TEORIA DE ERROS (OU DA PRECISÃO)

Prof. Fernando Passold
Curso de Eng. Elétrica
Universidade de Passo Fundo
Março/2019

CONTEÚDO PREVISTO

- Objetivos
- Erro de Estado estacionário
- Fontes de Erros
- Erros em função de $R(s)$
- Erros em função de $FTMA(s)$
- Entradas (sinais de referência) típicos
- Relação de $e(\infty)$ com $R(s)$ e $FTMA(s)$
- Tabela resumo

OBJETIVOS

- Como determinar o erro de regime permanente num sistema com realimentação unitária?
- Como especificar o erro de regime permanente de um sistema?

ESPECIFICAÇÕES TÍPICAS NUM SISTEMA DE CONTROLE

- Características desejáveis num sistema de controle ou "especificações", incluem:
  - Desempenho em regime permanente (precisão, erro);
  - Desempenho em regime transitório (formas de onda);
  - Robustez (degradação do sistema frente à mudanças no sistema)

ESPECIFICAÇÕES TÍPICAS NUM SISTEMA DE CONTROLE

- Características desejáveis num sistema de controle ou “especificações”, incluem:
    - Desempenho em regime permanente (precisão, erro);
    - Desempenho em regime transitório (formas de onda);
    - Robustez (degradação do sistema frente à mudanças no sistema)

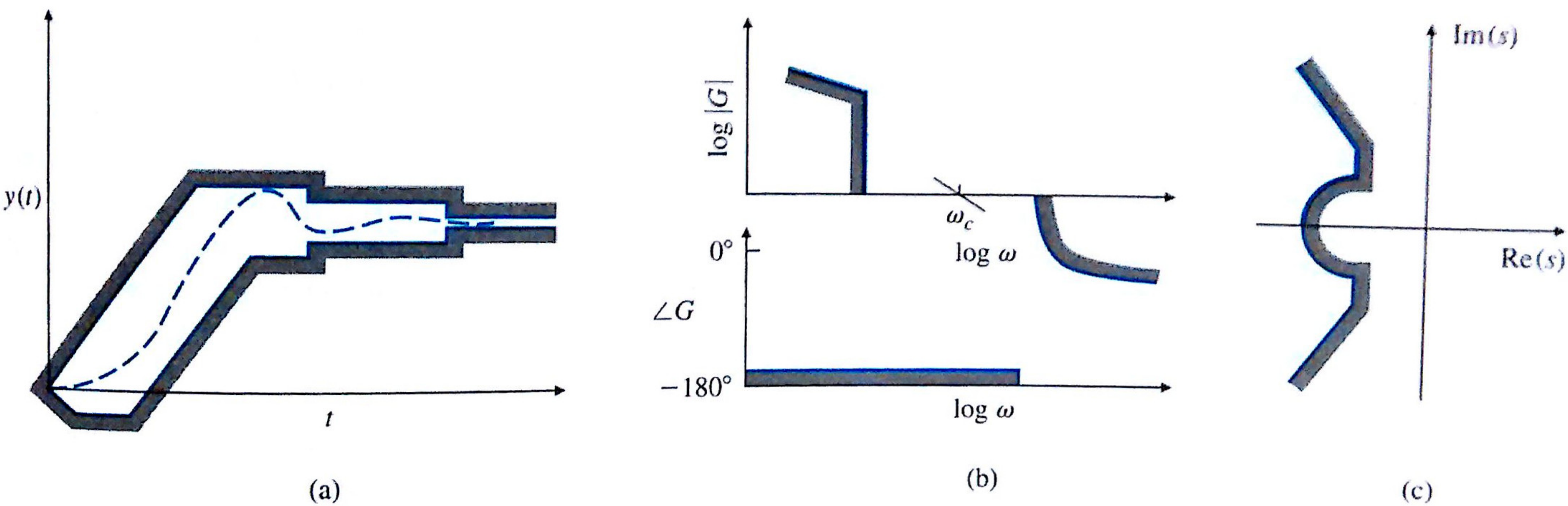
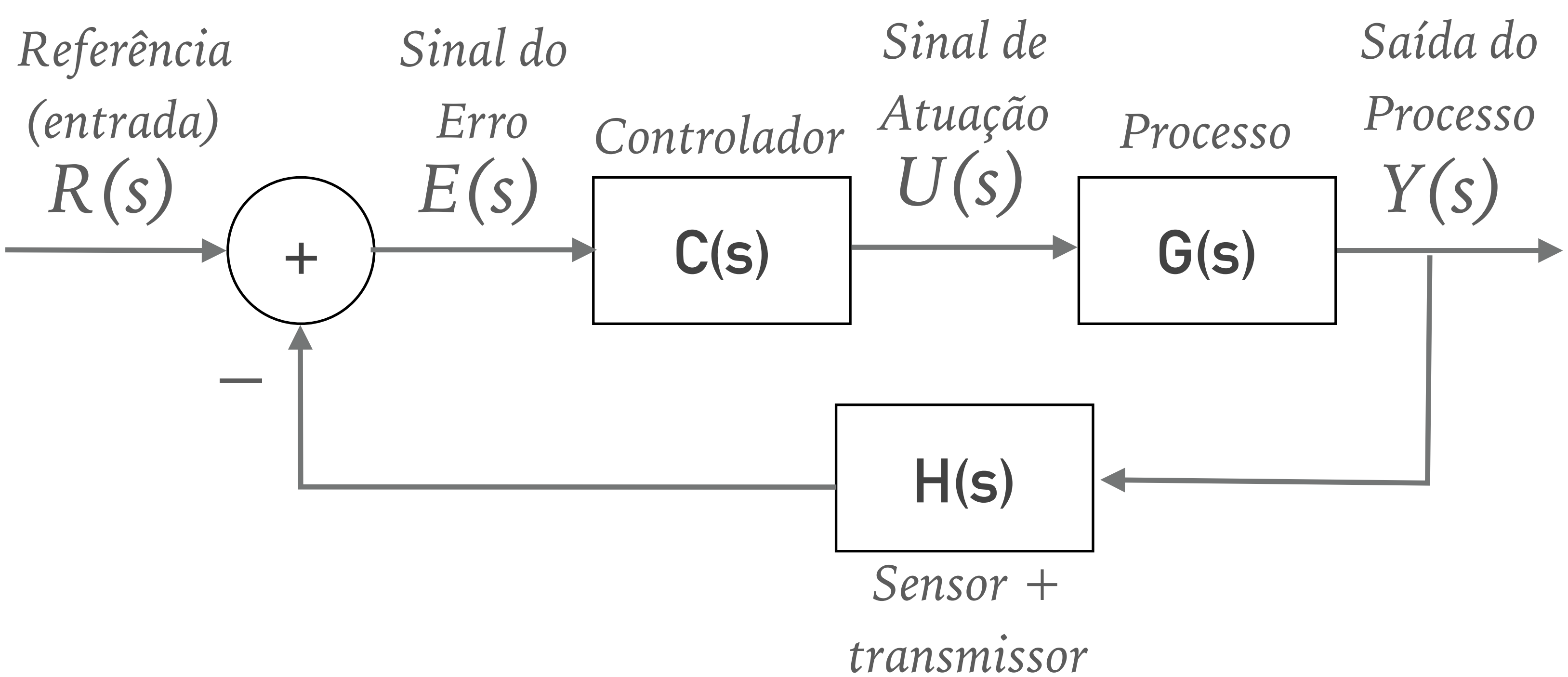


Fig.: Exemplos de especificações de controle quanto à: (a) resposta temporal, (b) resposta em frequência e (c) especificações de pólos-zeros. [Franklin et al. (1994)]

REALIMENTAÇÕES

- Típica Malha fechada sistema SISO:

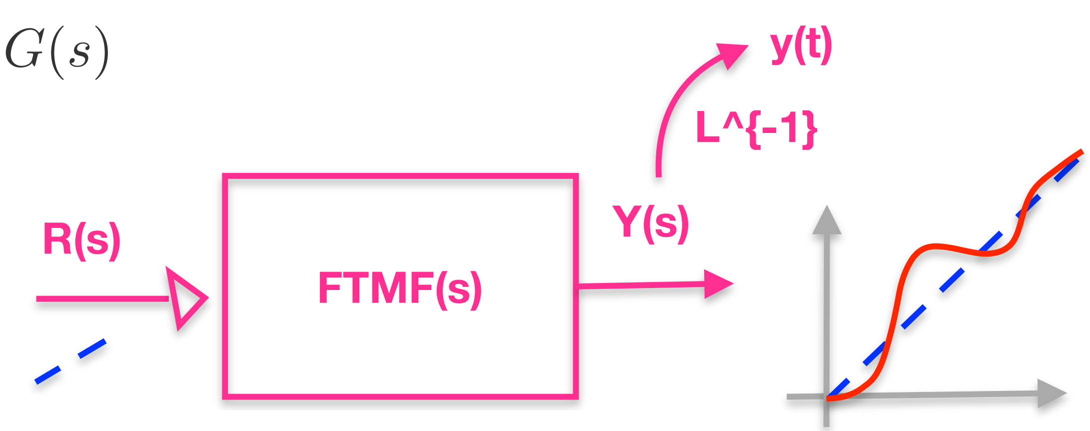


$$Y(s)=E(s)C(s)G(s)$$

$$E(s)=R(s)\text{-}H(s)Y(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{C(s)G(s)}{1+H(s)C(s)G(s)}$$

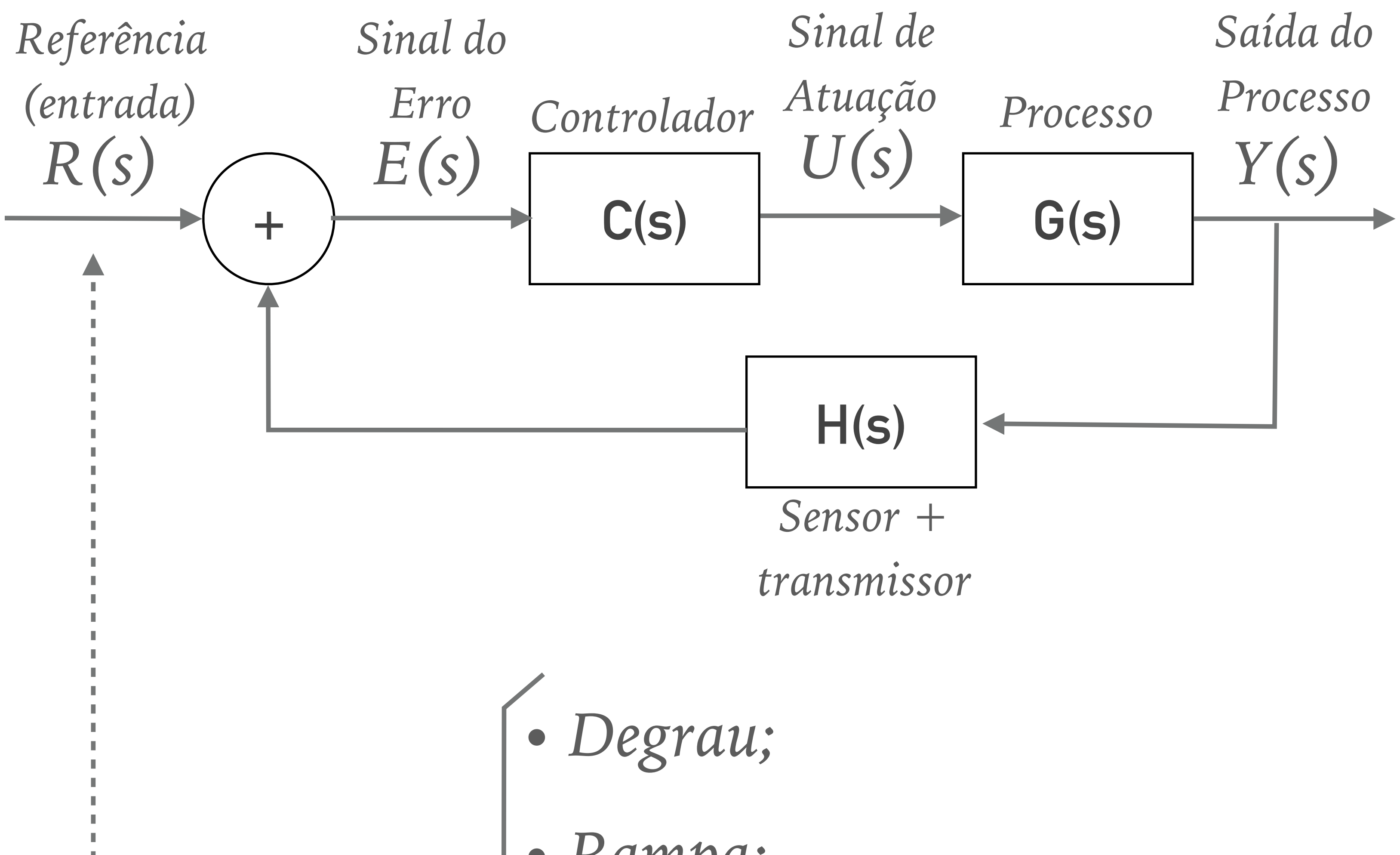
$$\begin{aligned}
Y(s) &= [R(s)-Y(s)H(s)]\,C(s)G(s)\\
&= R(s)C(s)G(s)-Y(s)H(s)C(s)G(s)\\
Y(s)+Y(s)H(s)C(s)G(s) &= R(s)C(s)G(s)\\
Y(s)\,[1+H(s)C(s)G(s)] &= R(s)C(s)G(s)\\
Y(s) &= R(s)\cdot\frac{C(s)G(s)}{1+H(s)C(s)H(s)}
\end{aligned}$$



Obs.: No caso de realimentação unitária, $H(s)=1$.

REALIMENTAÇÕES

➤ Típica Malha fechada sistema SISO:



$Y(s) = E(s)C(s)G(s)$

$E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)}$$

Obs.: No caso de realimentações unitárias, $H(s) = 1$.

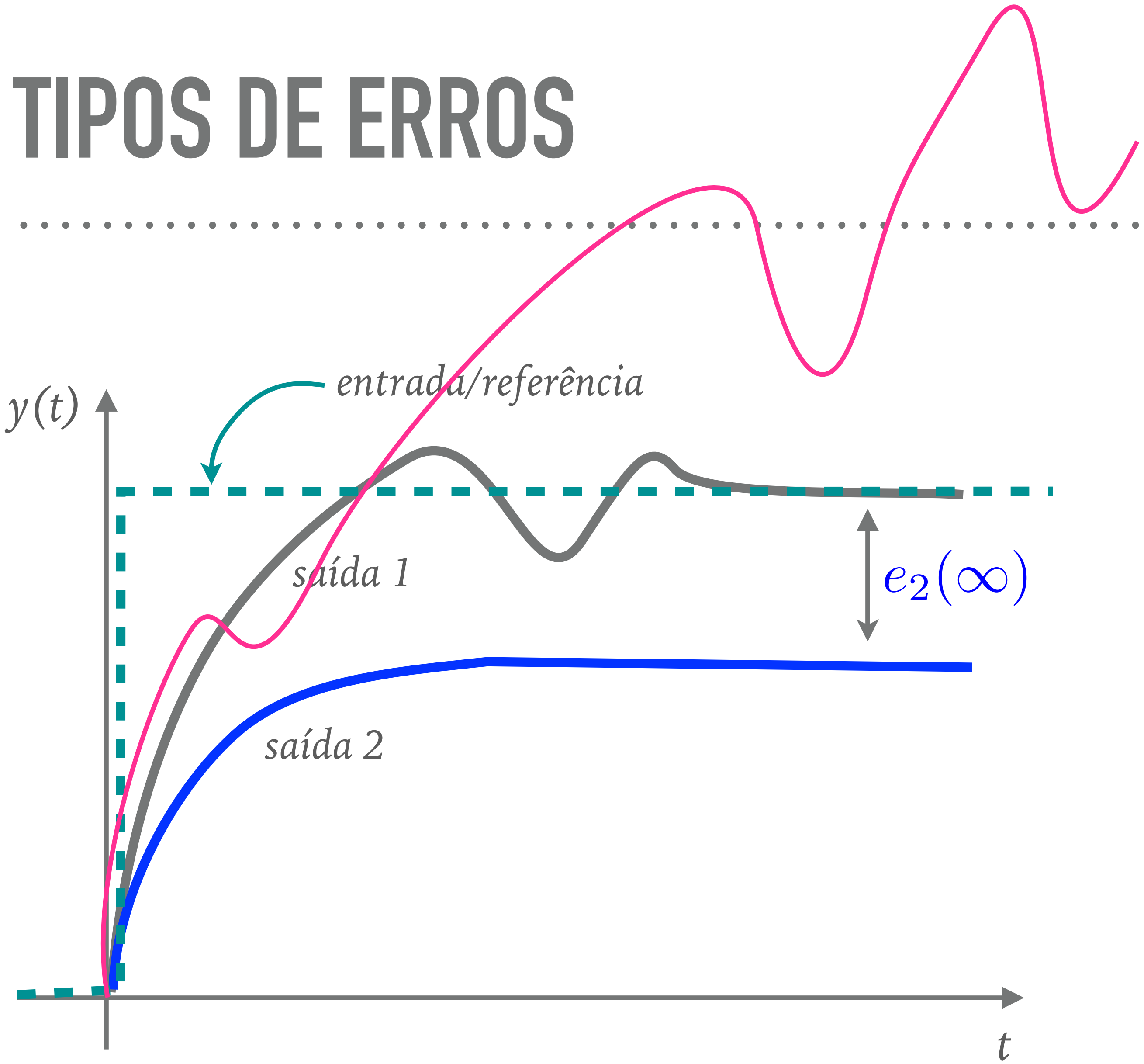
Entradas típicas:

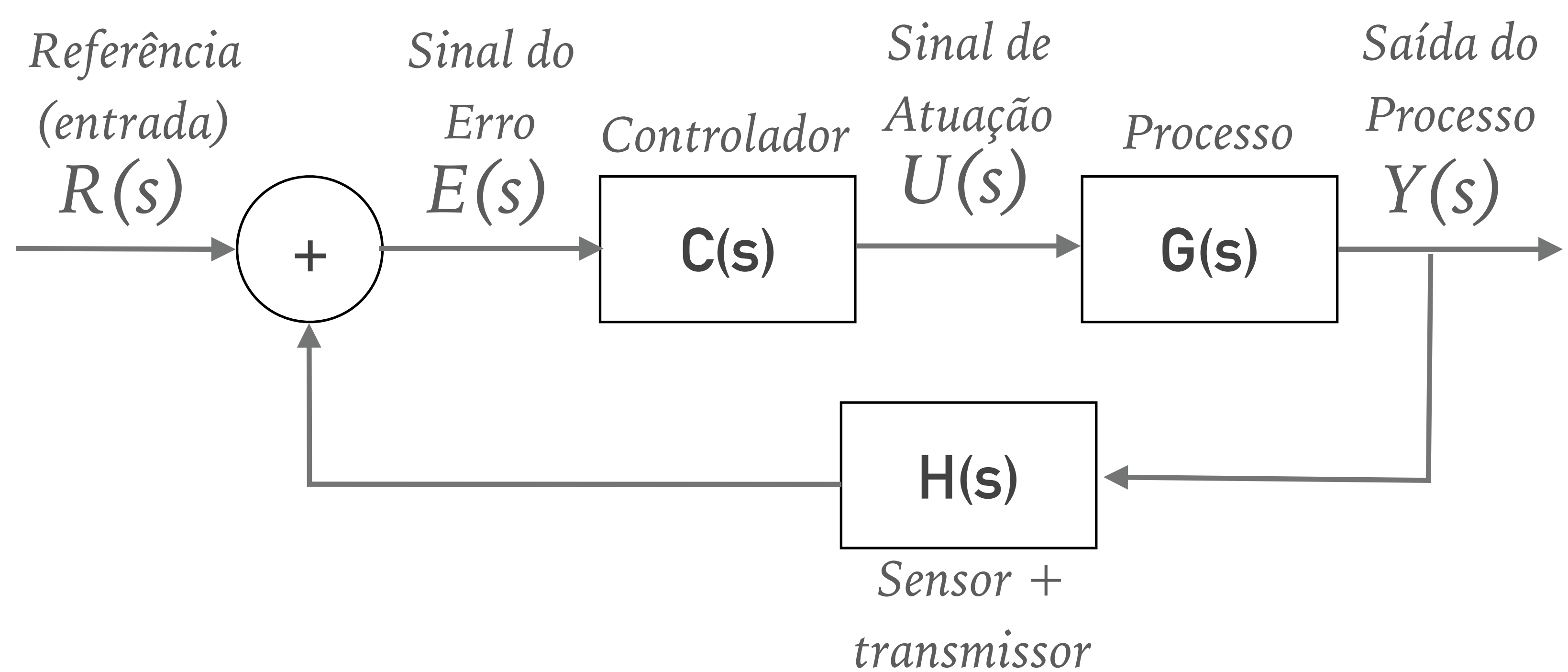
- *Degrau;*
- *Rampa;*
- *Parábola (polinômio de 2ª-ordem)*
- *(Senóide).*

TIPOS DE ERROS

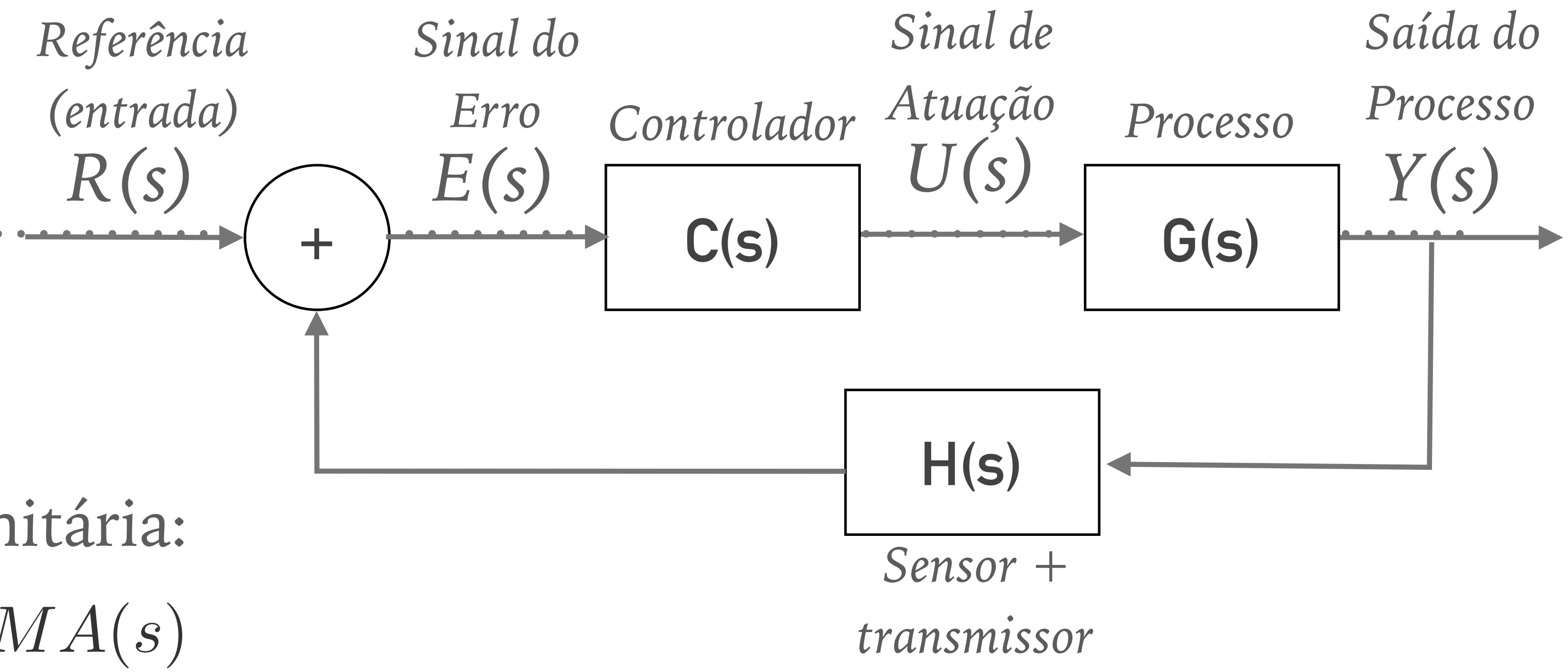
$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$e(\infty) = \begin{cases} 0, & \text{(nulo)} \\ cte, & \text{(constante)} \\ \infty, & \text{(divergente)} \end{cases}$$





ISOLANDO O ERRO



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)}$$

➤ No caso de realimentação unitária:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{FTMA(s)}{1 + FTMA(s)}$$

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) \cdot \left[1 - \frac{FTMA(s)}{1 + FTMA(s)}\right] = R(s) \cdot \left[\frac{1 + FTMA(s) - FTMA(s)}{1 + FTMA(s)}\right]$$

$$E(s) = \left[\frac{1}{1 + FTMA(s)}\right] \cdot R(s)$$

➤ Ou seja, nota-se que o erro depende de R(s) e da FTMA(s) ➙ *Erro = f (R, FTMA)*

➤ Lembrando do Teorema do Valor Final (transformada de Laplace):

Se $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe, então $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$

➤ O erro em regime permanente é dado então por:

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s\,R(s)}{1 + FTMA(s)}$$

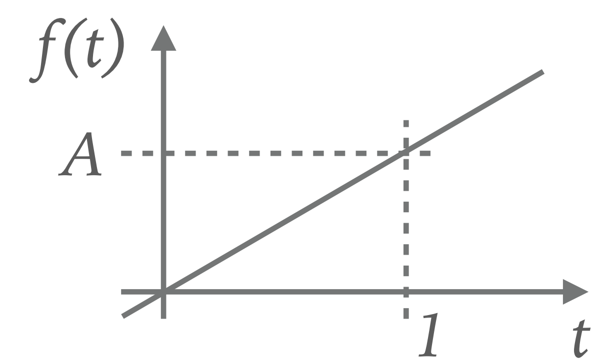
➤ Próximo passo: hipóteses em relação à $R(s)$ e tipo da função $FTMA(s)$…

ENTRADAS (REFERÊNCIAS) TÍPICAS:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

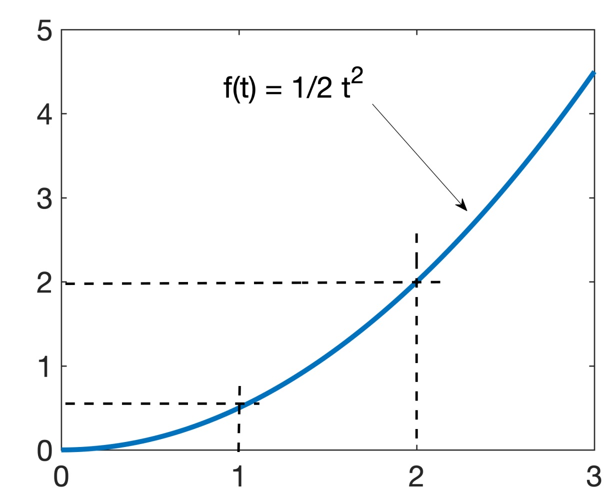
- Entrada Degrau $\quad \mathcal{L}\{A \cdot u(t)\} = \dfrac{A}{s}$

- Entrada Rampa $\quad f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A \cdot t, & t \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \dfrac{A}{s^2}$



- Entrada Parabólica

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & t \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s^3}$$



- Senóide !?

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A \cdot \sin(\omega t), & t \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

CASO 1) ENTRADA DEGRAU

- No caso da entrada degrau: $R(s) = U(s) = \dfrac{1}{s}$
- Neste caso: $e(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} e(t) = \lim\limits_{s\to 0} s\,E(s) = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{s\,R(s)}{1 + FTMA(s)}$

$$e_{\lrcorner\ulcorner}(\infty) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{1}{\cancel{s}}\left[\frac{1}{1+FTMA(s)}\right]$$

$$e_{\lrcorner\ulcorner}(\infty) = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} FTMA(s)} = \frac{1}{1+K_p}$$

onde: $K_p = \lim\limits_{s\to 0} FTMA(s)$

Kp = Constante (de erro) de posição.

- *Próximo passo: supor sistemas de diferentes tipos…*

TIPOS DE PROCESSOS

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t$$

- Representação genérica:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_s\ (s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s^n\ (s+p_1)(s+p_2)\cdots}$$

- Tipo 0:

$$n = 0,\ \text{(Sistema sem integrador)}$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_s\ (s+z_1)(s+z_2)\cdots}{1\ (s+p_1)(s+p_2)\cdots}$$

- Tipo 1:

$$n = 1,\ \text{(Sistema com 1 integrador)}$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_s\ (s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s\ (s+p_1)(s+p_2)\cdots}$$

- Tipo 2:

$$n = 2,\ \text{(Sistema com 2 integradores)}$$

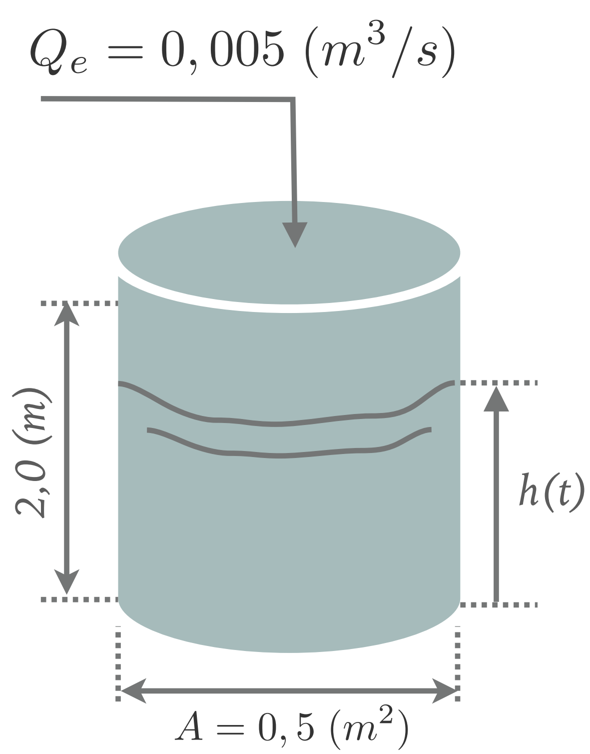
$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_s\ (s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s^2\ (s+p_1)(s+p_2)\cdots}$$

Lembrando da transformada de Laplace de uma integração no tempo:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)\mathrm{d}t = (u * f)(t)\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

PROCESSO COM INTEGRADOR

- Exemplo de sistema com integrador…
- Ex.: Controle de nível de líquido num tanque.
  Seja um tanque fechado, com vazão apenas de entrada (ver figura); no mesmo entra água à pressão e vazão constante e à temperatura ambiente. Determinar o nível do líquido passado certo intervalo de tempo. Suponha que o tanque inicia vazio, que a partir do tempo t=10 segundos, o tanque começa à ser preenchido à 0,005 m³/s. Esta vazão se mantêm constante pelos próximos 1,5 minutos. Determine o nível do líquido atingido dentro do tanque passados 2,0 minutos no total… Gere um gráfico!
  Dados: A = área da base do tanque = 0,5 m²; Qe=Vazão de entrada = 0,005 m³/s; h = altura do tanque (que varia de 0 à 2,0 metros).



$$h(t) = \underbrace{h_0}_{\text{altura inicial}} + \frac{Q_e\ (m^{\cancel{3}\,1})}{A\ (m^{\cancel{2}})\ (\cancel{s})} \cdot \Delta t\ (\cancel{s})$$

$Q_e(t) = \text{cte}$

$$h(t) = h(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \frac{Q_e(t)}{A}\, dt$$

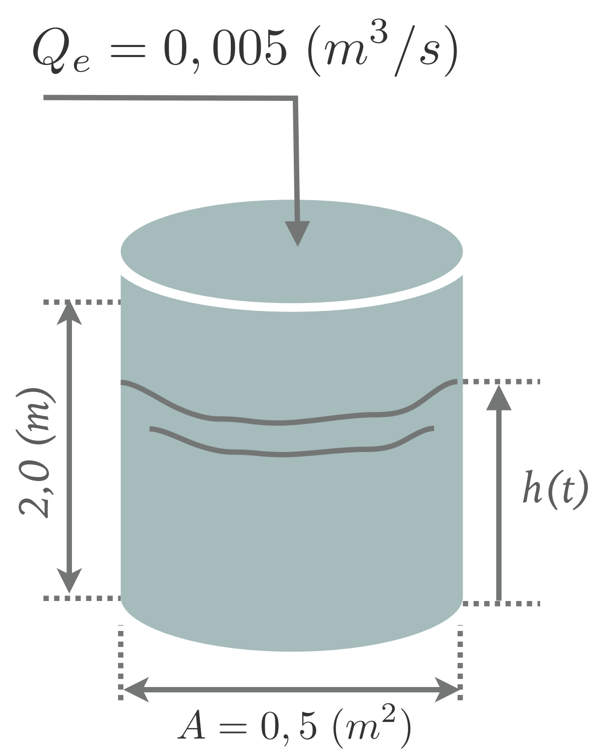
$$h(t) = h(t_i) + \underbrace{\frac{Q_e}{A}}_{\alpha} \cdot \Big[1\Big]_{t_i}^{t_f}$$

$$h(t) = h(t_i) + \alpha \cdot (t_f - t_i)$$

$$\begin{aligned} h_{final} &= 0 + \frac{0,005}{0,5} \cdot (1,5 * 60 - 10) \\ &= 0,01 \cdot (90 - 10) \\ &= 0,01 \cdot 80 \\ &= 0,8\ (m) \end{aligned}$$

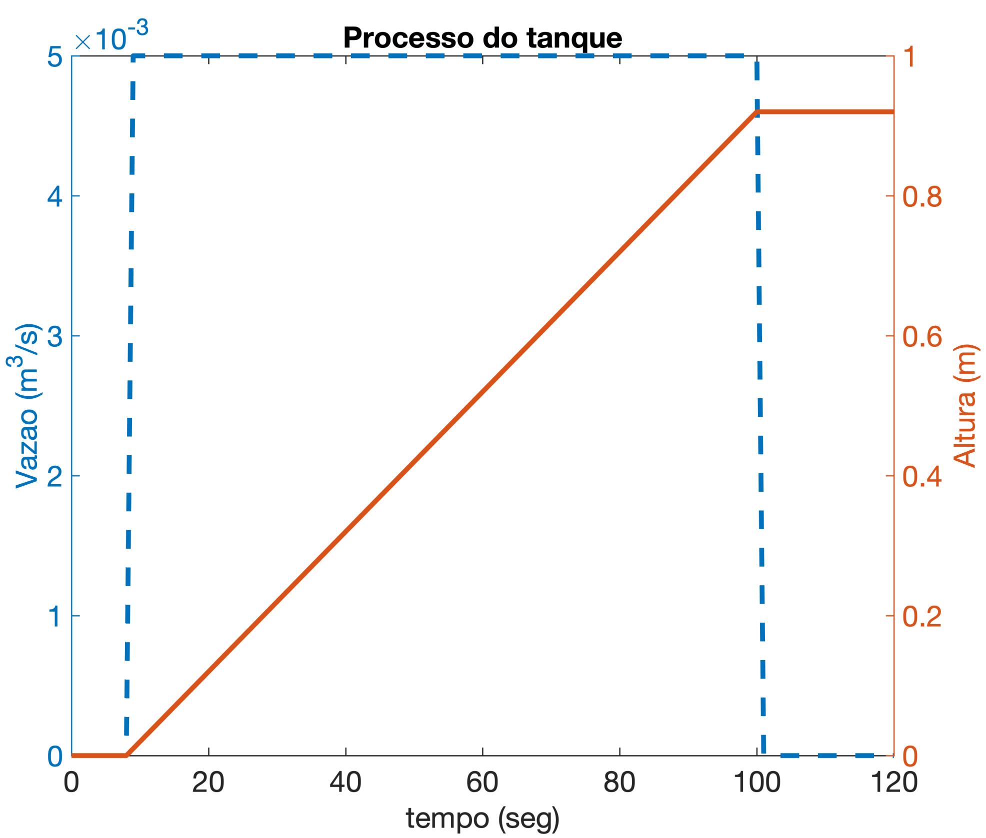
note que o “sinal" $Q_e(t)$ se comporta como um degrau de amplitude = 0,005 (m³/s).

SIMULANDO PROCESSO DO TANQUE



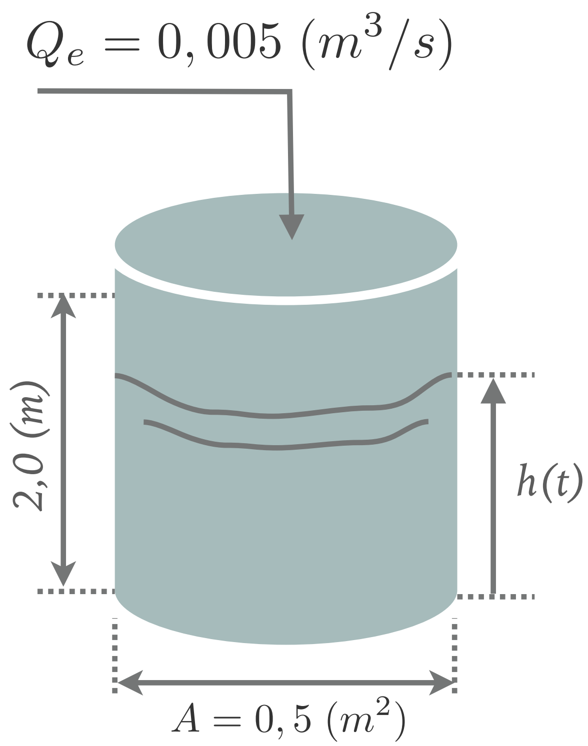
$$h(t) = h(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \frac{Q_e(t)}{A}\, dt$$

- *note que o "sinal" $Q_e(t)$ se comporta como um degrau de amplitude = 0,005 (m^3/s).*



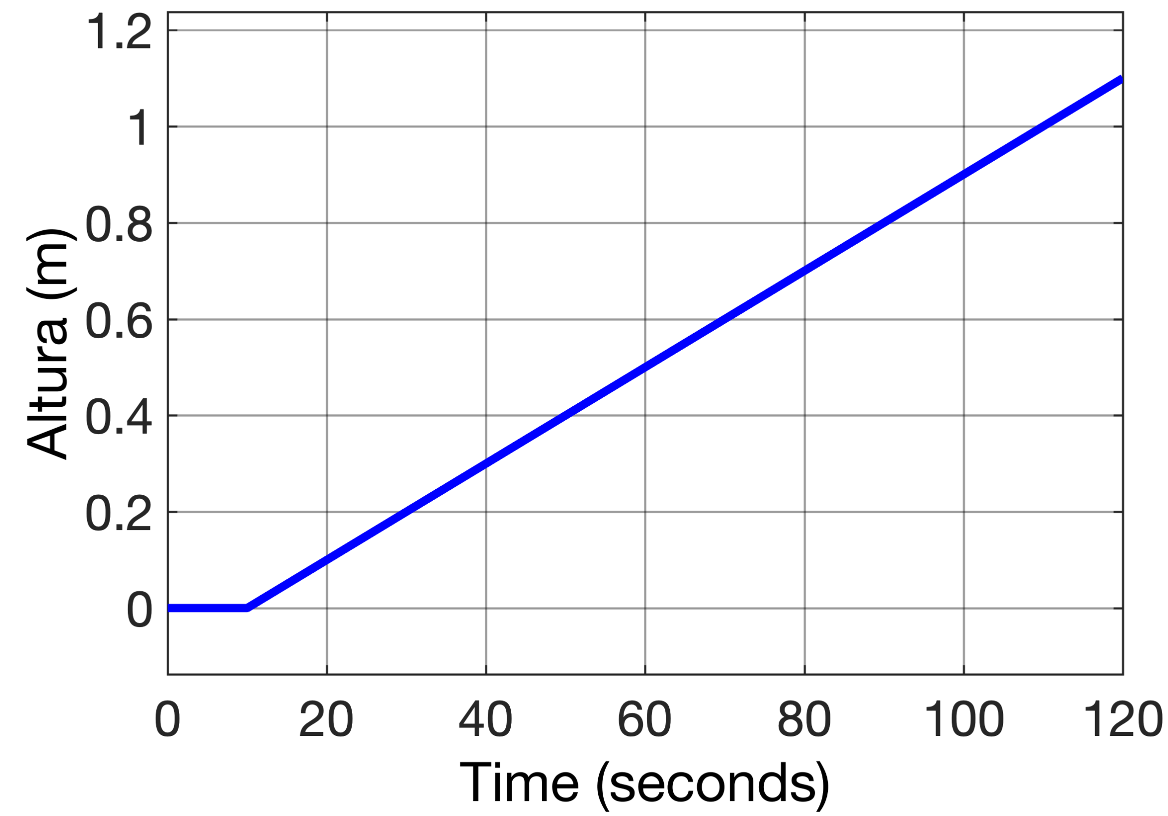

```
% Simulando processo tipo 1 (1 integrador)
% Preenchendo tanque com l?quido
% Avaliando altura atingida pelo l?quido

% Criando vetor tempo da simula??o
t=0:1:2*60; % criando vetor tempo (1 em 1 segundo; 2 minutos)
u=length(t); % No. de pontos do vetor t; u =    121
Qe=zeros(1,u); % criando vetor Qe mesma dimensao vetor t, zerado
% mas Qe=0.005 entre 10 < t < 10+1,5*60
% t(10) =     9
Qe(1,10:(10+1.5*60+1))=0.005;
% verificando...
plot (t,Qe)
pause
A=0.5;
alpha=0.005/0.5; % razao
% inicializando vetor da altura com zeros
h=zeros(1,u);
for i=2:u
    h(i)=h(i-1)+Qe(i)/A; % calculando a integral de h(t)
end
[hAx,hLine1,hLine2] = plotyy(t,Qe, t,h);
title('Processo do tanque');
xlabel('tempo (seg)');
ylabel(hAx(1), 'Vazao (m^3/s)') % left y-axis
ylabel(hAx(2), 'Altura (m)') % right y-axis
```

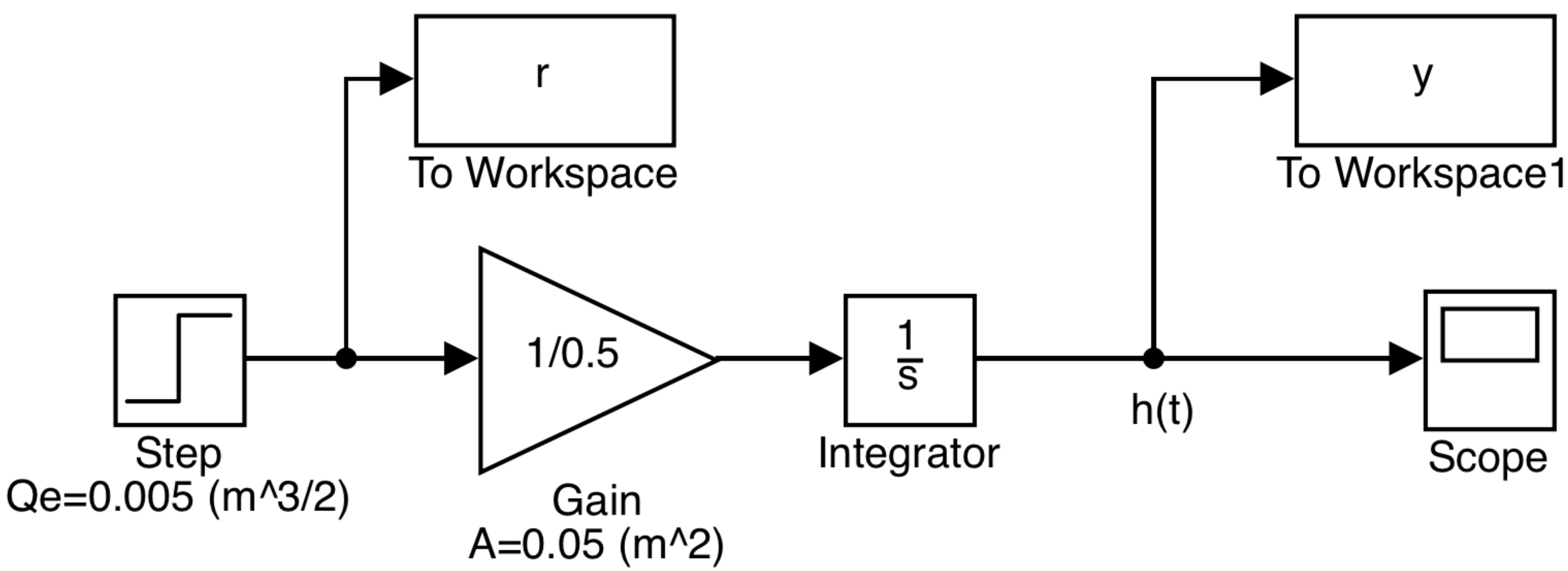
SIMULANDO PROCESSO DO TANQUE (2)



$$h(t) = h(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \frac{Q_e(t)}{A}\,dt$$

- *note que o "sinal" $Q_e(t)$ se comporta como um degrau de amplitude = 0,005 (m^3/s).*



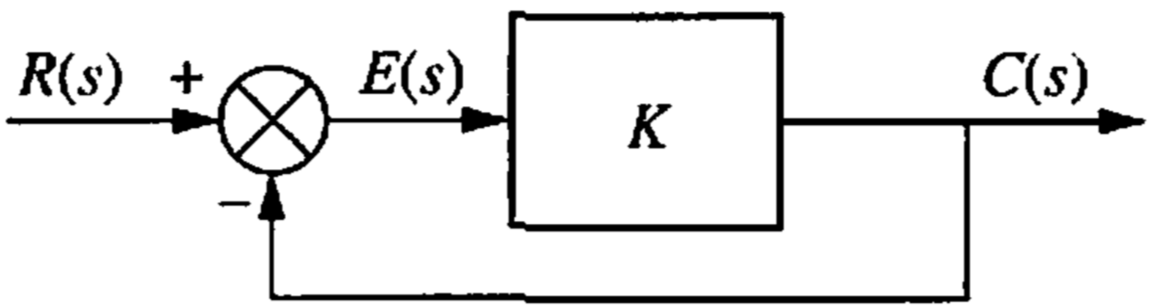


OUTROS PROCESSOS COM INTEGRADOR

- Controle de posição à partir de sensor de velocidade.
- Ex.: estimando posição percorrida por um AVG ou robô à partir dos encoders (contador de pulsos) presentes nas suas rodas…

MALHA FECHADA SEM INTEGRADOR

- Simulações:



[Ref.: NISE, fig. 7.4]

$$Y(s) = \frac{K}{1+K} \cdot R(s)$$

Se $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe, então $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$

Se R(s) é um degrau unitário:

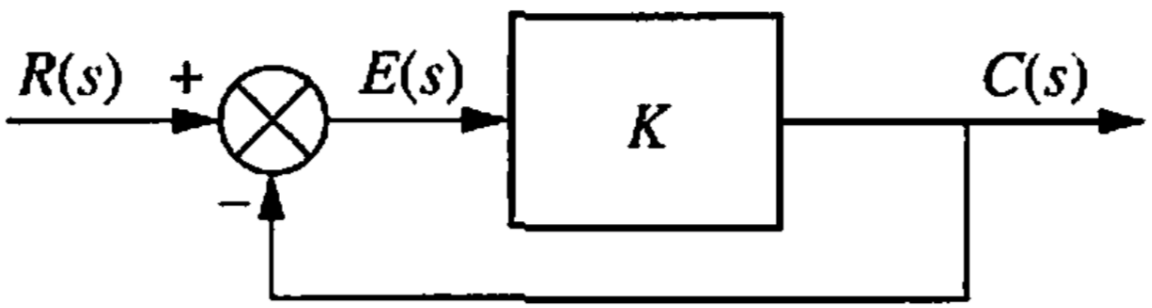
$$Y(s) = \left(\frac{K}{1+K}\right) \cdot \frac{1}{s}$$

$$y_{\sqcup\!\!\sqcap}(\infty) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \left(\frac{K}{1+K}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{s}}$$

$$y_{\sqcup\!\!\sqcap}(\infty) = \frac{K}{1+K}$$

MALHA FECHADA SEM INTEGRADOR

➤ Simulações:



[Ref.: NISE, fig. 7.4]

$$Y(s) = \frac{K}{1+K} \cdot R(s)$$

$$e_{\_\ulcorner}(\infty) = \frac{1}{1 + \lim\limits_{s \to 0} FTMA(s)} = \frac{1}{1+K_p}$$

Se R(s) é um degrau unitário:

$$Y(s) = \left(\frac{K}{1+K}\right) \cdot \frac{1}{s}$$

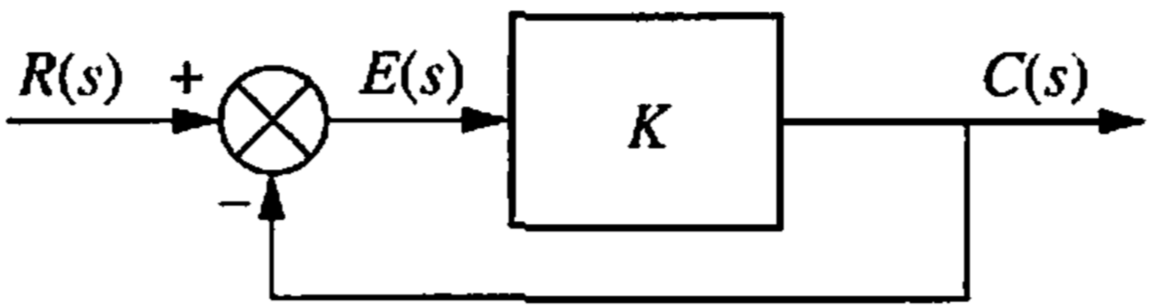
$$y_{\_\ulcorner}(\infty) = \frac{K}{1+K} \qquad e_{\_\ulcorner}(\infty) = \frac{1}{1+K}$$

ou seja, o valor em regime permanente de y(t) só depende do valor de K!

o erro diminui a medida que K aumenta.

MALHA FECHADA SEM INTEGRADOR

➤ Simulações:



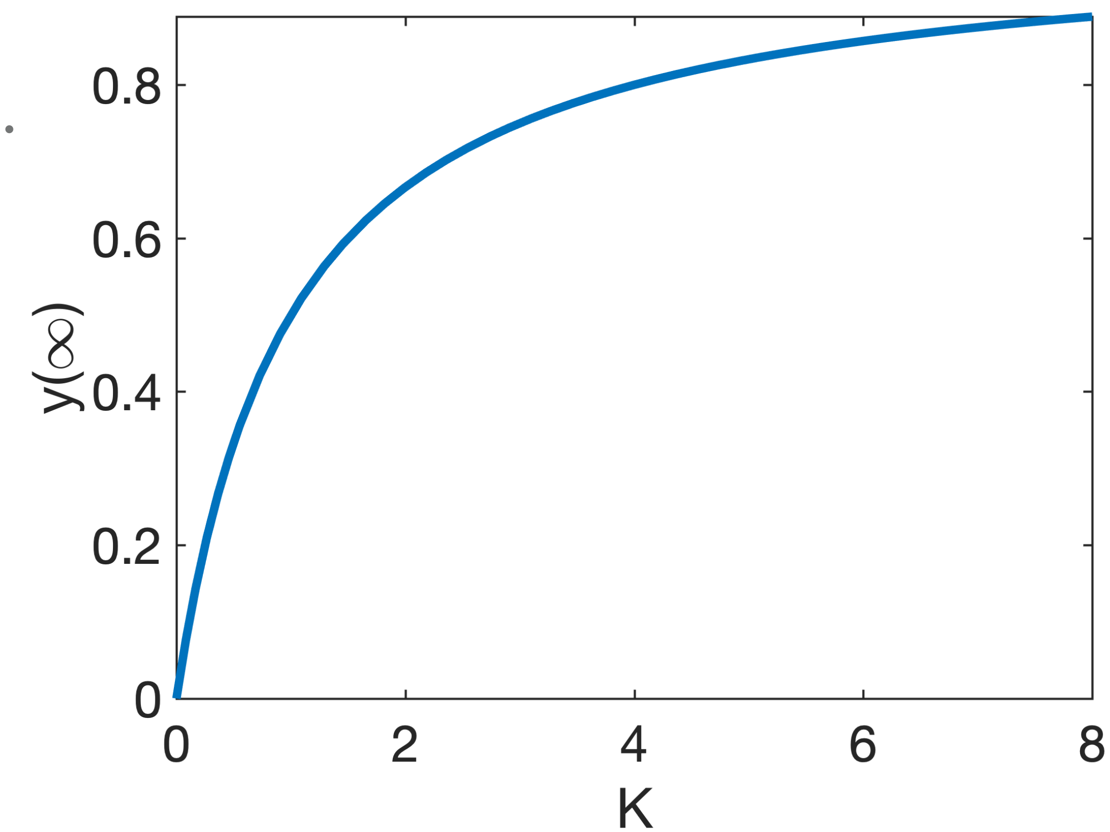
[Ref.: NISE, fig. 7.4]

$$Y(s) = \frac{K}{1+K} \cdot R(s)$$

Se $R(s)$ é um degrau unitário:

$$Y(s) = \left(\frac{K}{1+K}\right) \cdot \frac{1}{s}$$

$$y_{\_\rceil}(\infty) = \frac{K}{1+K}$$

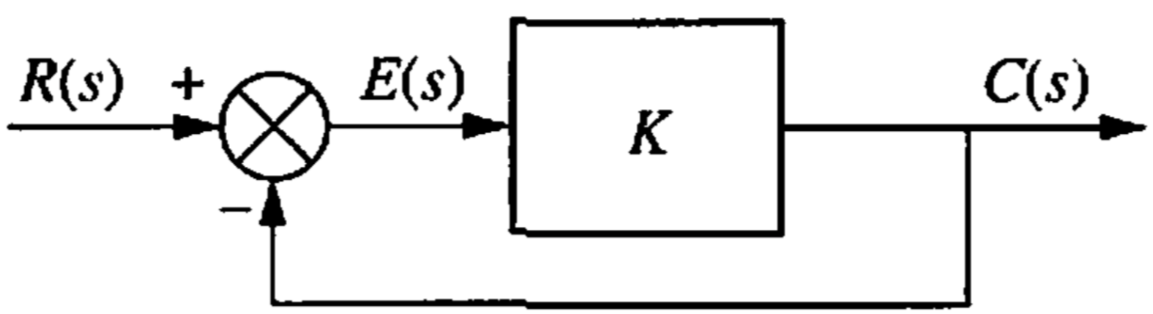



```
>> K=[0.5 1 2 4 8]';
>> y=K./(K+1);
>> [K y]
ans =
    0.5000    0.3333
    1.0000    0.5000
    2.0000    0.6667
    4.0000    0.8000
    8.0000    0.8889

>> figure; plot(K,y)
>> fplot(@(K) K/(1+K), [0 8] )
```

ou seja, o valor em regime permanente de $y(t)$ só depende do valor de K!

MALHA FECHADA SEM INTEGRADOR

- Simulações:

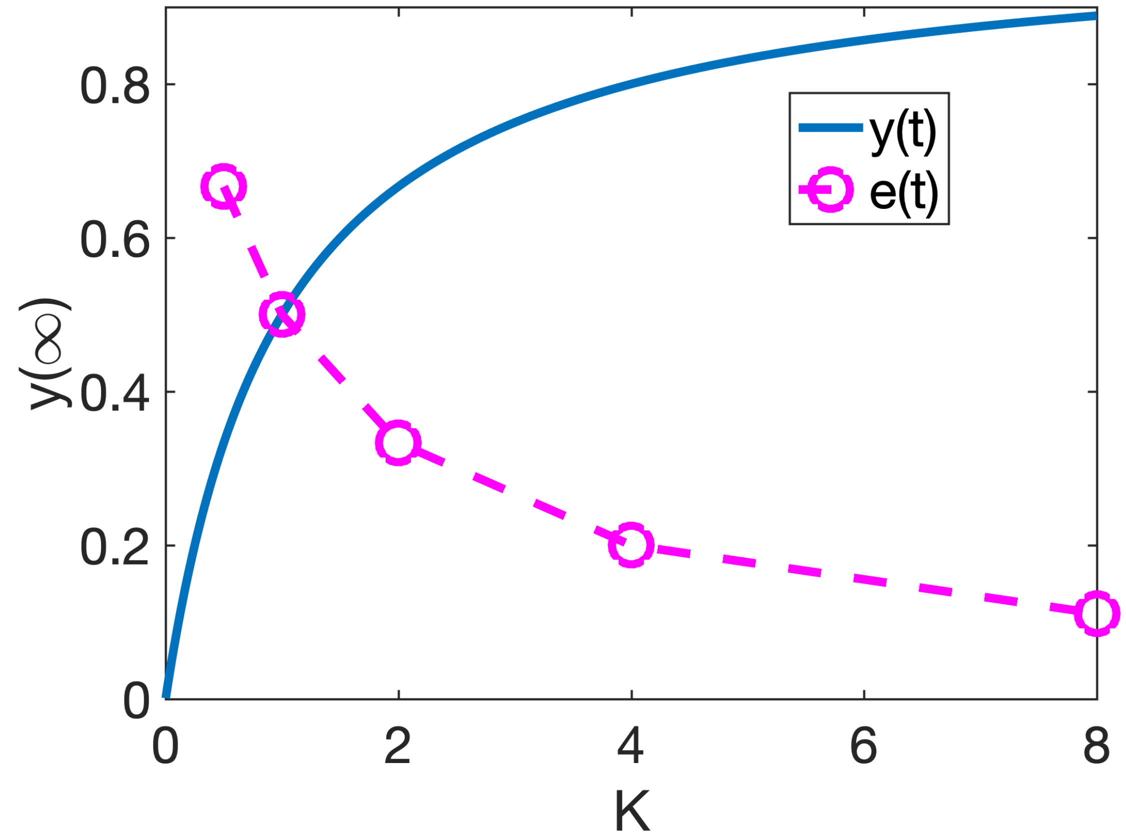


$$y_{\lrcorner\ulcorner}(\infty) = \frac{K}{1+K}$$

ou seja, o valor em regime permanente de y(t) só depende do valor de K!

Porém mesmo que K assuma um valor imenso, $y(\infty) \neq 1{,}0$ (entrada degrau) — sempre persistirá um erro de regime permanente:

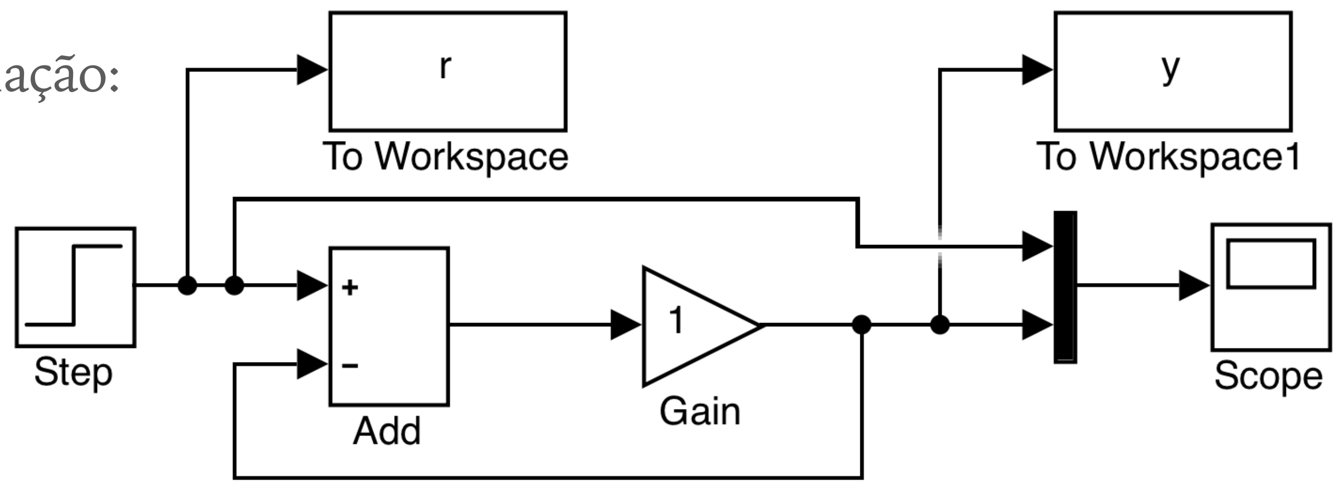
$$e_{\lrcorner\ulcorner}(\infty) = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} FTMA(s)} = \frac{1}{1+K}$$

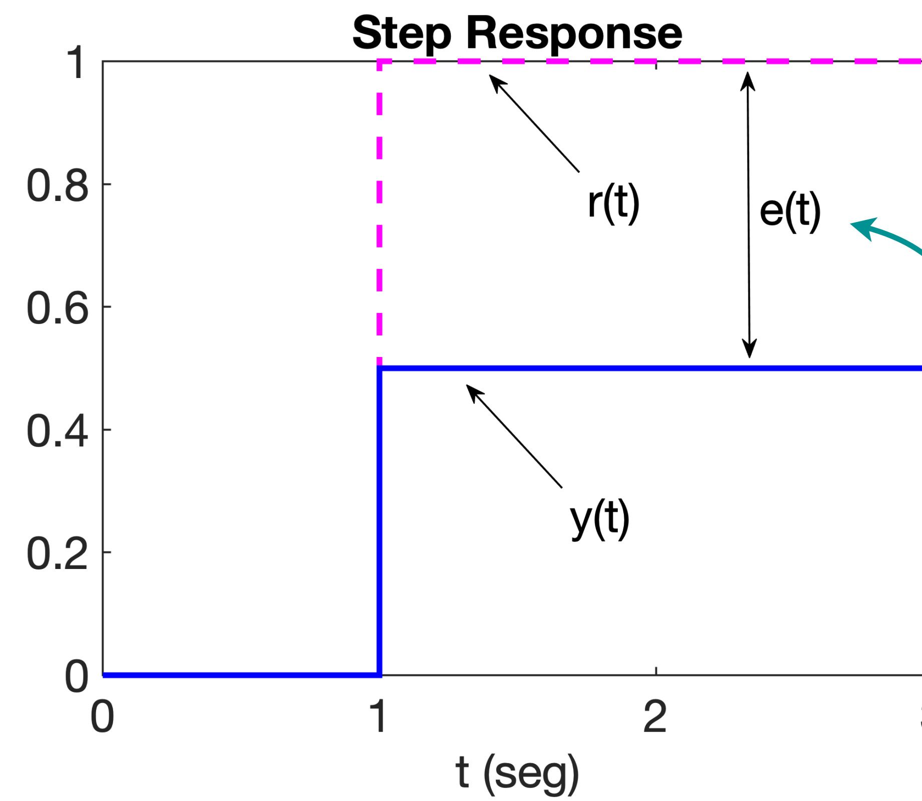



```
>> e=1./(1+K);
>> [K e]
ans =
    0.5000    0.6667
    1.0000    0.5000
    2.0000    0.3333
    4.0000    0.2000
    8.0000    0.1111
>>
```

MALHA FECHADA SEM INTEGRADOR

➤ Simulação:





$$y_{\_\!\ulcorner}(\infty) = \frac{K}{1+K}$$

ou seja, o valor em regime permanente de $y(t)$ só depende do valor de K!

Porém mesmo que K assuma um valor imenso, $y(\infty) \neq 1{,}0$ (entrada degrau) — sempre persistirá um erro de regime permanente.

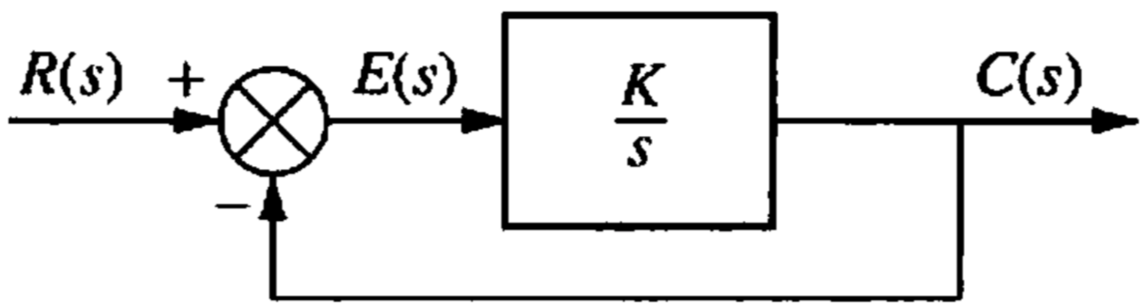
$$e_{\_\!\ulcorner}(\infty) = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} FTMA(s)} = \frac{1}{1+K}$$

```
>> K=[0.5 1 2 4 8]';
>> y=K./(K+1);
>> [K y]
ans =
    0.5000    0.3333
    1.0000    0.5000
    2.0000    0.6667
    4.0000    0.8000
    8.0000    0.8889
>>
```

```
>> e=1./(1+K);
>> [K e]
ans =
    0.5000    0.6667
    1.0000    0.5000
    2.0000    0.3333
    4.0000    0.2000
    8.0000    0.1111
>>
```

MALHA FECHADA COM INTEGRADOR

- Simulações:



[Ref.: NISE, fig. 7.4]

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K/s}{1+K/s} = \frac{K}{s+K}$$

Se R(s) é um degrau unitário:

$$Y(s) = \left(\frac{K}{s+K}\right)\cdot\frac{1}{s}$$

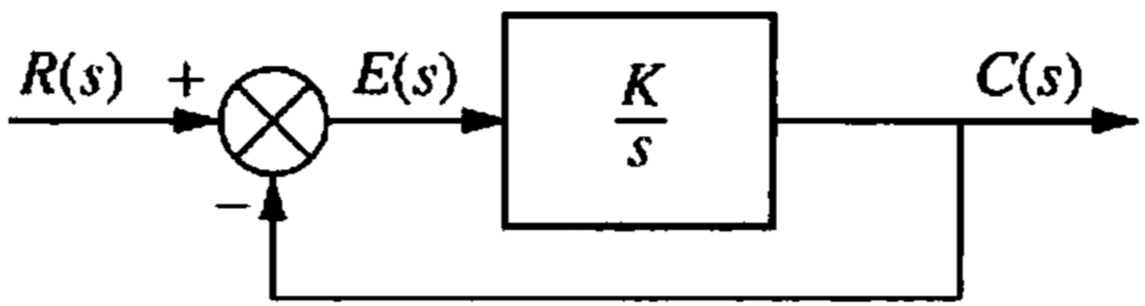
Se $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe, então $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$

$$y_{\llcorner\urcorner}(\infty) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot\left(\frac{K}{s+K}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{s}} = \frac{\cancel{K}}{\cancel{K}} = 1$$

MALHA FECHADA COM INTEGRADOR

- Simulações:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K/s}{1 + K/s} = \frac{K}{s + K}$$



Se R(s) é um degrau unitário:

$$y_{\lrcorner\!\ulcorner}(\infty) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \left(\frac{K}{s+K}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \frac{\cancel{K}}{\cancel{K}} = 1$$

$$e_{\lrcorner\!\ulcorner}(\infty) = \frac{1}{1 + \lim\limits_{s\to 0} K/s}$$

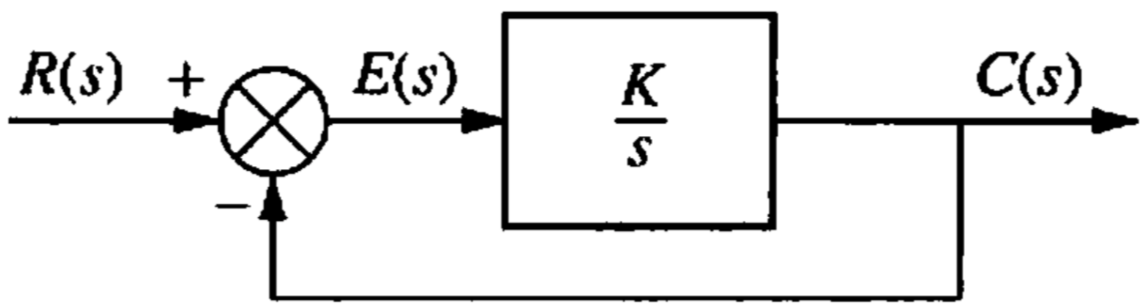
$$e_{\lrcorner\!\ulcorner}(\infty) = \frac{1}{1 + \lim\limits_{s\to 0} FTMA(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$e_{\lrcorner\!\ulcorner}(\infty) = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

MALHA FECHADA COM INTEGRADOR

- Simulações:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K/s}{1 + K/s} = \frac{K}{s + K}$$

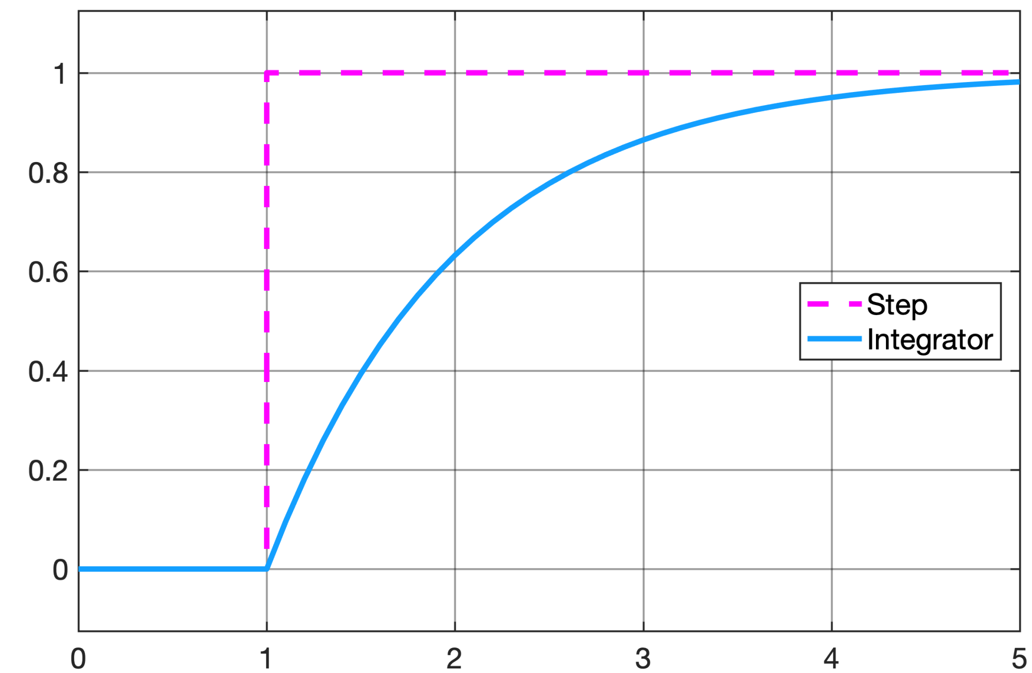


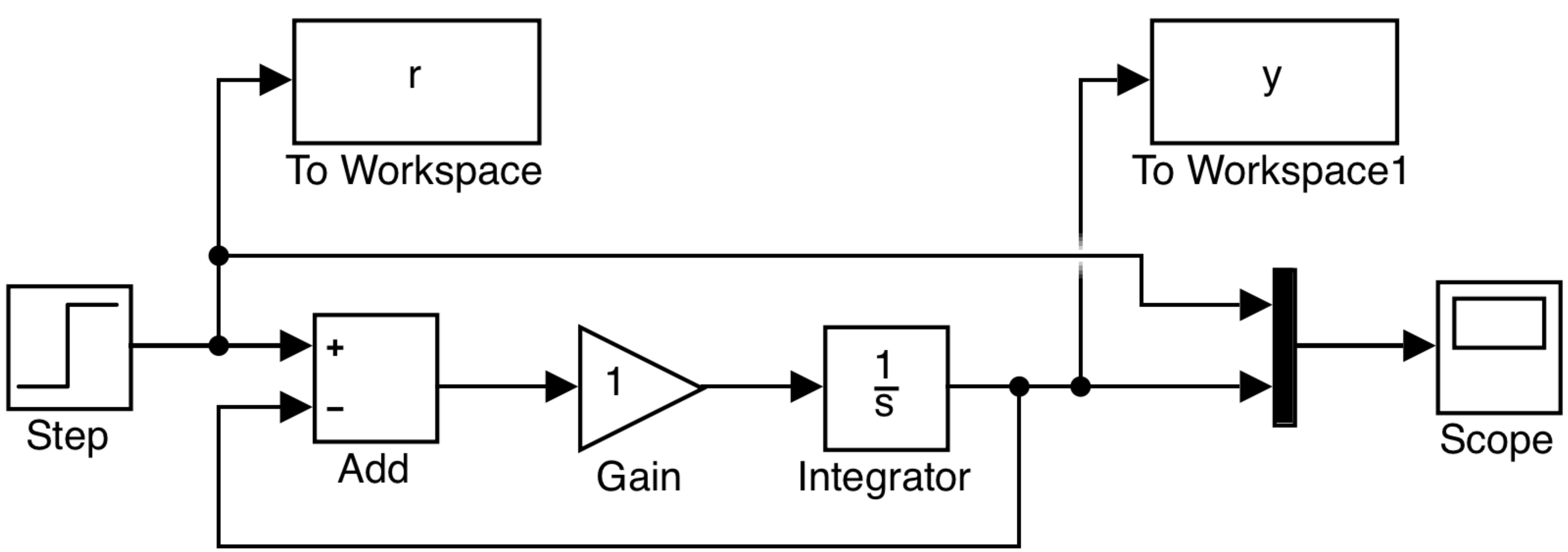
Se R(s) é um degrau unitário:

$$y_{\_\ulcorner}(\infty) = 1$$

$$e_{\_\ulcorner}(\infty) = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

K=1

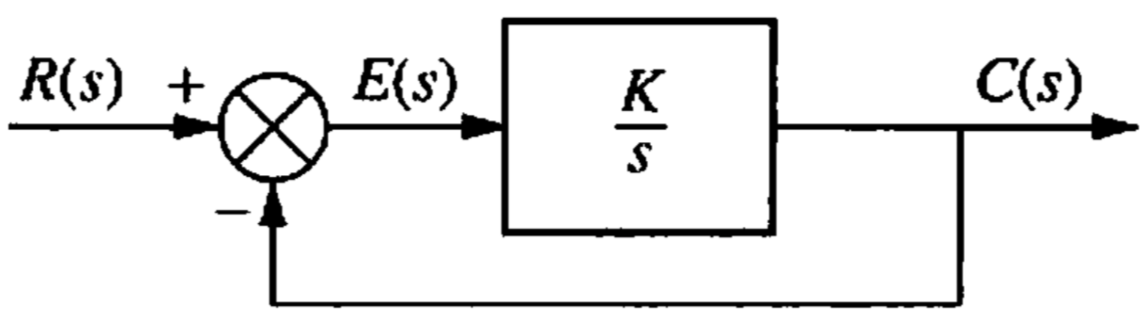




MALHA FECHADA COM INTEGRADOR

➤ Simulações:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K/s}{1+K/s} = \frac{K}{s+K}$$

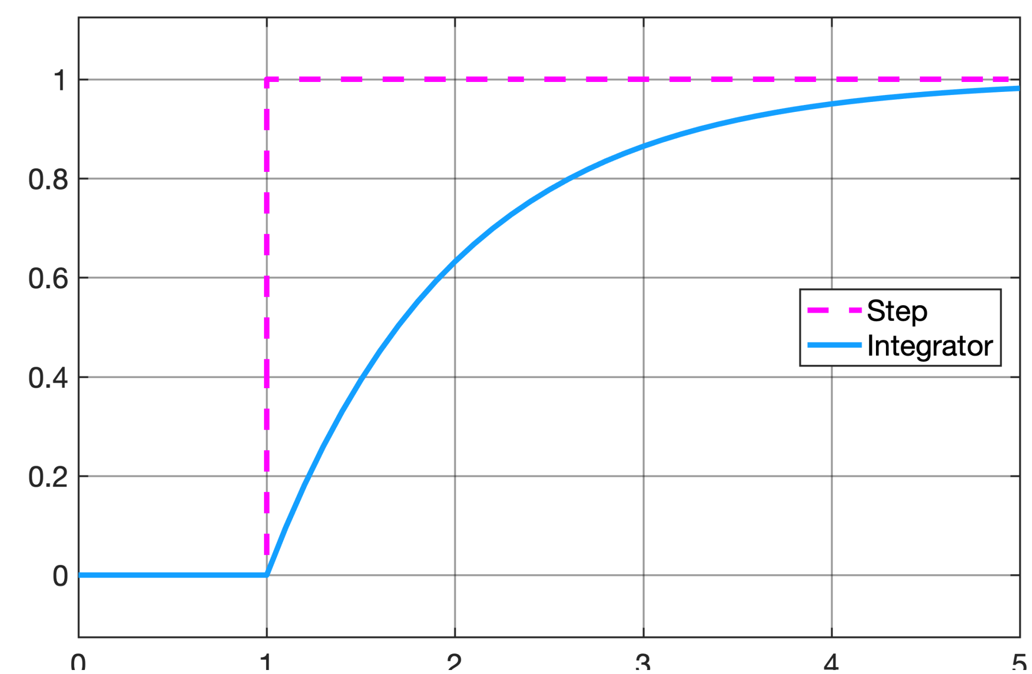


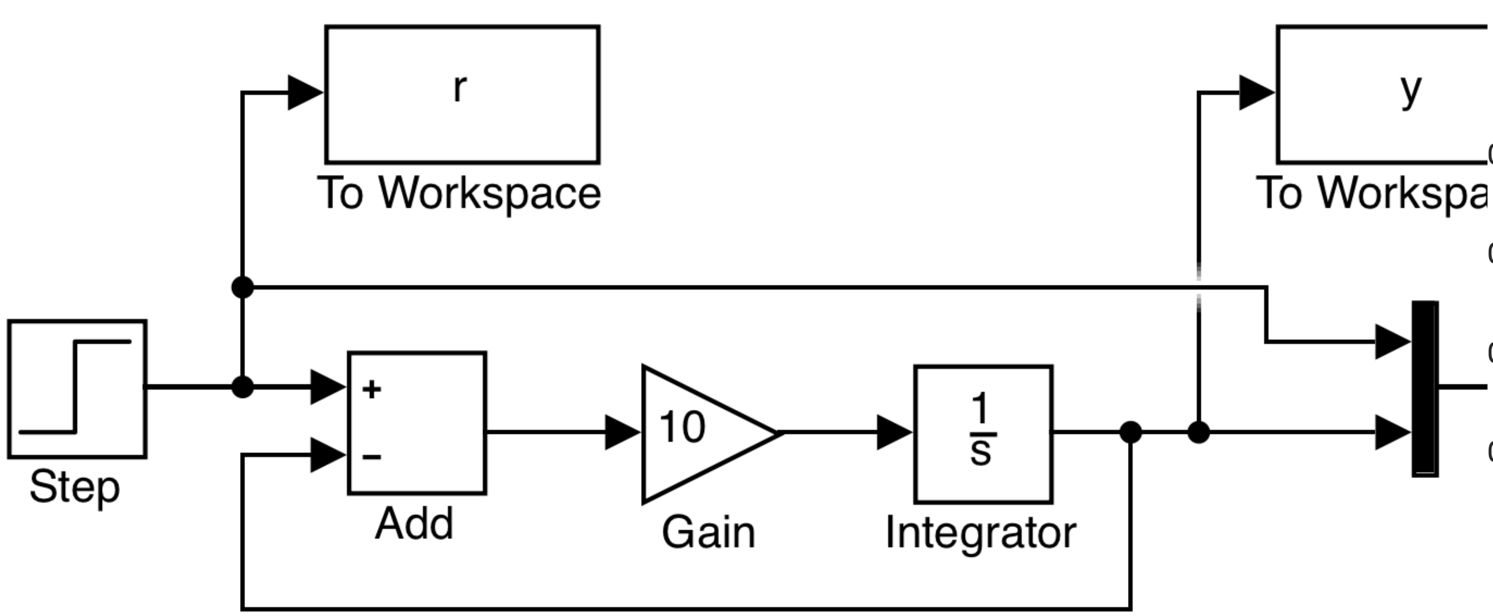
Se R(s) é um degrau unitário:

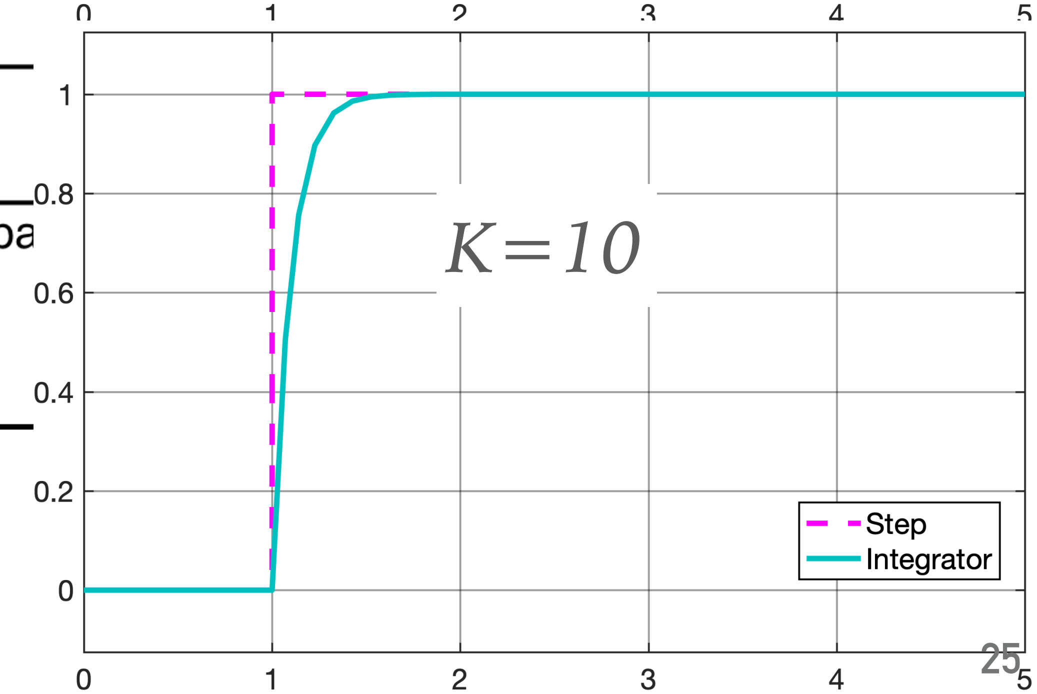
$$y_{\_\!\ulcorner}(\infty) = 1$$

$$e_{\_\!\ulcorner}(\infty) = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

K=1

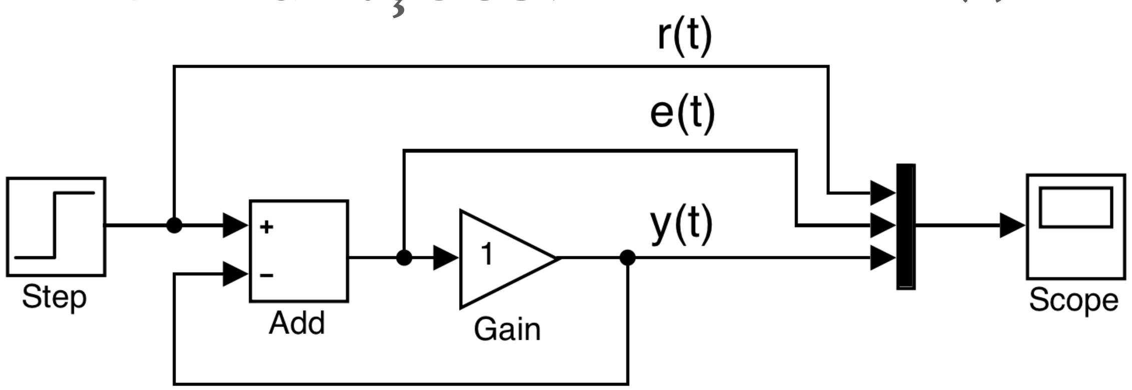


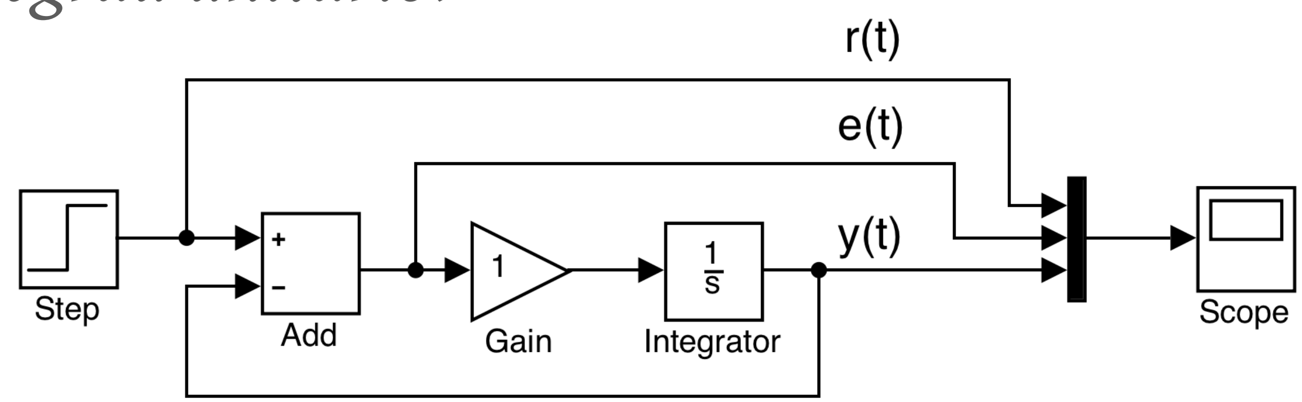




MALHA FECHADA SEM & COM INTEGRADOR

➤ Simulações: *Se $R(s)$ é um degrau unitário:*



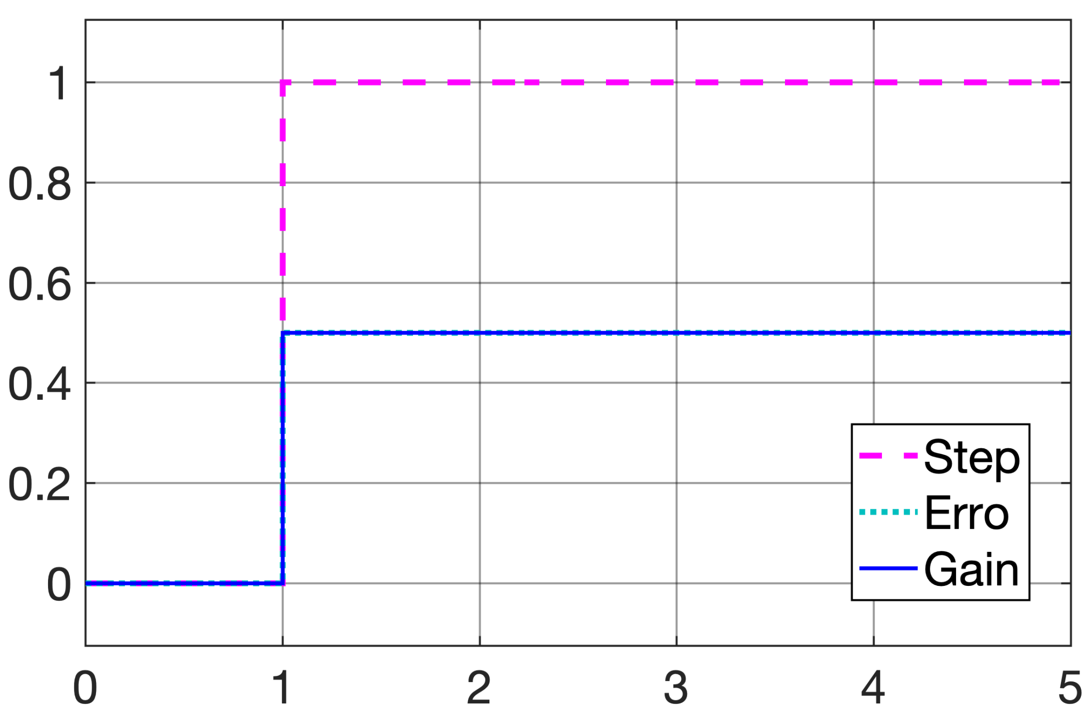


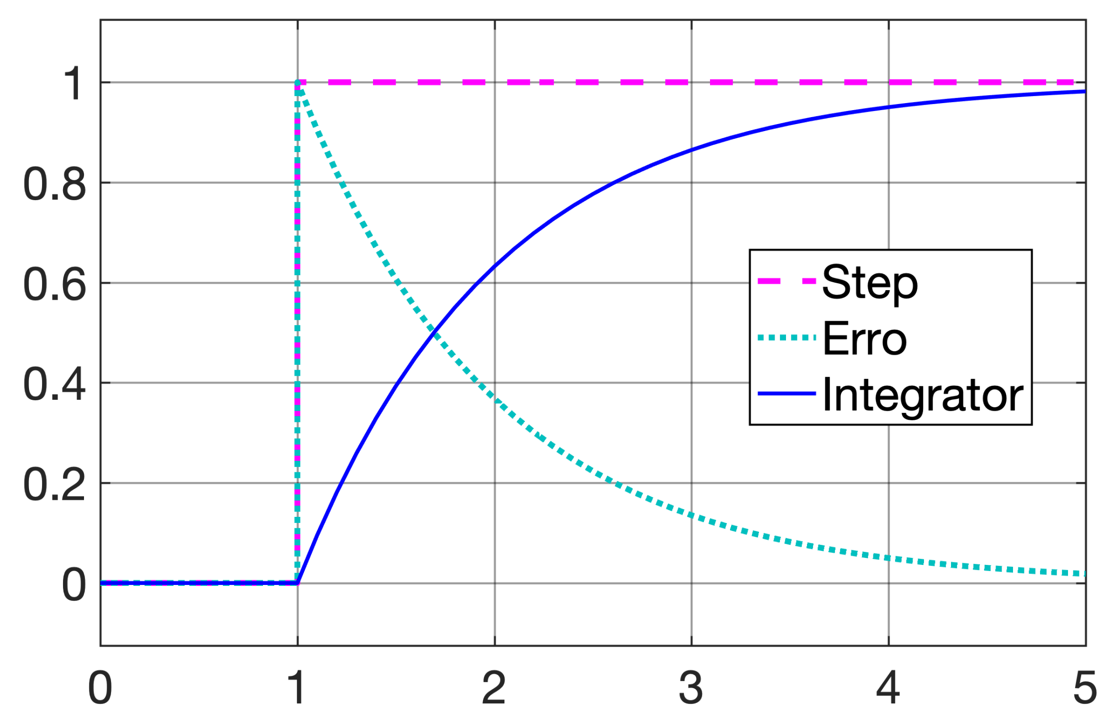
$$y_{\lrcorner\ulcorner}(\infty) = \frac{K}{1+K}$$

$$e_{\lrcorner\ulcorner}(\infty) = \frac{1}{1+K}$$

$$y_{\lrcorner\ulcorner}(\infty) = 1$$

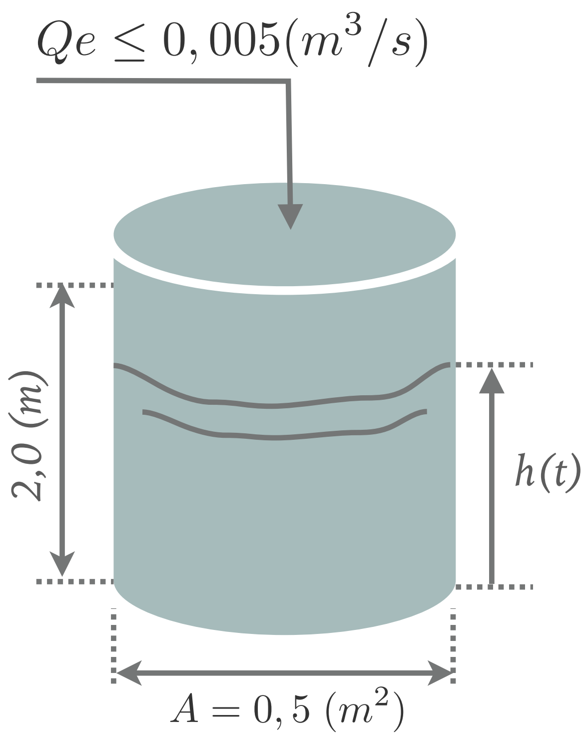
$$e_{\lrcorner\ulcorner}(\infty) = \frac{1}{1+\infty} = 0$$



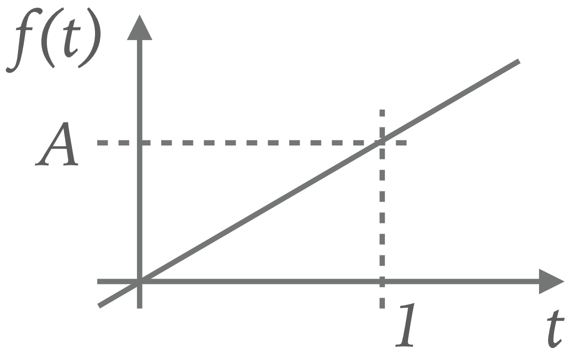


SIMULANDO PROCESSO DO TANQUE EM MALHA-FECHADA

- Suponha que o objetivo aqui é manter h = 1,0 metros…



CASO 2) ERROS PARA ENTRADA RAMPA



$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A \cdot t, & t \geq 0 \end{cases} \longrightarrow F(s) = \frac{A}{s^2}$$

- O erro em regime permanente é dado então por:

$$e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s\,E(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s\,R(s)}{1 + FTMA(s)}$$

- No caso da entrada rampa:

$$e_{ramp} = \lim_{s \to 0} \frac{s\left(1/s^2\right)}{1 + FTMA(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s + s\,FTMA(s)} = \frac{1}{\lim_{s \to 0}\ s\,FTMA(s)}$$

- Note: para obtermos erro nulo para entrada rampa:

$$e_{ramp} = 0 \quad \Leftarrow \quad \lim_{s \to 0}\ s\,FTMA(S) = \infty$$

- Analisando para diferentes tipos de sistemas…

$$FTMA(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_s\ (s + z_1)(s + z_2)\cdots}{s^n\ (s + p_1)(s + p_2)\cdots}$$

CASO 2) ERROS PARA ENTRADA RAMPA

- No caso da entrada rampa:

$$e_{ramp} = \lim_{s\to 0} \frac{s\left(1/s^2\right)}{1+FTMA(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+s\,FTMA(s)} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{s\to 0}\ s\,FTMA(s)}_{K_v}}$$

- Note: para obtermos erro nulo para entrada rampa:

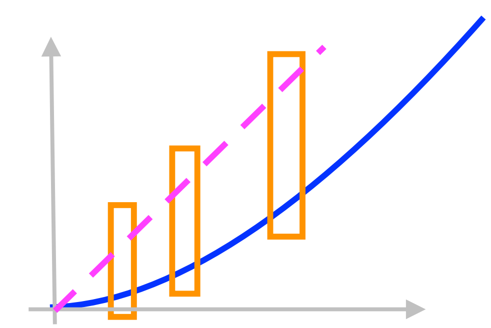
$$e_{ramp} = 0 \quad \Leftarrow \quad \lim_{s\to 0}\ s\,FTMA(S) = \infty$$

- Analisando para diferentes tipos de sistemas: $FTMA(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} = \dfrac{K_s\,(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s^n\,(s+p_1)(s+p_2)\cdots}$

- Sistema tipo 0:

$$e_{ramp} = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\ s\,FTMA(s)} = \frac{1}{(s\to 0)\cdot cte} = \infty$$

$\Leftarrow$ *Nunca converge, só aumenta!*



- Sistema tipo 1:

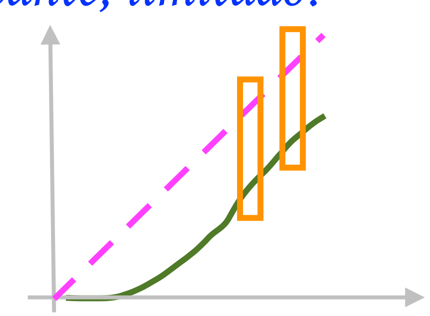
$$e_{ramp} = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\ s\,FTMA(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} \dfrac{\cancel{s}\cdot K_s(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{\cancel{s}(s+p_1)(s+p_2)\cdots}} = \frac{1}{cte_x} = cte_y$$

$\Leftarrow$ *Erro constante, limitado!*

- Sistema tipo 2:

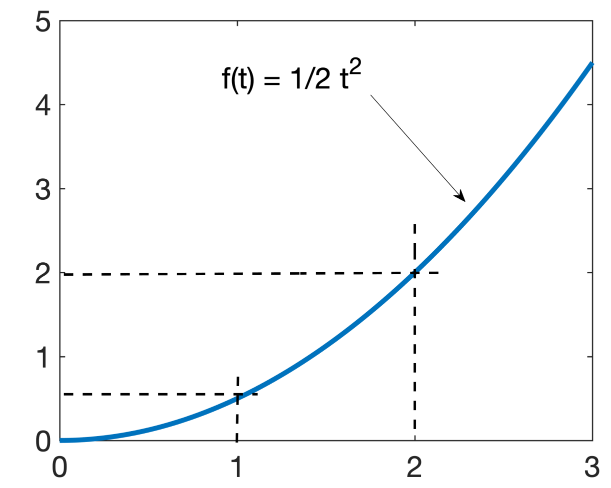
$$e_{ramp} = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\ s\,FTMA(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} \dfrac{\cancel{s}\cdot K_s(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s^{\cancel{2}1}(s+p_1)(s+p_2)\cdots}} = \frac{1}{\frac{cte}{(s\to 0)}} = 0$$

$\Leftarrow$ *Erro nulo*



CASO 3) ERROS PARA ENTRADA PARABÓLICA

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & t \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s^3}$$



- O erro em regime permanente é dado então por:

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s\,R(s)}{1 + FTMA(s)}$$

- No caso da entrada parábola:

$$e_{parabola} = \lim_{s\to 0} \frac{s\,(1/s^3)}{1 + FTMA(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 + s^2\,FTMA(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2\,FTMA(s)}$$

- Note: para obtermos erro nulo para entrada parabólica:

$$e_{parabola} = 0 \quad \Leftarrow \quad \lim_{s\to 0} s^2\,FTMA(S) = \infty$$

- Analisando para diferentes tipos de sistemas…

$$FTMA(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_s\,(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s^n\,(s+p_1)(s+p_2)\cdots}$$

CASO 3) ERROS PARA ENTRADA PARABÓLICA

- No caso da entrada parábola:

$$e_{parabola} = \lim_{s \to 0} \frac{s\left(1/s^3\right)}{1 + FTMA(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 + s^2\, FTMA(s)} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{s \to 0}\ s^2\, FTMA(s)}_{K_a}}$$

- Note: para obtermos erro nulo para entrada parabólica:

$$e_{parabola} = 0 \quad \Leftarrow \quad \lim_{s \to 0}\ s^2\, FTMA(S) = \infty$$

- Analisando para diferentes tipos de sistemas: $FTMA(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} = \dfrac{K_s\ (s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s^n\ (s+p_1)(s+p_2)\cdots}$

- Sistema tipo 0:

$$e_{parabola} = \frac{1}{\lim\limits_{s \to 0}\ s^2\ FTMA(s)} = \frac{1}{(s^2 \to 0)\cdot cte} = \infty \quad \Leftarrow \textit{Nunca converge, só aumenta!}$$

- Sistema tipo 1:

$$e_{parabola} = \frac{1}{\lim\limits_{s \to 0}\ s^2\ FTMA(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{s^{\cancel{2}\,1} \cdot K_s(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{\cancel{s}(s+p_1)(s+p_2)\cdots}} = \frac{1}{(s \to 0)\ cte} = \infty \quad \Leftarrow \textit{Nunca converge, só aumenta!}$$

- Sistema tipo 2:

$$e_{parabola} = \frac{1}{\lim\limits_{s \to 0}\ s^2\ FTMA(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{\cancel{s^2} \cdot K_s(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{\cancel{s^2}(s+p_1)(s+p_2)\cdots}} = \frac{1}{cte_z} = cte_w \quad \Leftarrow \textit{Erro constante, limitado!}$$

RESUMO PARA E(∞)=0, COM RELAÇÃO À R(S) E FTMA(S)

- Equação genérica para FTMA(s): $FTMA(s) \equiv \dfrac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s^n\ (s+p_1)(s+p_2)\cdots}$

Degrau: $e_{step}(\infty) = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} FTMA(s)} = \frac{1}{1+K_p}$

Constante de Posição:
$K_p = \lim\limits_{s\to 0} FTMA(s)$

Para $e(\infty) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{s\to 0} FTMA(s) = \infty$
Ou seja, $Den(s) = 0$ de (1) quando $s \to 0$
Se $n \geq 1$ (1), teremos $\geq 1 \times 1/s$
Ao menos 1 **integrador puro**
(Ao menos 1 pólo sobre jw)

Rampa: $e_{ramp}(\infty) = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sFTMA(s)} = \frac{1}{K_v}$

Constante de Velocidade
$K_v = \lim\limits_{s\to 0} s \cdot FTMA(s)$

Para $e(\infty) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{s\to 0} sFTMA(s) = \infty$
Considerando (1)
Para $e(\infty) = 0$, ao menos $n \geq 2$
ou ao menos **2 integradores puros**
Se NÃO, $n = 1$ integrador: $e(\infty) = k$
Se NÃO, $n = 0$ integrador: $e(\infty) = \infty$

Parábola: $e_{parabola}(\infty) = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2 FTAM(s)} = \frac{1}{K_a}$
Constante de Aceleração
$K_a = \lim\limits_{s\to 0} s^2 \cdot FTMA(s)$

Para $e(\infty) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{s\to 0} s^2 FTMA(s) = \infty$
Ao menos $n \geq 3$
ou ao menos **3 integradores puros**

RESUMO (REALIMENTAÇÃO UNITÁRIA)

- Equação geral para $e(\infty)$:

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s\,R(s)}{1 + FTMA(s)}$$

- Conforme a entrada, R(s):
  - Entrada Degrau:

$$e_{\lrcorner\ulcorner}(\infty) = \lim_{s\to 0} \; s\,E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(1/s)}{1 + FTMA(s)} = \frac{1}{1 + \lim\limits_{s\to 0} \; FTMA(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

  - Entrada Rampa:

$$e_{ramp}(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s(1/s^2)}{1 + FTMA(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + s\,FTMA(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s \cdot FTMA(s)} = \frac{1}{K_v}$$

  - Entrada Parabólica:

$$e_{Parabola}(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s(1/s^3)}{1 + FTMA(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 + s^2\,FTMA(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2\;FTMA(s)} = \frac{1}{K_a}$$

ERROS: TABELA RESUMO

		Sist. tipo 0		Sist. tipo 1		Sist. tipo 2	
Entrada	Equação $e(\infty)$	Constante Erro	Erro	Constante Erro	Erro	Constante Erro	Erro
Degrau, $u(t)$	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = Cte$	$\frac{1}{1+K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Rampa, $t\,u(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	∞	$K_v = Cte$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parábola, $\frac{1}{2}\,t^2\,u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	∞	$K_a = 0$	∞	$K_a = Cte$	$\frac{1}{K_a}$

➤ *onde:*

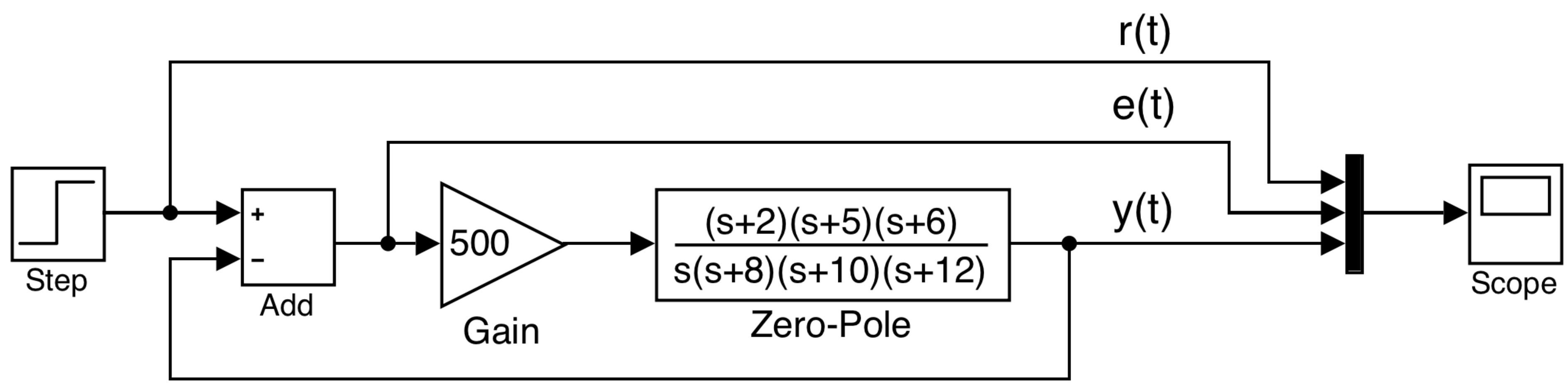
Constante de erro estático de Posição: $K_p = \lim_{s\to 0} FTMA(s)$

Constante de erro estático de Velocidade: $K_v = \lim_{s\to 0} s \cdot FTMA(s)$

Constante de erro estático de Aceleração: $K_a = \lim_{s\to 0} s^2 \cdot FTMA(s)$

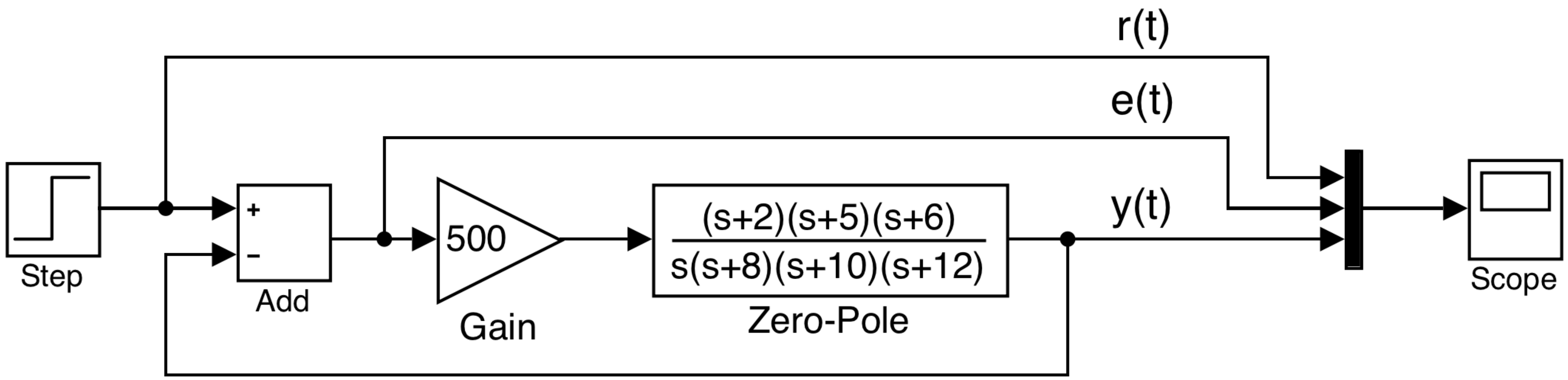
EXEMPLOS

- Encontre o erro de regime permanente para o sistema abaixo, quando: a) entrada = degrau; b) entrada = rampa e c) entrada = parábola.



EXEMPLOS

- Encontre o erro de regime permanente para o sistema abaixo, quando: a) entrada = degrau; b) entrada = rampa e c) entrada = parábola.



- Solução

$$FTMA(s) = K \cdot G(s)$$

$$FTMA(s) = \frac{500(s+2)(s+5)(s+6)}{s(s+8)(s+10)(s+12)}$$

Notamos que existe 1 <u>integrador</u> neste processo (tipo 1).

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} \ s\, G(s) = \frac{500 \times 2 \times 5 \times 6}{8 \times 10 \times 12} = 31,25$$

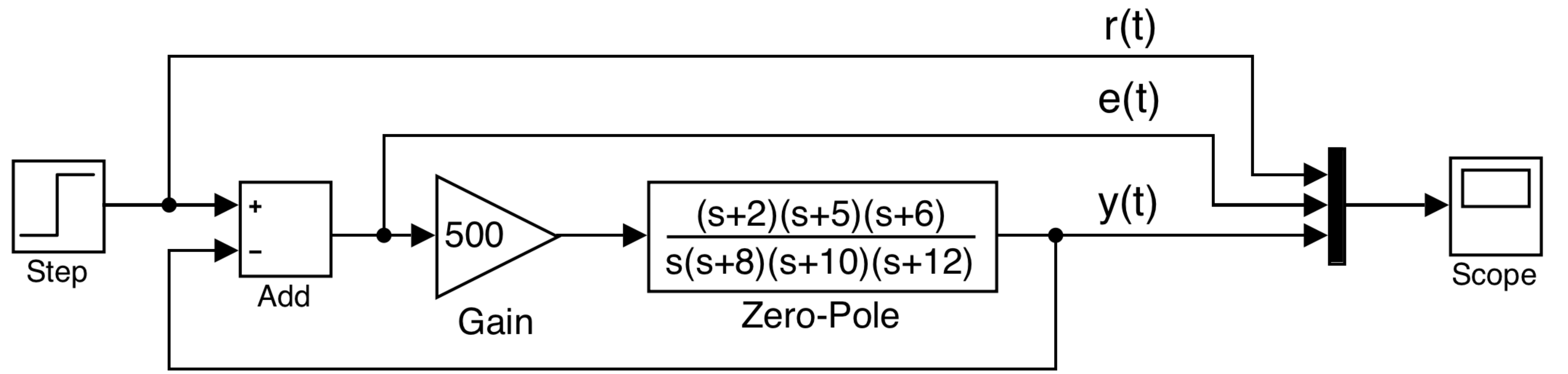
$$K_a = \lim_{s \to 0} \ s^2\, G(s) = \lim_{s \to 0} \ s^{\cancel{2}1} \cdot \frac{500(s+2)(s+5)(s+6)}{\cancel{s}(s+8)(s+10)(s+12)} = 0$$

$$e_{\text{step}}(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0,032$$

$$e_{\text{parabola}}(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty$$

EXEMPLOS



$$FTMA(s) = K \cdot G(s)$$

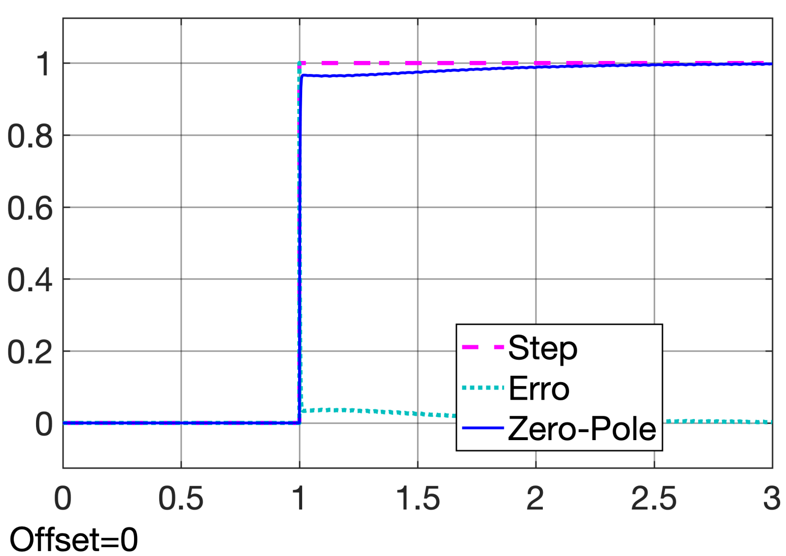
$$FTMA(s) = \frac{500(s+2)(s+5)(s+6)}{s(s+8)(s+10)(s+12)}$$

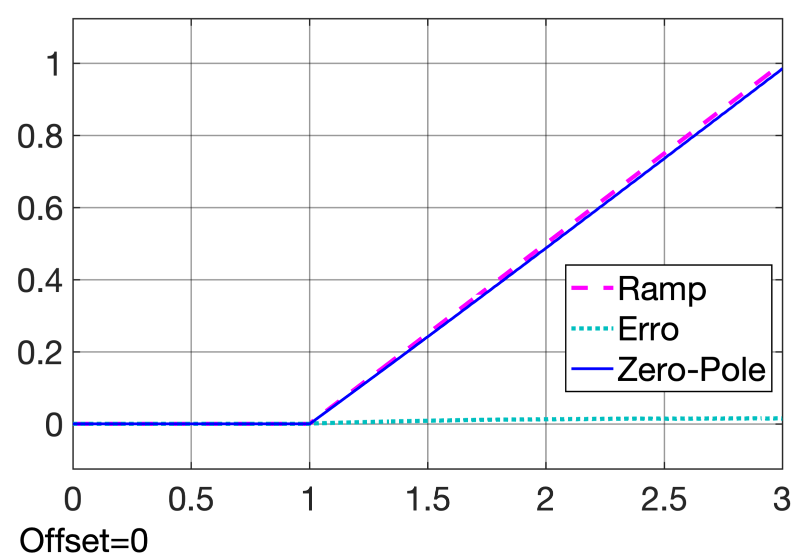
Notamos que existe 1 integrador neste processo (tipo 1).

$$e_{\text{step}}(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

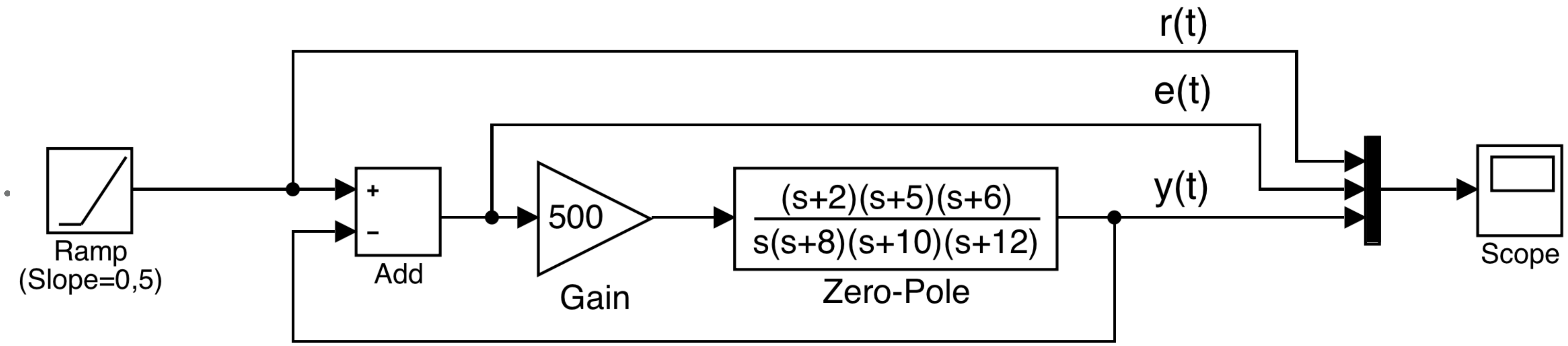
$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0,032$$

$$e_{\text{parabola}}(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty$$





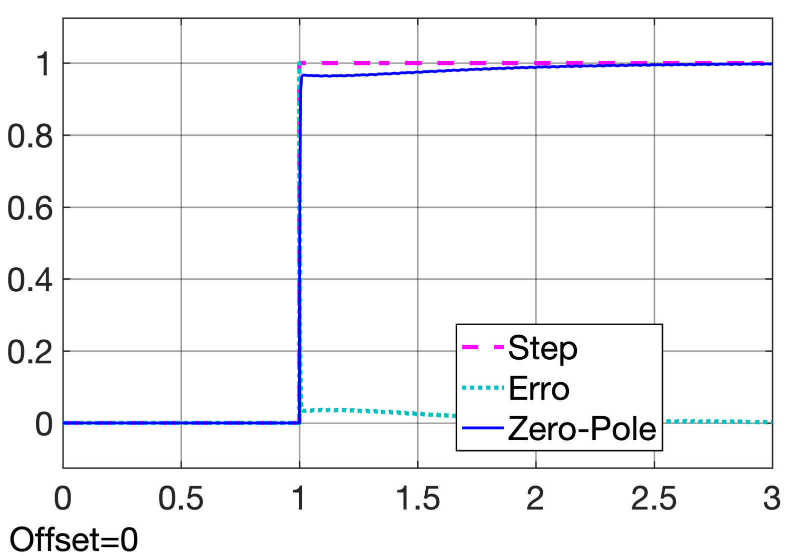
EXEMPLOS



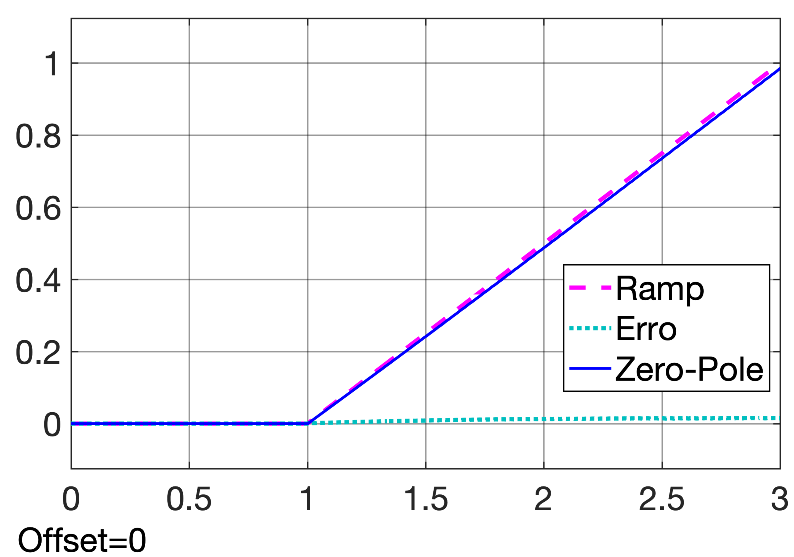
$$FTMA(s) = K \cdot G(s)$$

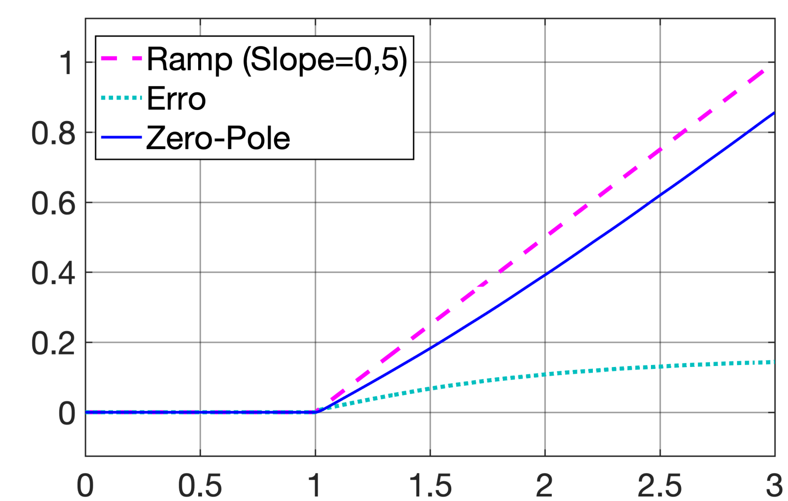
$$FTMA(s) = \frac{500(s+2)(s+5)(s+6)}{s(s+8)(s+10)(s+12)}$$

Notamos que existe 1 <u>integrador</u> neste processo (tipo 1).



Entrada Rampa *(diferentes valores de ganho):*





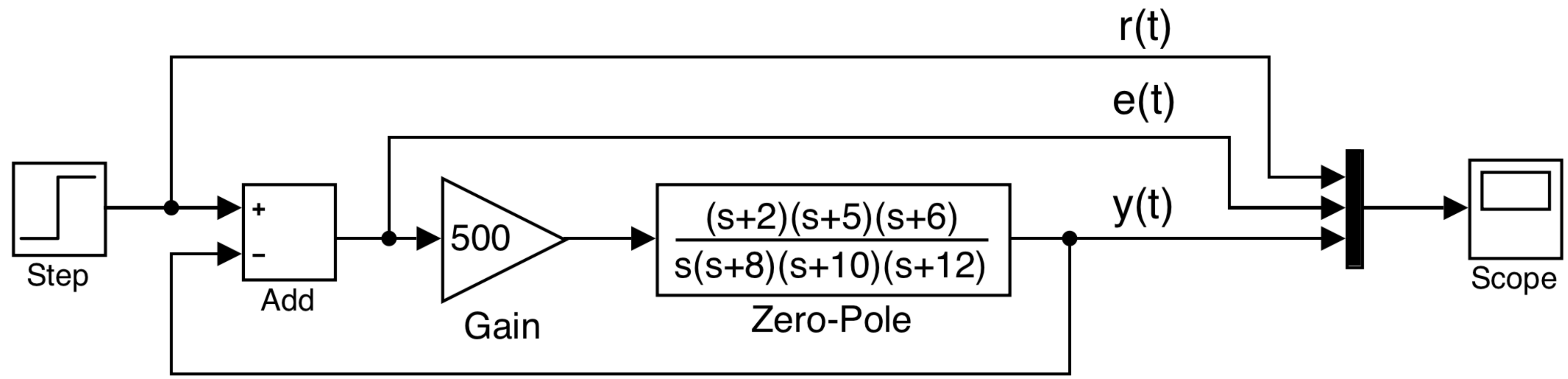
K=500

$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0,032$$

K=50

$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{0.5 \times 0.32} = 0,16$$

EXEMPLOS



$$FTMA(s) = K \cdot G(s)$$

$$FTMA(s) = \frac{500(s+2)(s+5)(s+6)}{s(s+8)(s+10)(s+12)}$$

Notamos que existe 1 integrador neste processo (tipo 1).

$$e_{\text{step}}(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

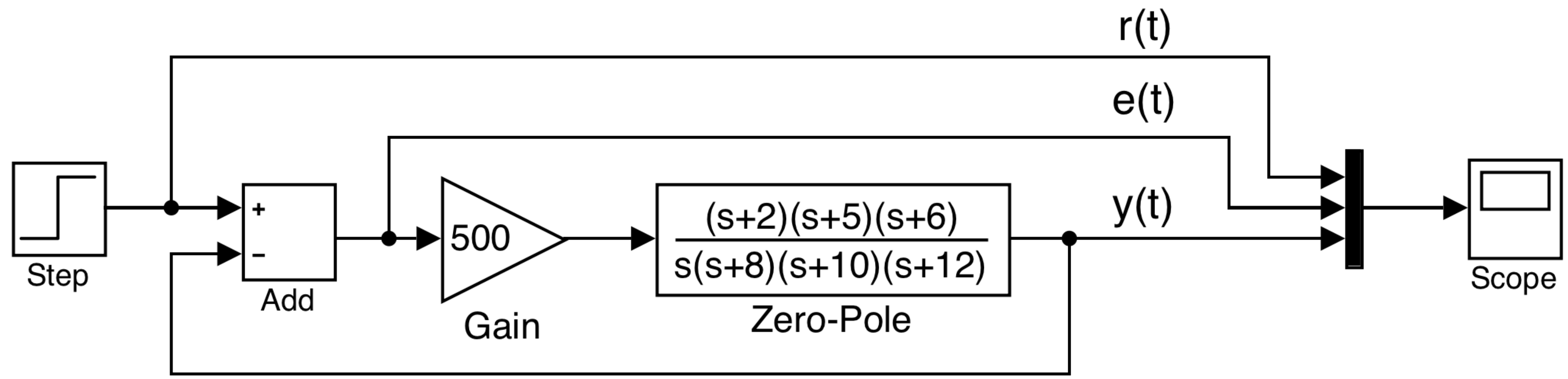
$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0,032$$

$$e_{\text{parabola}}(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty$$

```
MATLAB:
>> G=tf(poly([-2 -5 -6]),poly([0 -8 -10 -12]));
G =
     s^3 + 13 s^2 + 52 s + 60
  ------------------------------
  s^4 + 30 s^3 + 296 s^2 + 960 s
Continuous-time transfer function.
>> zpk(G)
ans =
    (s+6) (s+5) (s+2)
  ---------------------
  s (s+12) (s+10) (s+8)
Continuous-time zero/pole/gain model.
>> K=500;
```

```
>> ftmf=feedback(K*G,1)
ftmf =
     500 s^3 + 6500 s^2 + 26000 s + 30000
  ------------------------------------------
  s^4 + 530 s^3 + 6796 s^2 + 26960 s + 30000
Continuous-time transfer function.
>> figure; step(ftmf)
```

EXEMPLOS



$$FTMA(s) = K \cdot G(s)$$

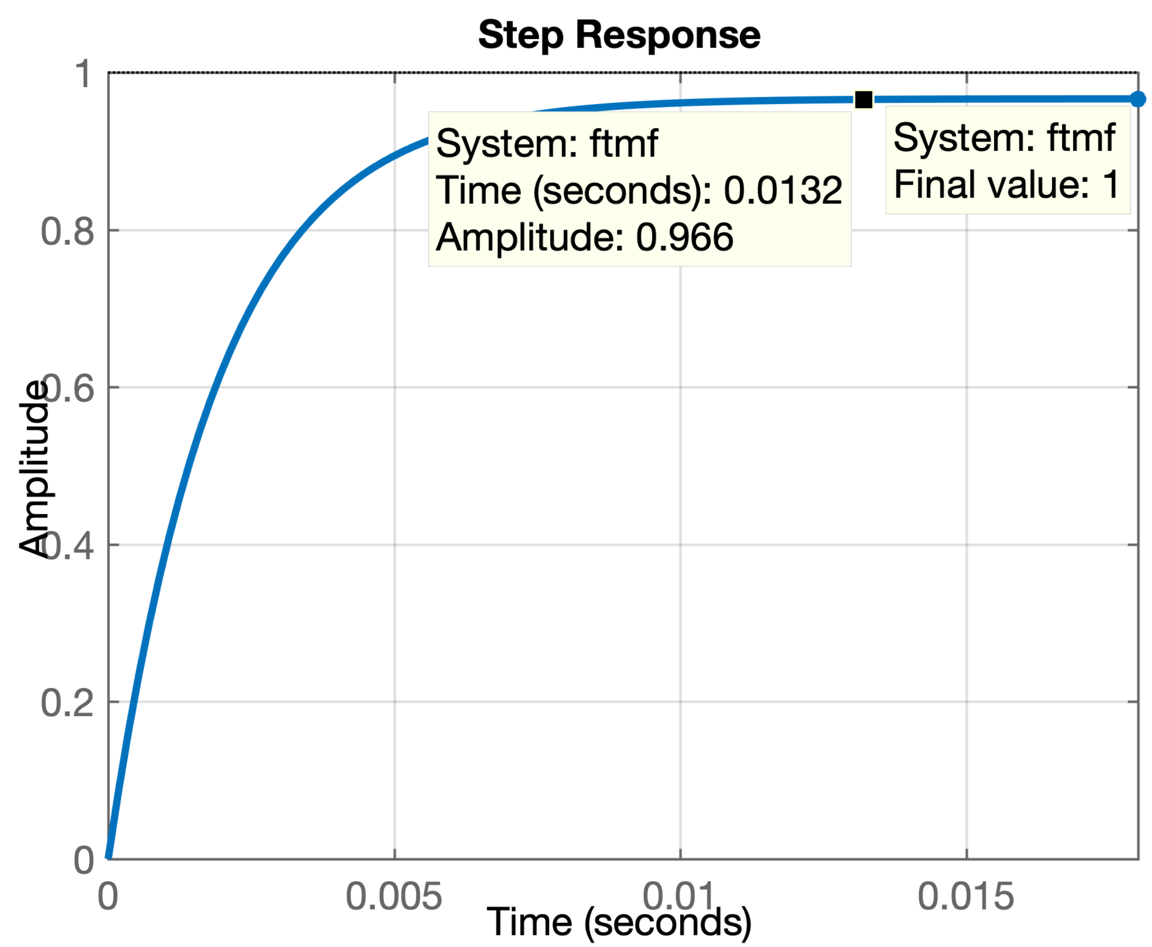
$$FTMA(s) = \frac{500(s+2)(s+5)(s+6)}{s(s+8)(s+10)(s+12)}$$

Notamos que existe 1 integrador neste processo (tipo 1).

$$e_{\text{step}}(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

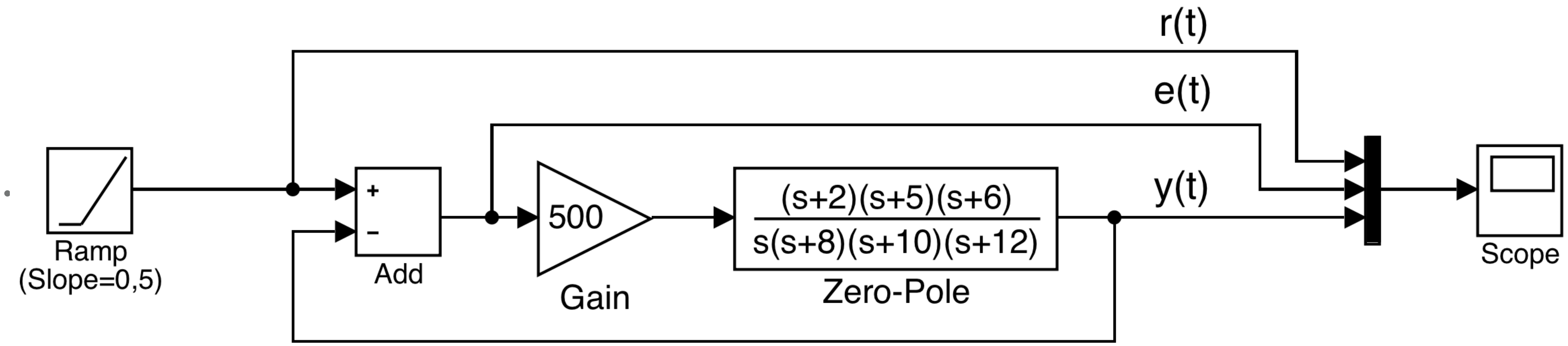
$$e_{\text{ramp}}(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0,032$$

$$e_{\text{parabola}}(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty$$




```
>> ftmf=feedback(K*G,1)
ftmf =
      500 s^3 + 6500 s^2 + 26000 s + 30000
  ------------------------------------------
  s^4 + 530 s^3 + 6796 s^2 + 26960 s + 30000
Continuous-time transfer function.
>> figure; step(ftmf)
```

EXEMPLOS

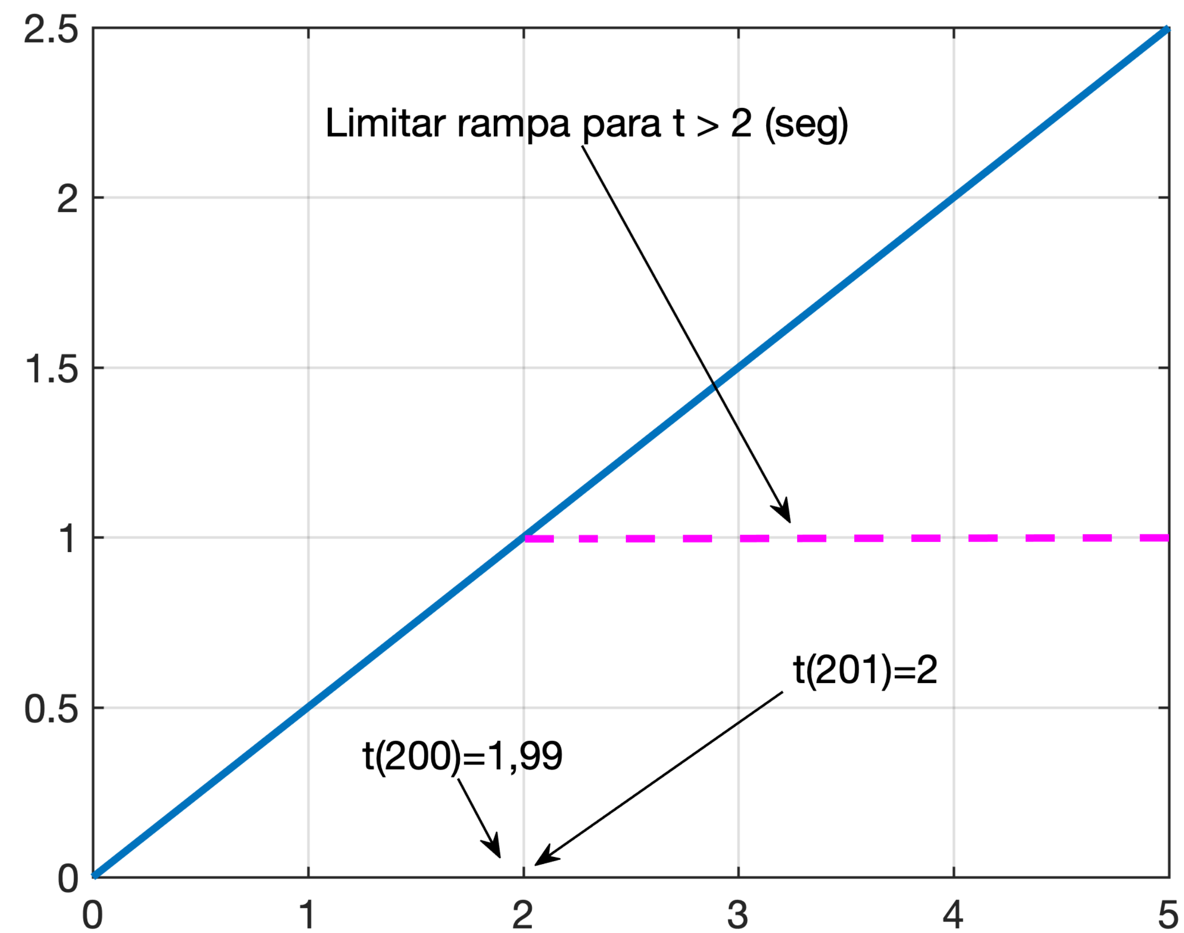


$$FTMA(s) = K \cdot G(s)$$

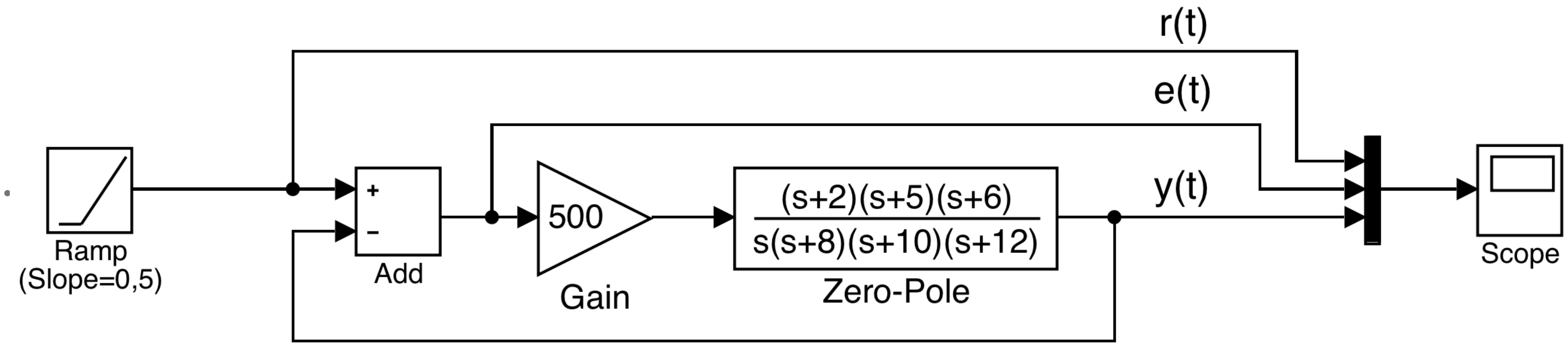
$$FTMA(s) = \frac{500(s+2)(s+5)(s+6)}{s(s+8)(s+10)(s+12)}$$

Notamos que existe 1 integrador neste processo (tipo

```
MATLAB: Simulando entrada rampa (limitada)
Obs.: aproveitando dados anteriores…
>>  % cria vetor tempo, variado de 0,01 segundos
>> t=0:1e-2:5;
>> u=0.5*t; % cria vetor rampa (sem limite)
>> plot(t,u)
>> grid
```



EXEMPLOS

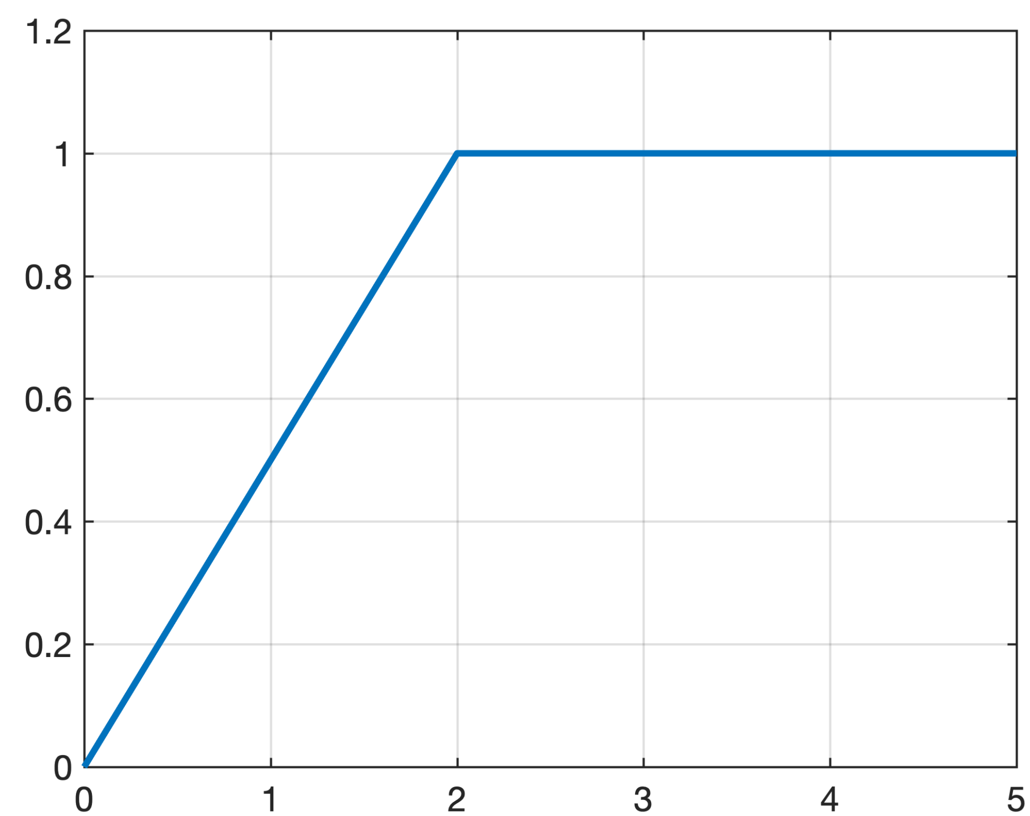


$$FTMA(s) = K \cdot G(s)$$

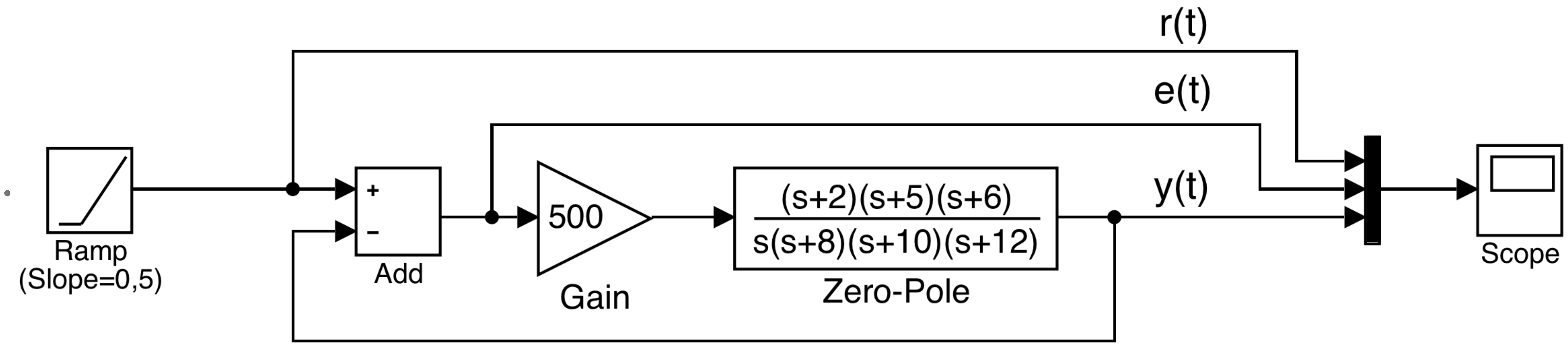
$$FTMA(s) = \frac{500(s+2)(s+5)(s+6)}{s(s+8)(s+10)(s+12)}$$

Notamos que existe 1 integrador neste processo (tipo 1).

```
MATLAB: Simulando entrada rampa (limitada)
Obs.: aproveitando dados anteriores…
>>  % cria vetor tempo, variado de 0,01 segundos
>> t=0:1e-2:5;
>> u=0.5*t; % cria vetor rampa (sem limite)
>> plot(t,u)
>> grid
>> % limitando a rampa à 1,0 de amplitude
>> % pelo gráfico ocorre em t=2,0 segundos
>> 2/1e-2 % descobrindo posição no vetor
ans =   200
>> t(200)
ans =    1.9900
>> t(201)
ans =     2
>> size(u)
ans =     1   501
>> u(201:501)=1; % limitando a rampa
>> plot (t,u)
```



EXEMPLOS

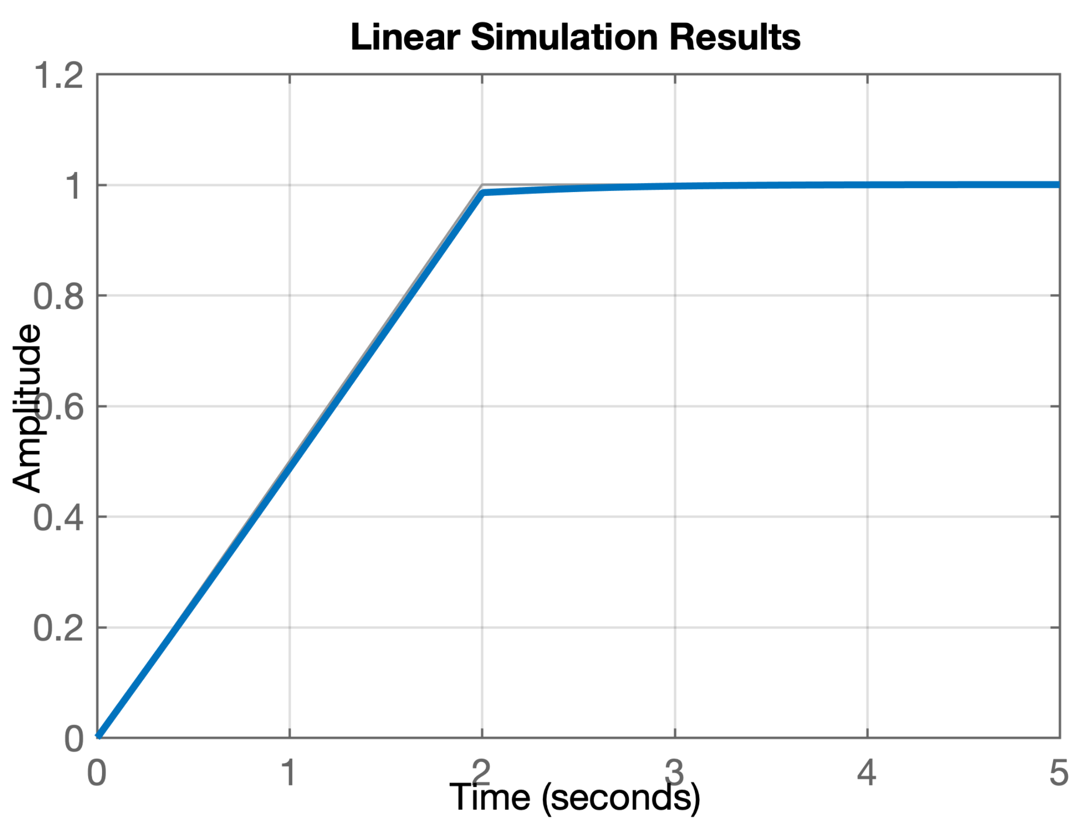


$$FTMA(s) = K \cdot G(s)$$
$$FTMA(s) = \frac{500(s+2)(s+5)(s+6)}{s(s+8)(s+10)(s+12)}$$

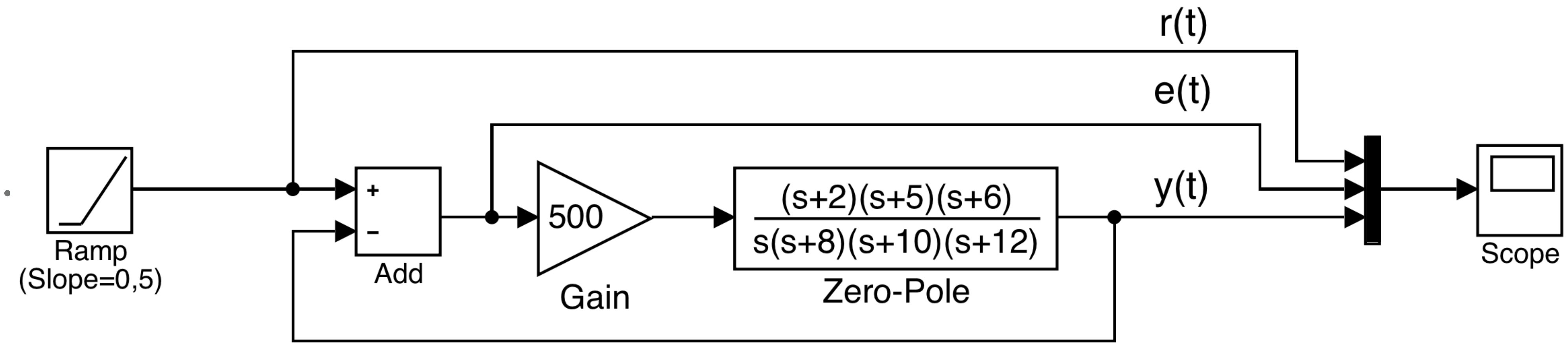
Notamos que existe 1 integrador neste processo (tipo 1).

```
MATLAB: Simulando entrada rampa (limitada)
Obs.: aproveitando dados anteriores…

>> figure; lsim(ftmf,u,t)
>> axis([0 5 0 1.2])
>> grid
```

Resultado com K=500



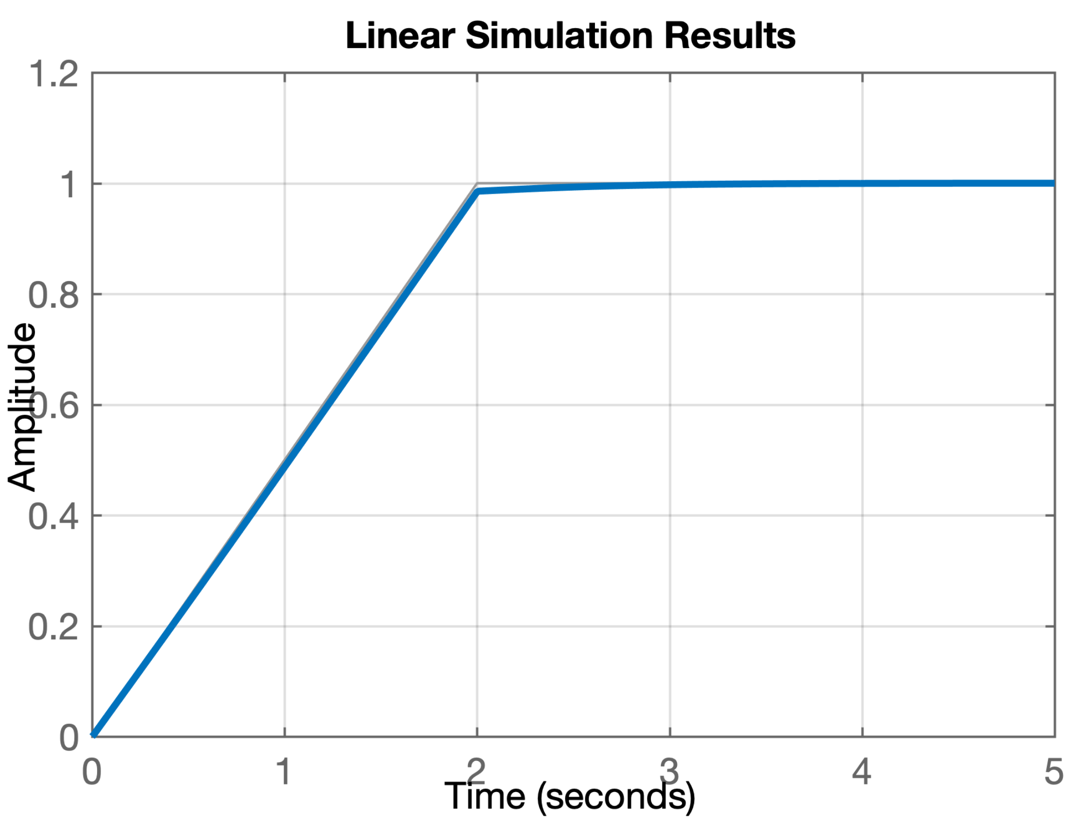
EXEMPLOS



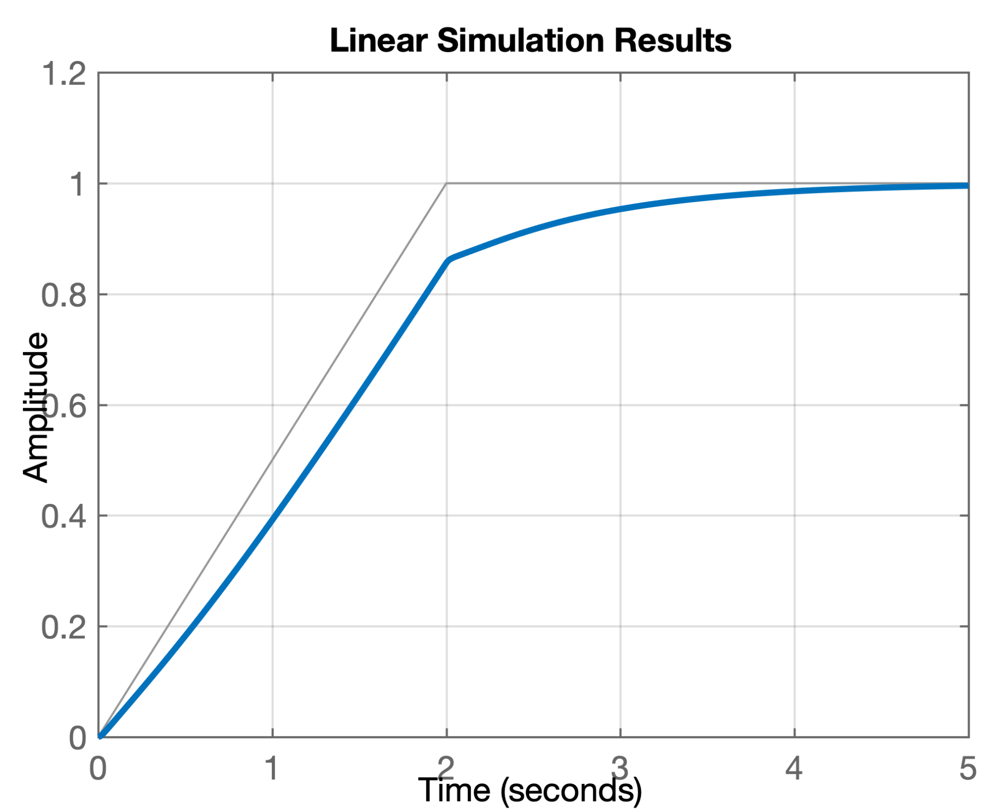
$$FTMA(s) = K \cdot G(s)$$
$$FTMA(s) = \frac{500(s+2)(s+5)(s+6)}{s(s+8)(s+10)(s+12)}$$

Notamos que existe 1 integrador neste processo (tipo 1).

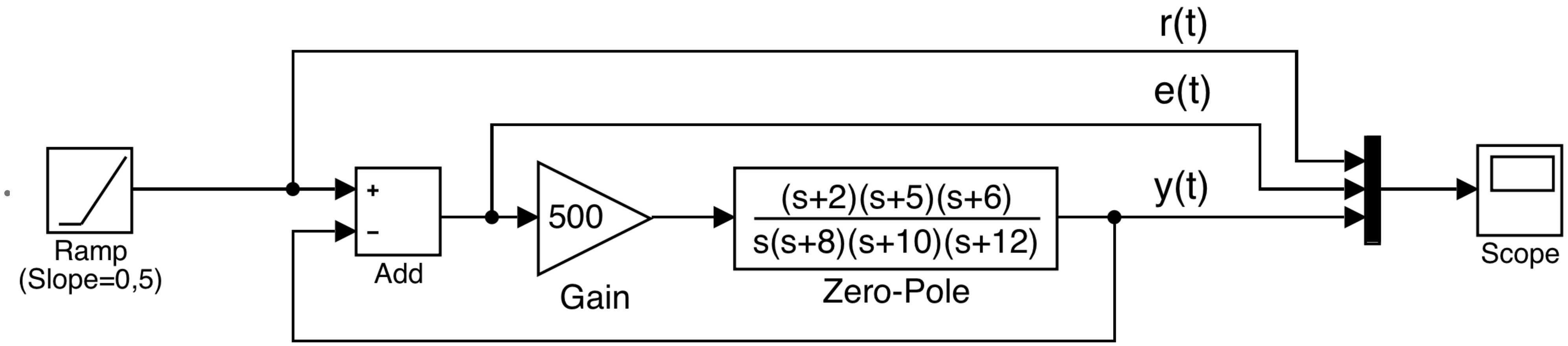
Resultado com K=500



Resultado com K=50



EXEMPLOS

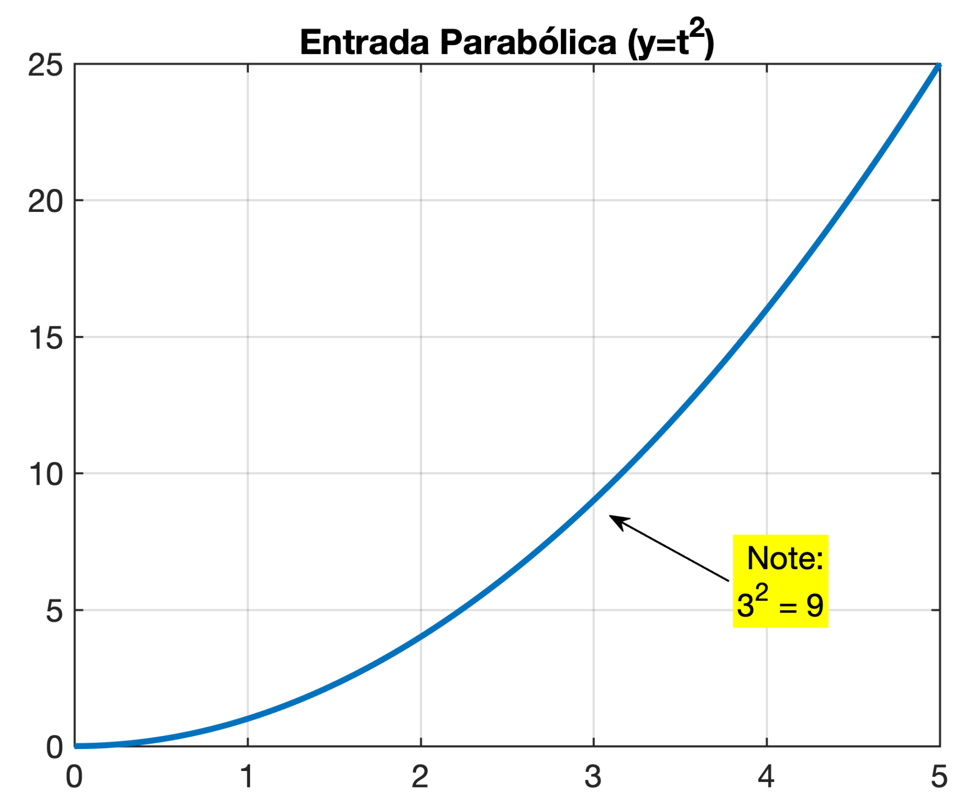


$$FTMA(s) = K \cdot G(s)$$

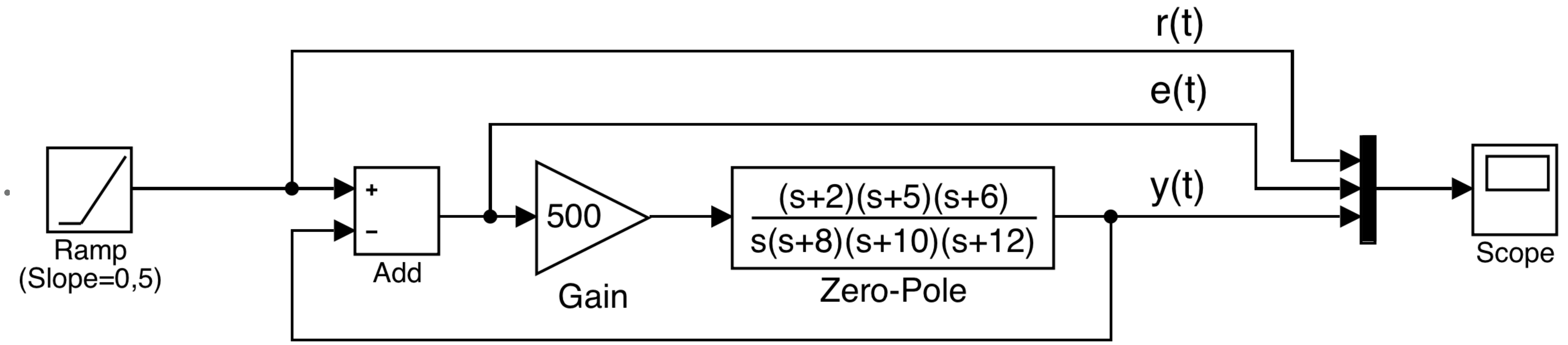
$$FTMA(s) = \frac{500(s+2)(s+5)(s+6)}{s(s+8)(s+10)(s+12)}$$

Notamos que existe 1 integrador neste processo (tipo 1).

```
MATLAB: Simulando entrada parabólica

>> parabola=t.^2;
>> plot(t,parabola)
>> grid
```



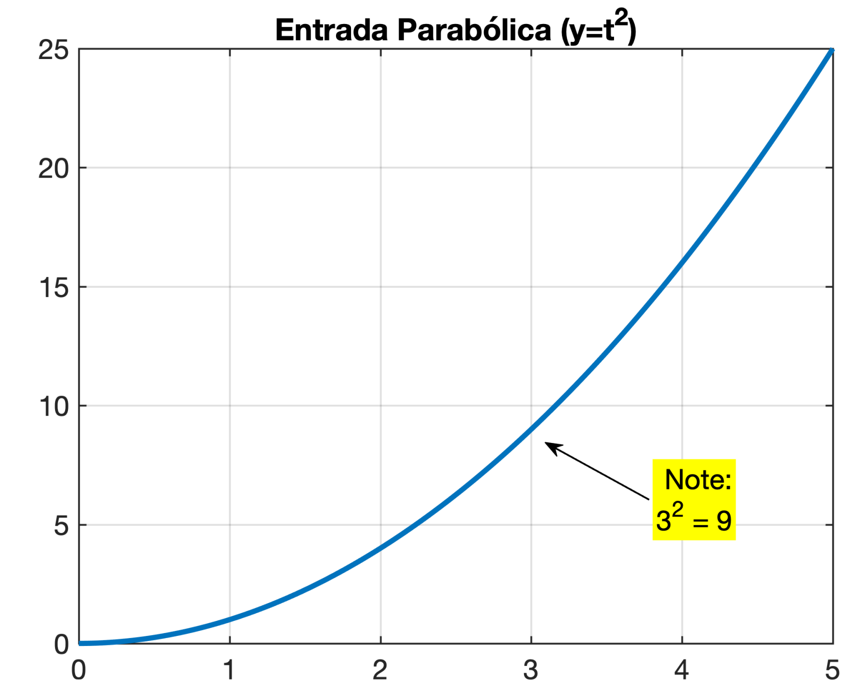
EXEMPLOS



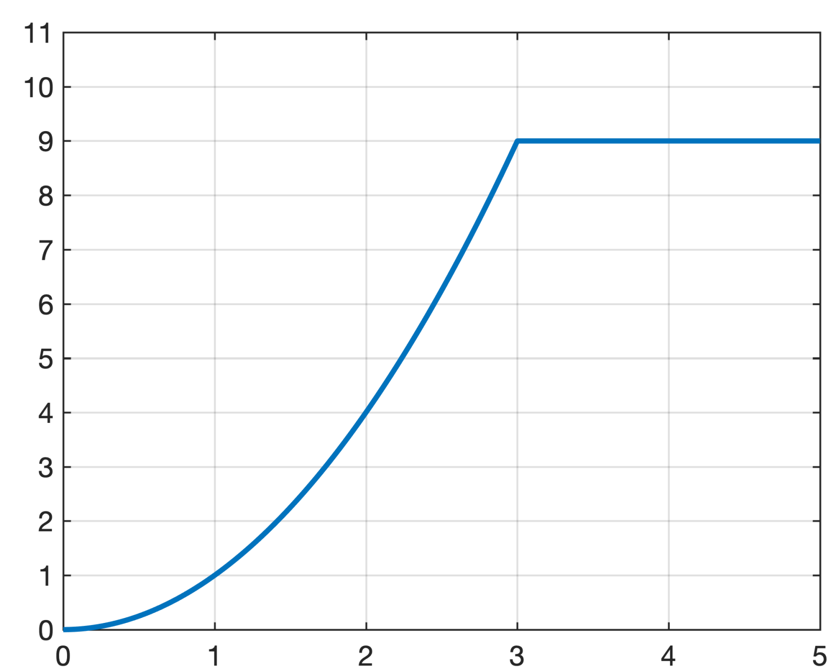
$$FTMA(s) = K \cdot G(s)$$

$$FTMA(s) = \frac{500(s+2)(s+5)(s+6)}{s(s+8)(s+10)(s+12)}$$

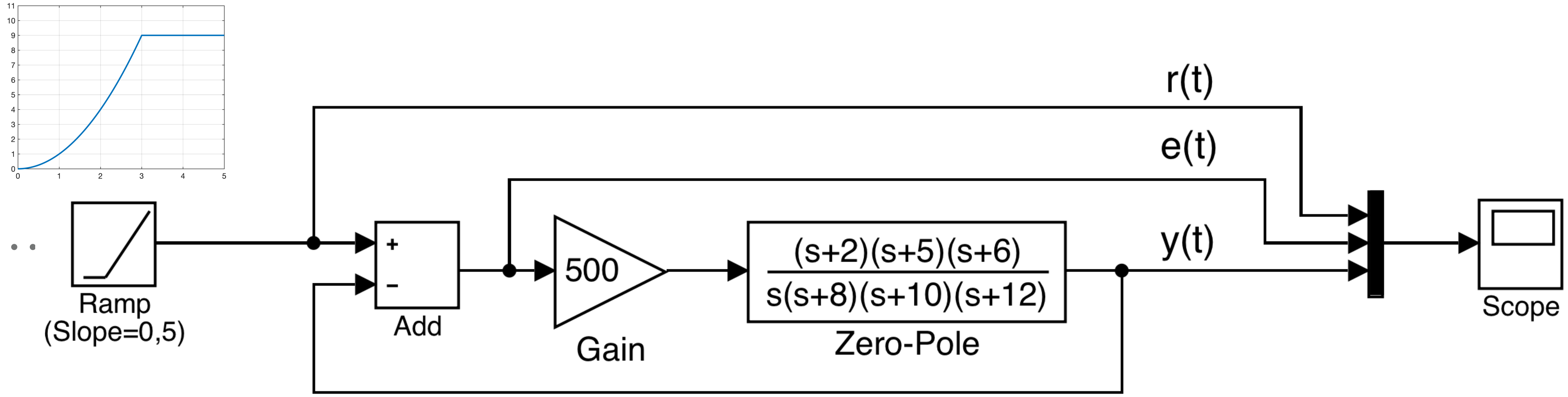
Notamos que existe 1 integrador neste processo (tipo 1).




```
MATLAB: Simulando entrada parabólica

>> parabola=t.^2;
>> plot(t,parabola)
>> grid
>> % Limitando parabóla a partir de t > 3,0 (seg)
>> 3/1e-2
ans =   300
>> t(300)
ans =    2.9900
>> t(301)
ans =     3
>> parabola(301:501)=9;
>> figure; plot(t,parabola)
>> axis([0 5 0 11])
>> grid
```



EXEMPLOS



$$FTMA(s) = K \cdot G(s)$$

$$FTMA(s) = \frac{500(s+2)(s+5)(s+6)}{s(s+8)(s+10)(s+12)}$$

Notamos que existe 1 integrador neste processo (tipo 1).

```
MATLAB: Resposta entrada parabólica

>> % Verificando valor de K:
>> K
K =    50
>> figure; lsim(ftmf,parabola,t)
>> axis([0 5 0 11])
>> grid
```