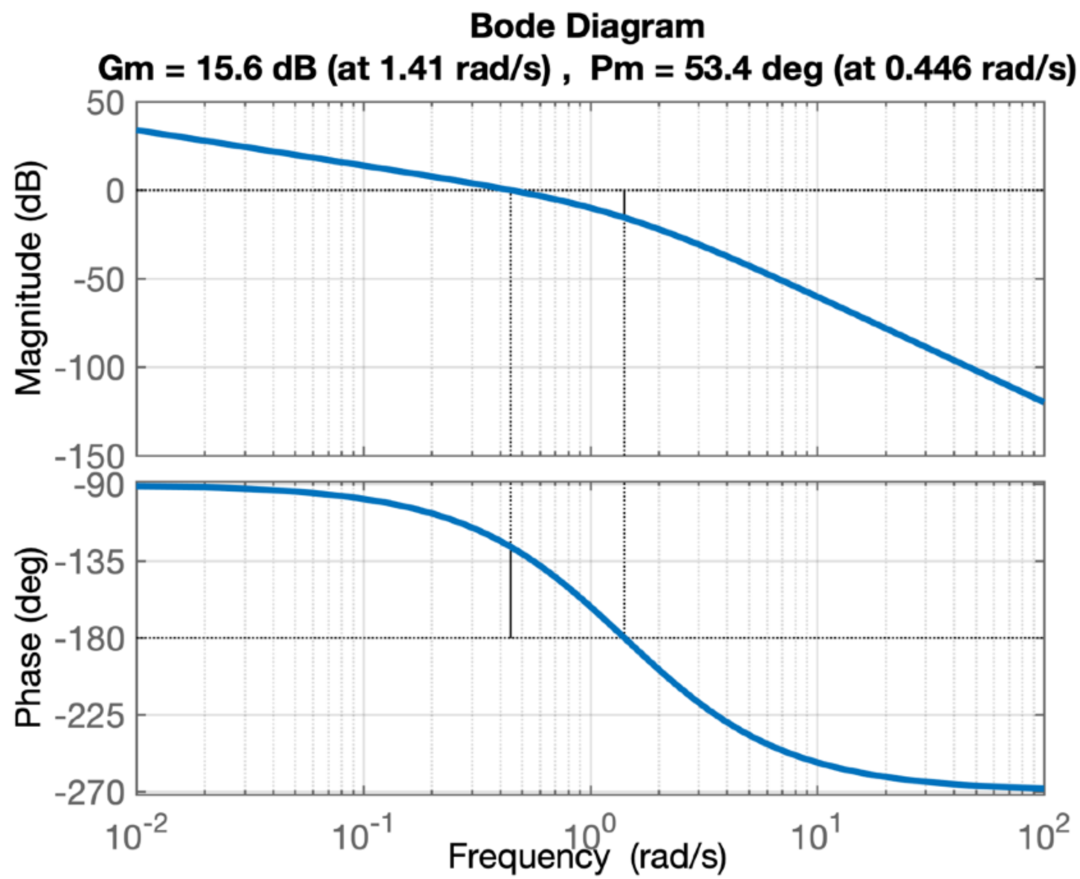
➨ Análise de sistemas em MF usando ferramenta de ligar das raízes (“root-locus”)

Exemplo4:
Seja o seguinte sistema:



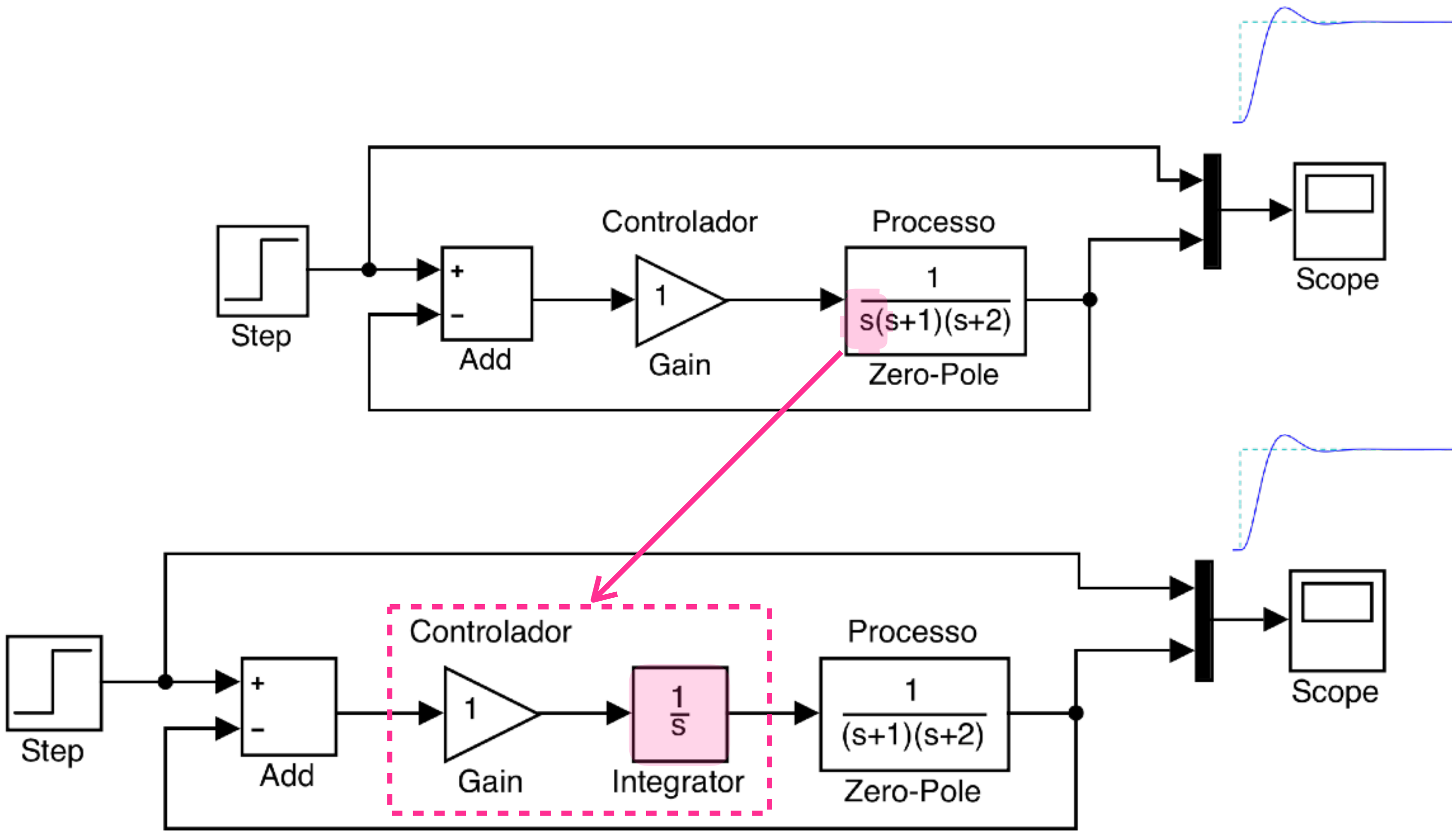
Continuação:

```
>> figure; margin(G)
>> grid
>> [Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(G)
Gm =    6.0000
Pm =   53.4109
Wcg =    1.4142
Wcp =    0.4457
>>
```



Exemplo4:

Repare:



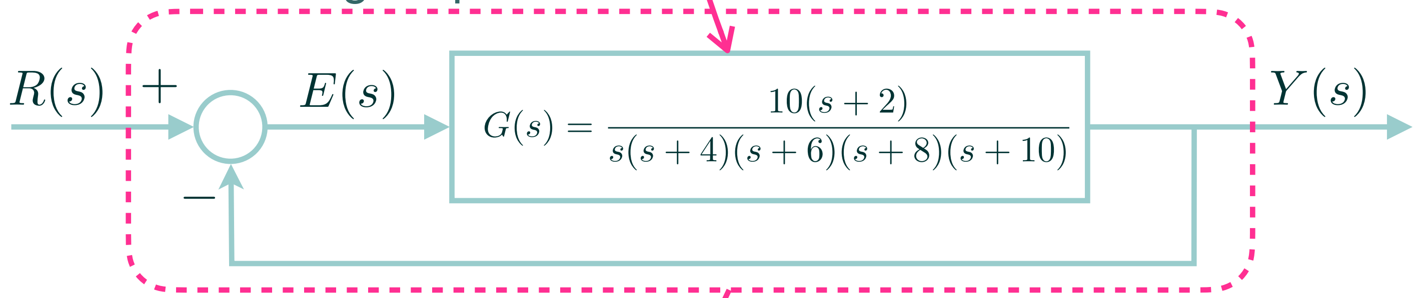
A questão que ainda fica:

- O processo 1/[(s+1)(s+2)], é estável sozinho ?
- A malha fechada é estável para que valores de ganho ?

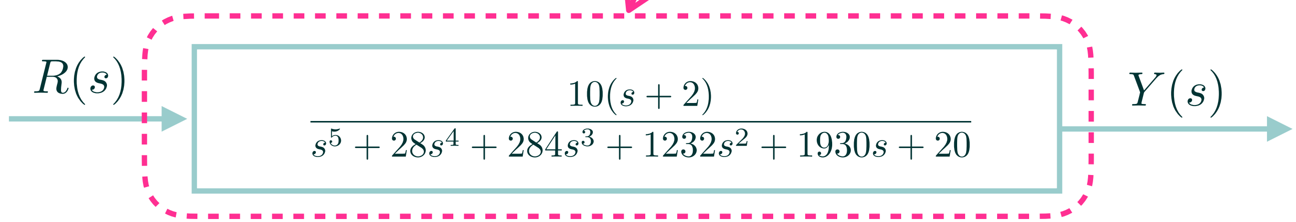
Problemas

FTMA(s)

Feche as malhas (com ganho unitário) e determine o local dos pólos em MF e resposta à entrada degrau para os sistemas listados abaixo:



FTMF(s)

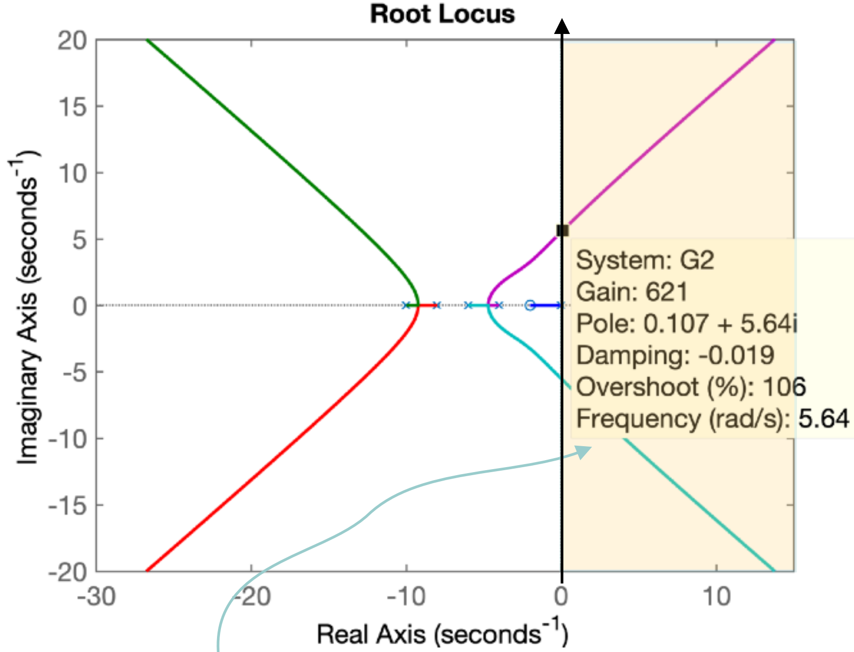


Questões:

- O processo $G(s)$ é estável em MF? Para que faixas de ganho ?

Resolvendo... Curiosidades

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{s(s+4)(s+6)(s+8)(s+10)}$$



Faixas de ganho que levam à instabilidade quando a malha é fechada

```
>> G=tf(10*[1 2],poly([0 -4 -6 -8 -10]));
>> zpk(G)
          10 (s+2)
  --------------------------
  s (s+10) (s+8) (s+6) (s+4)
Continuous-time zero/pole/gain model.
>> K=1;
>> ftmf=feedback(K*G,1)
                   10 s + 20
  ------------------------------------------------
  s^5 + 28 s^4 + 284 s^3 + 1232 s^2 + 1930 s + 20
>> pole(ftmf2)
   -9.7992
   -8.4517
   -5.6186
   -4.1200
   -0.0104
>> zero(ftmf2)
    -2
>>
```

Detalhe: estas são os pólos de MF quando K=1 !

- E para outros valores de ganho (K) ?

Critério de Routh-Hurwitz

- Idéia: extrair informação sobre estabilidade sem a necessidade de descobrir onde estão os pólos de malha-fechada de um sistema.
- Este critério serve para encontrar o número de pólos em cada seção do plano-*s*, mas não seus valores.
- Passos:
  - Escrever a equação característica do sistema:

    $$EC(z) = a_4 s^4 + a_3^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a0 = 0, \qquad a_0 \neq 0$$

  - Verificar condições prévias:

    $$a_i \neq 0 \quad \forall i$$

    $$\text{Signal}(a_1) = \text{Signal}(a_2) = \ldots = \text{Signal}(a_n)$$

  - Gerar uma tabela denominada tabela de Routh;
  - Interpretar a tabela de Routh para descobrir quantos pólos de MF estão localizados no semi-plano esquerdo do plano-*s*, no semi-plano da direita e sobe o eixo *jw*.

Critério de Routh-Hurwitz

- Idéia: extrair informação sobre estabilidade ser
  descobrir onde estão os pólos de malha-fechac
- Este critério serve para encontrar o número de
  plano-*s*, mas não seus valores.
- Passos:

Implica:
não pode haver raiz nula
(pólo de MF em s=0)

Condições prévias!

  - Escrever a equação característica do sistema:

$$EC(z) = a_4 s^4 + a_3^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a0 = 0, \qquad a_0 \neq 0$$

  - Verificar condições prévias:

$$a_i \neq 0 \quad \forall i$$ ← não pode haver termos nulos; e todos devem estar presentes

$$\text{Signal}(a_1) = \text{Signal}(a_2) = \ldots = \text{Signal}(a_n)$$ ← todos: mesmo sinal!

  - Gerar uma tabela denominada tabela de Routh;
  - Interpretar a tabela de Routh para descobrir quantos pólos de MF estão localizados no semi-plano esquerdo do plano-*s*, no semi-plano da direita e sobe o eixo *jw*.

Significa que:

1. Se algum dos coeficientes for zero ou negativo na presença de pelo menos um coeficiente positivo, então existirá uma ou várias raízes imaginárias ou que tenham partes reais positivas. Assim, nesse caso, o sistema não será estável. Se estivermos interessados somente na estabilidade absoluta, não haverá necessidade de continuar o procedimento. Observe que todos os coeficientes devem ser positivos.
Esta é uma condição necessária.

- Passos:
  - Escrever a equação característica do sistema:

$$C(z) = a_4 s^4 + a_3^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a0 = 0, \qquad a_0 \neq 0$$

  - Verificar condições prévias:

$$a_i \neq 0 \quad \forall i$$

$$\text{Signal}(a_1) = \text{Signal}(a_2) = \ldots = \text{Signal}(a_n)$$

  - Gerar uma tabela denominada tabela de Routh;
  - Interpretar a tabela de Routh para descobrir quantos pólos de MF estão localizados no semi-plano esquerdo do plano-*s*, no semi-plano da direita e sobe o eixo *jw*.

Observe que todos os coeficientes devem ser positivos. Esta é uma condição necessária, como podemos ver no argumento a seguir: um polinômio em s tendo coeficientes reais sempre poderá ser fatorado em fatores lineares e quadráticos, como $(s + a)$ e $(s^2 + bs + c)$, onde a, b e c são reais. Os fatores lineares resultam em raízes reais e os fatores quadráticos, em raízes complexas conjugadas do polinômio. O fator $(s^2 + bs + c)$ resulta em raízes com partes reais negativas somente se b e c forem ambos positivos. Para que todas as raízes tenham partes reais negativas, as constantes a, b, c etc., em todos os fatores, devem ser positivas. O produto de qualquer número de fatores lineares e quadráticos que contenha somente coeficientes positivos resulta sempre em um polinômio com coeficientes positivos.

É importante notar que a condição de que todos os coeficientes sejam positivos não é suficiente para assegurar estabilidade. É condição necessária, mas não suficiente para a estabilidade, é que os coeficientes da EC(s) estejam todos presentes e que todos tenham sinais positivos. (Se todos os a forem negativos, estes podem ser feitos positivos, multiplicando ambos os lados da equação por − 1.)

- Escrever a equação característica do sistema:

$$EC(z) = a_4 s^4 + a_3^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a0 = 0, \qquad a_0 \neq 0$$

- Verificar condições prévias:

$$a_i \neq 0 \quad \forall i$$

$$\text{Signal}(a_1) = \text{Signal}(a_2) = \ldots = \text{Signal}(a_n)$$

- Gerar uma tabela denominada tabela de Routh;
- Interpretar a tabela de Routh para descobrir quantos pólos de MF estão localizados no semi-plano esquerdo do plano-*s*, no semi-plano da direita e sobe o eixo *jw*.

Gerando a tabela de Routh

- Comece rotulando as linhas com as potências decrescentes de *s*, da maior potência em s da função transferência de **malha-fechada** até alcançar s^0,
- Em seguida, comece com o coeficiente da maior potência em s do denominador da função ("eq. característica") e preencha a lista verticalmente usando apenas as 2 primeiras linhas, e avance na direção horizontal até preencher as 2 primeiras linhas da tabela com todos os coeficientes da função até alcançar s^0.
- Exemplo:

Atenção: *FTMF(s)*

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{N(s)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}} \longrightarrow Y(s)$$

$$EC(z) = a_4 s^4 + a_3^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a0 = 0, \qquad a_0 \neq 0$$

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2			
s^1			
s^0			

Gerando a tabela de Routh (2)

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{N(s)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}} \longrightarrow Y(s)$$

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	b_1	b_2	
s^1	c_1		
s^0	d_1		

$$b_1 = \frac{-[a_4 \times a_1 - a_3 \times a_2]}{a_3}$$

$$b_1 = \frac{a_3 a_2 - a_4 a_1}{a_3}$$

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$b_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3}$	$b_2 = \dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3}$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$c_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$d_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1}$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

Método criado em 1905

Gerando a tabela de Routh (2)

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{N(s)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}} \longrightarrow Y(s)$$

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	b_1	b_2	
s^1	c_1		
s^0	d_1		

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$b_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3}$	$b_2 = \dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3}$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$c_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$

$$b_1 = \frac{-[a_4 \times a_1 - a_3 \times a \ldots}{a_3}$$

$$b_1 = \frac{a_3 a_2 - a_4 a_1}{a_3}$$

Observe que, ao desenvolver essa matriz, uma linha inteira pode ser dividida ou multiplicada por um número positivo, de modo a simplificar os cálculos numéricos subsequentes, sem alterar a conclusão sobre a estabilidade.

Método criado em 1905

Interpretando a tabela de Routh

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{N(s)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}} \longrightarrow Y(s)$$

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	b_1	[illegible]	
s^1	c_1		
s^0	d_1		

O critério de estabilidade de Routh afirma que o número de raízes da EC(s) com partes reais positivas é igual ao número de mudanças no sinal dos coeficientes da primeira coluna da matriz.

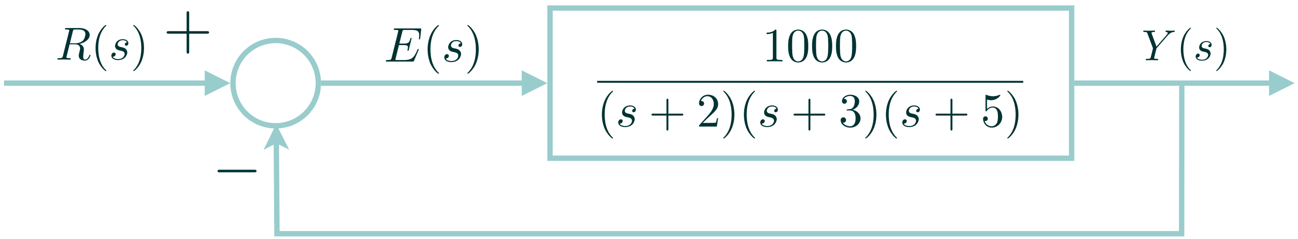
Deve-se notar que os valores exatos dos termos na primeira coluna não precisam ser conhecidos; do contrário, apenas os sinais são necessários.

A condição necessária e suficiente para que todas as raízes da EC(s) se situem no semiplano esquerdo do plano s é que todos os coeficientes da EC(s) sejam positivos e que todos os elementos da primeira coluna da matriz tenham sinais positivos.

Método criado em 1905

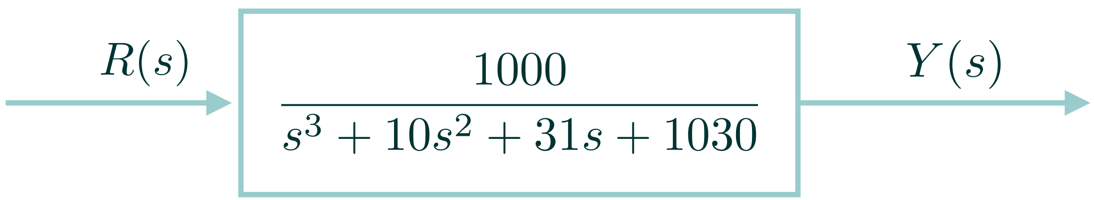
Exemplo de uso de R-H

Seja o sistema: analise sua estabilidade…



Solução:

1) Fechando a malha, obtemos:



$$FTMF(s) = \frac{FTMA(s)}{1+FTMA(s)}$$

$$EC(z) = 1 + FTMA(z) = 0$$

$$EC(z) = 1 + \frac{1000}{(s+2)(s+3)(s+5)}$$

$$EC(z) = 1 + \frac{1000}{(s^2+5s+6)(s+5)}$$

$$EC(z) = 1 + \frac{1000}{s^3+10s^2+31s+30}$$

$$EC(z) = s^3 + 10s^2 + 31s + 30 + 1000$$

$$EC(z) = s^3 + 10s^2 + 31s + 1030$$

Continuação:

1) Fechando a malha, obtemos:

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1000}{s^3 + 10s^2 + 31s + 1030}} \longrightarrow Y(s)$$

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$b_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3}$	$b_2 = \dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3}$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$c_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$d_1 = \dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1}$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 31 & \\ s^2 & \cancel{10}\ 1 & \cancel{1030}\ 103 & (\div 10) \\ \hline s^1 & b_1 & 0 & \\ s^0 & c_1 & & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{-[1 \times 103 - 1 \times 31]}{1} = -72$$

$$c_1 = \frac{-[1 \times 0 - b_1 \times 103]}{b_1}$$

$$c_1 = \frac{-[1 \times 0 - \cancel{(-72)}^1 \times 103]}{\cancel{(-72)}^1} = 103$$

$$\begin{array}{c|c|c} s^3 & 1 & 31 \\ s^2 & 1 & 103 \\ \hline s^1 & -72 & 0 \\ s^0 & 103 & \end{array}$$

2 mudanças de sinal ⇒ 2 pólos no semi-plano direito no plano-*s* (instáveis)

De fato (Matlab):

```
>> roots([1 10 31 1030])
 -13.4136 + 0.0000i
   1.7068 + 8.5950i
   1.7068 - 8.5950i
>>
```

Ex2: Seja a seguinte FTMA, analisar a estabilidade deste sistema no caso de realimentação unitária (ganho unitário)…

$$FTMA(s) = \frac{4s^2 + 28s + 40}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$$

Resposta: sistema estável em MF.

Ex2: Seja a seguinte FTMA, analisar a estabilidade deste sistema no caso de realimentação unitária (ganho unitário)…

$$FTMA(s) = \frac{4s^2+28s+40}{s^3+8s^2+19s+12}$$

Solução:

$$FTMF(s) = \frac{FTMA(s)}{1+FTMA(s)}$$

$$EC(s) = \mathrm{Den}\{FTMF(s)\} = 1 + FTMA(s) = 0$$

$$EC(s) = 1 + \frac{4s^2+28s+40}{s^3+8s^2+19s+12}$$

$$EC(s) = \frac{s^3+8s^2+19s+12+4s^2+28s+40}{s^3+8s^2+19s+12} = 0$$

$$EC(s) = s^3+12s^2+47s+52$$

Arranjo de Routh:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 47 \\ s^2 & 12 & 52 \\ \hline s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & \end{array}$$

$$b_1 = -\frac{[1\times 52 - 12\times 47]}{12} = \frac{-[-512]}{12} = 42,67$$

$$c_1 = -\frac{[12\times 0 - b_1\times 52]}{b_1} = \frac{-[-2.218,67]}{42,67} = 52$$

Análise:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 47 \\ s^2 & 12 & 52 \\ \hline s^1 & 42,67 & 0 \\ s^0 & 52 & \end{array}$$

No de pólos de MF no semi-plano direito (instáveis) = No. de mudança sinais.

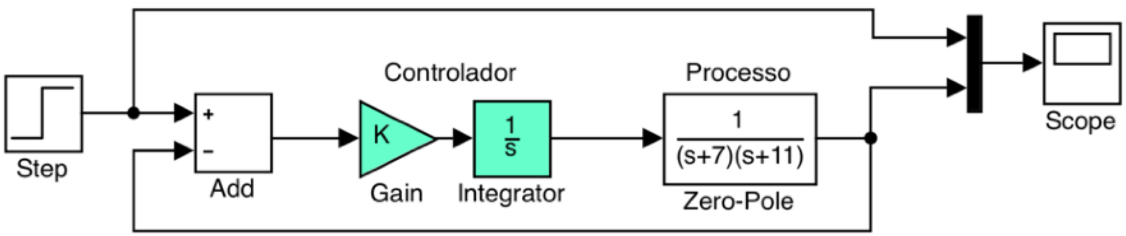
Nenhuma mudança de sinal => não existem pólos com parte real positiva (ou não existem pólos instáveis)

Obs.: de fato, os pólos de MF ficam em:

```
>> ec=[1 12 47 52];
>> roots(ec)
  -5.0832 + 1.5874i
  -5.0832 - 1.5874i
  -1.8337 + 0.0000i
>>
```

Aplicação de RH:
Determinar faixas de ganho…

Exemplo: Determine a(s) faixa(s) de ganho K que ainda deixa sistema em MF estável:



Solução:
Neste caso: $G(s) = \dfrac{1}{(s+7)(s+11)}$

$$FTMA(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{1}{(s+7)(s+11)}$$

$$FTMF(s) = \frac{FTMA(s)}{1+FTMA(s)}$$

$$EC(s) = 1 + FTMA(s)$$

$$EC(s) = 1 + \frac{K}{s(s+7)(s+11)}$$

$$EC(s) = \frac{s^3+18s^2+77s+K}{s^3+18s^2+77s} = 0$$

$$EC(s) = s^3+18s^2+77s+K = 0$$

Arranjo de RH:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 77 \\ s^2 & 18 & K \\ \hline s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{-[K - 18 \times 77]}{18}$$

$$b_1 = \frac{1386 - K}{18}$$

$$c_1 = \frac{-\left[18 \times 0 - \cancel{\left(\frac{1386-K}{18}\right)} \times K\right]}{\cancel{\left(\frac{1386-K}{18}\right)}}$$

$$c_1 = K$$

Para 1ª-coluna ser positiva:
(não ocorrer mudança de sinal)

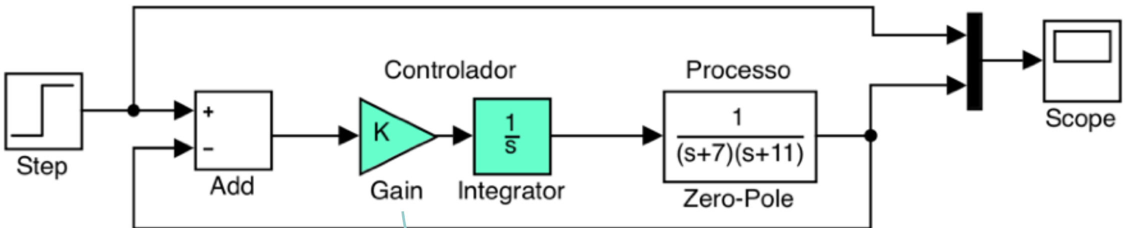
$$K > 0$$

$$K < 1386$$

testando…

Aplicação de RH: Determinar faixas de ganho…

Exemplo: Determine a(s) faixa(s) de ganho K que ainda deixa sistema em MF estável:



Solução: $0 < K < 1386$

De fato, se K = 1386, teremos:

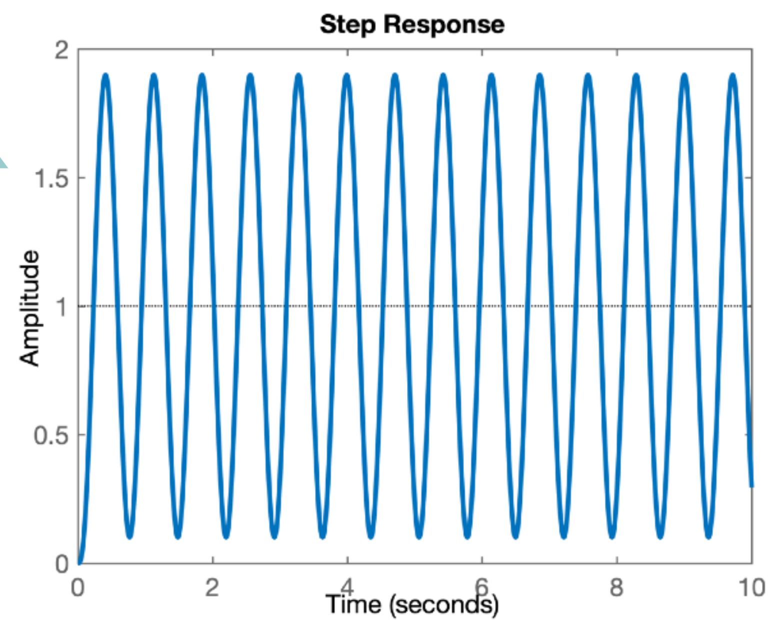
$$FTMA(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{1}{(s+7)(s+11)}$$

$$FTMA(s) = \frac{1386}{s^3 + 18s^2 + 77s}$$

$$FTMF(s) = \frac{FTMA(s)}{1 + FTMA(s)}$$

$$FTMF(s) = \frac{1386}{s^3 + 18s^2 + 77s + 1386}$$

$K = 1386$



de fato:
```
>> roots([1 18 77 1386])
  -18.0000 + 0.0000i
   -0.0000 + 8.7750i
   -0.0000 - 8.7750i
>>
```

Problema:
Para um sistema com realimentação unitária e com a seguinte FTMA(s), determine a faixa de ganho que garante estabilidade em MF.

$$FTMA(s) = \frac{K(s+20)}{s(s+2)(s+3)}$$

Resposta: $0 < K < 2$.