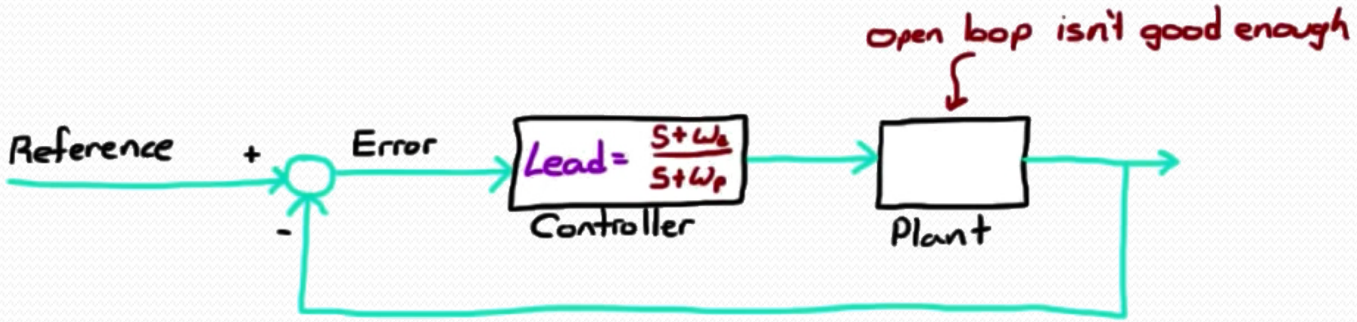
Projeto baseado em Resposta em Frequência

Controle Automático II
Prof. Fernando Passold
Nov-2009; Jun-2020

4ª-Parte:
Projeto Compensador por Avanço/Atraso (Lead/Lag)
Last Updated: 24.jun.2020

Comparativo: Projeto usando LR x Projeto no Domínio Frequência:



Root locus [s-domain]

- Convert requirements into pole locations
- Place zero and pole to move the root locus to that point
- Steady state Error

Bode Plot [frequency domain]

- Convert requirements into frequency domain
  - Phase margin
  - Gain margin
  - Gain crossover
  - Bandwidth
  - Zero-frequency magnitude
- Steady State Error

Ref.: YouTube: Control System Lecture Videos ⟶ https://www.youtube.com/playlist?list=PLUMWjy5jgHK3j74Z5Tq6Tso1fSfVWZC8L (Brian Douglas / 1.231.138 visualizações (7.12.2020) / Última atualização: 24 jul 2014)

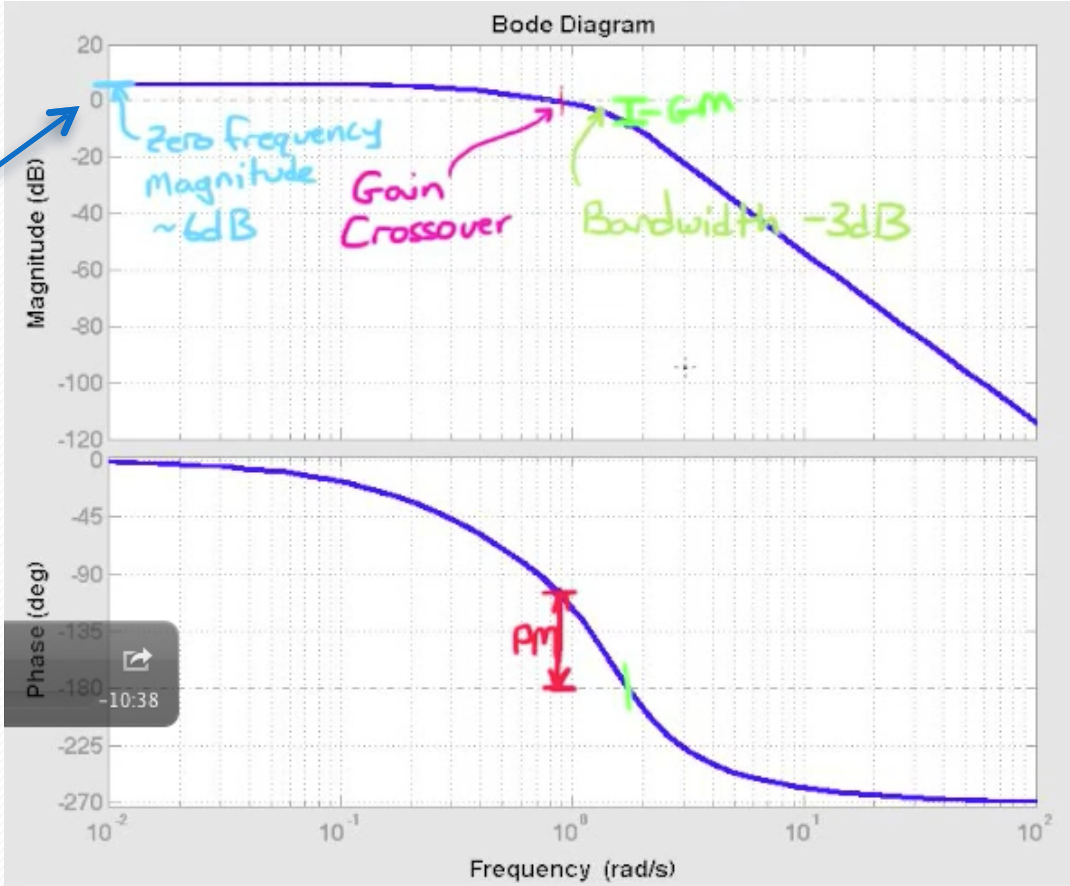
Root Locus [s-domain]

- Convert requirements into pole locations
- Place zero and pole to move the root locus to that point
- Steady state Error

Bode Plot [frequency domain]

- Convert requirements into frequency domain
  - Phase margin
  - Gain margin
  - Gain crossover
  - Bandwidth
  - Zero-frequency magnitude
  - Steady State Error

“DC gain”



Objetivos

$$G(s) = \frac{w_p}{w_z} \cdot \frac{(s + w_z)}{(s + w_p)}$$

$\omega_z < \omega_p$ $\omega_z > \omega_p$

$$G_c(s) = \underbrace{\frac{(1+\alpha T_1 s)}{(1+T_1 s)}}_{\text{Atraso De Fase}} \cdot \underbrace{\frac{(1+T_2 s)}{(1+\beta T_2 s)}}_{\text{Avanço De Fase}}$$

- Como usar resposta em frequência:
  - Para ajustar o ganho de forma a respeitar especificações para a resposta transitória;
  - Como usar a resposta em frequência para melhorar o erro estacionário do sistema;
  - Como usar a resposta em frequência para melhorar a resposta transitória do sistema;
  - Como usar a resposta em frequência para melhorar tanto o erro estacionário quanto a resposta transitória.

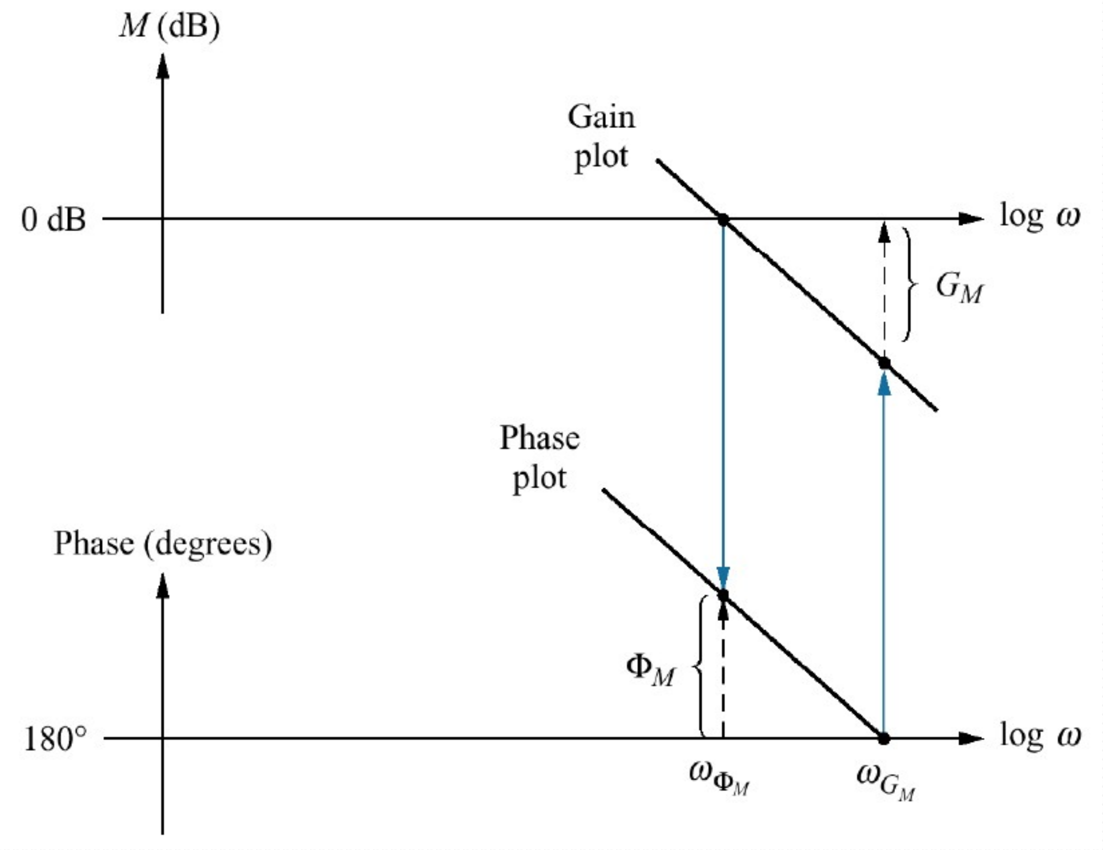
Introdução

- Estabilidade e projeto da resposta transitória mediante ajuste de ganho:
  - Métodos baseados em resposta em frequência, diferentes do método baseado em RL, podem ser realizados sem a obrigatoriedade de una ferramenta computacional usando aproximações assintóticas.

- O projeto da resposta transitória mediante compensação em cascata:
  - Métodos baseados em resposta em frequência não são tão intuitivos como os baseados em RL.

- Projeto dos erros de estado estacionário mediante compensação em cascata:
  - Métodos baseados em resposta em frequência facilitam o projeto de compensadores derivativos de forma a acelerar a resposta do sistema ao mesmo tempo respeitando requerimentos de erros de estado estacionário.

Estabilidade, Margem de Ganho e Margem de Fase através do Diagrama de Bode...



Relação entre Transitórios de Malha Fechada & Resposta em Frequência de malha aberta

- Através do Diagrama de Bode de um sistema ainda em malha aberta, G(s), se pode prever o porcentual de sobrepasso, %OS, do mesmo sistema em malha fechada, T(s):
  - Este valor se pode obter a partir da margem de fase do sistema em malha aberta:

$$G(s) \xrightarrow{\text{Bode}} \Phi_M$$

$$\Phi_M \rightarrow \zeta$$

$$T(s) \leftarrow \zeta \rightarrow \%OS = e^{-\left(\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}\right)} \times 100$$

Se é possível variar ΦM, então se pode variar o %OS!

$$\Phi_M = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}$$

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}$$

Formulário (Revisão)...

- Determinação de Margem de Fase desejada em função do fator de amortecimento, ζ , ou em função de %OS:

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}$$

$$\Phi_M = \tan^{-1}\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}$$

- Largura de banda em malha fechada de forma a cumprir com tempo de assentamento (t_s), tempo do pico (t_p) ou tempo de subida (t_r):

$$w_{BW} = w_n\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

$$w_n = \frac{4}{T_p\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$w_n = \frac{4}{T_s\zeta} \quad \xleftarrow{0<\zeta<0,9} \quad w_n = \frac{-\ln\left(0,02\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{T_s\zeta}$$

- Ajuste do ganho, K, do sistema não compensado para um valor que cumpra o erro estacionário especificado:

$$e_{Step}(\infty) = \frac{1}{1+K_P} \qquad e_{Ramp}(\infty) = \frac{1}{K_V} \qquad e_{Parab.}(\infty) = \frac{1}{K_a}$$

$$K_P = \lim_{s\to 0} G(s) \qquad K_V = \lim_{s\to 0} sG(s) \qquad K_A = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

Formulário (Revisão)...

- Largura de banda em malha fechada de forma a cumprir com tempo de assentamento (t_s), tempo do pico (t_p) ou **tempo de subida (*t_r*)**:

$$w_{BW} = w_n \sqrt{\left(1-2\zeta^2\right) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

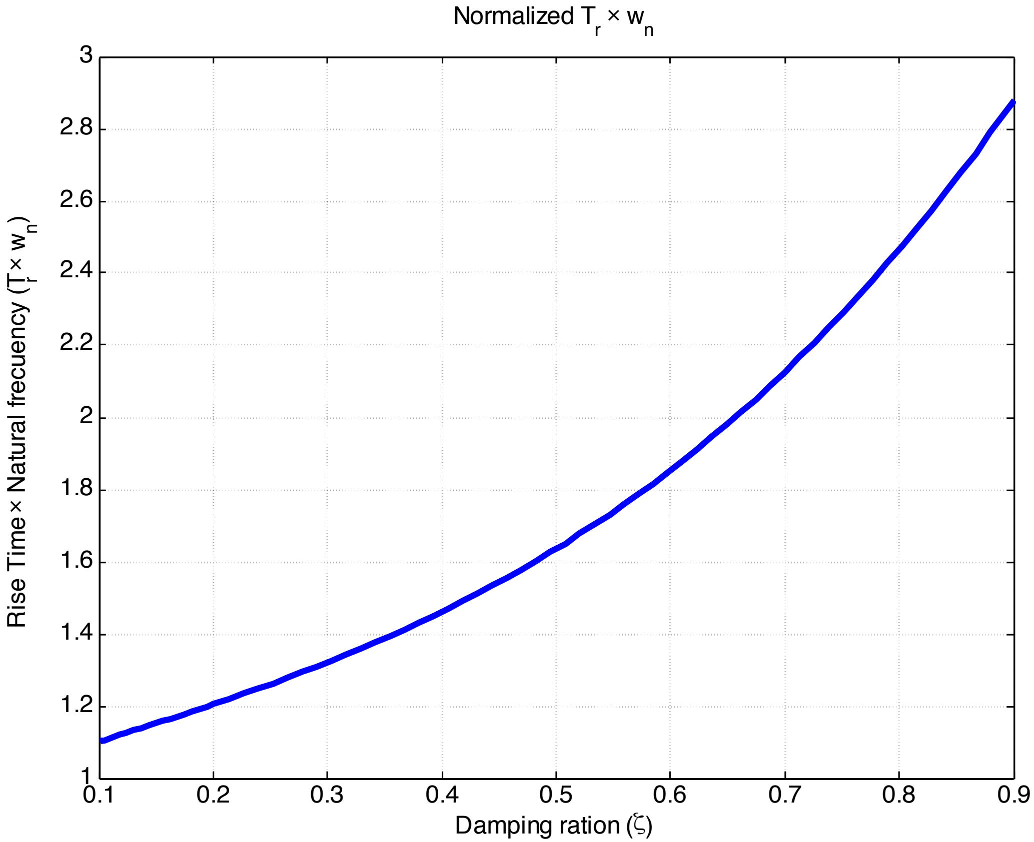
$$w_n = \frac{4}{T_p \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$w_n = \frac{4}{T_s \zeta}$$ ← 0<ζ<0,9

$$w_n = \frac{-\ln\left(0{,}02\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{T_s \zeta}$$

$$w_n T_R = 1{,}76\zeta^3 - 0{,}417\zeta^2 + 1{,}039\zeta + 1$$

Max{error}=0,5% (0<ζ<0,9)



\>> fplot(@(z) 1.76*z^3-0.417*z*z+1.039*z+1, [0.1 0.9])

Projeto de Controlador por Atraso-Avanço

Projeto do Compensador...

Lead Compensator

$$\frac{\frac{s}{\omega_z}+1}{\frac{s}{\omega_p}+1} \quad \text{or} \quad \boxed{\frac{\omega_p}{\omega_z}}\,\frac{s+\omega_z}{s+\omega_p}$$

Gain K

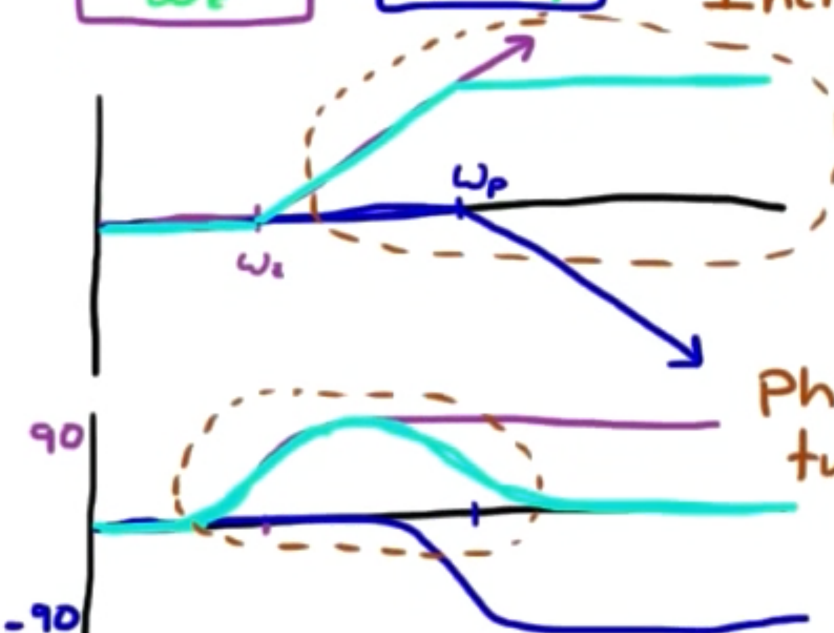
- 1 pole & 1 zero
- $\omega_z < \omega_p$

Lag Compensator

$$\frac{\frac{s}{\omega_z}+1}{\frac{s}{\omega_p}+1} \quad \text{or} \quad \frac{\omega_p}{\omega_z}\cdot\frac{s+\omega_z}{s+\omega_p}$$

- 1 pole & 1 zero
- $\omega_z > \omega_p$

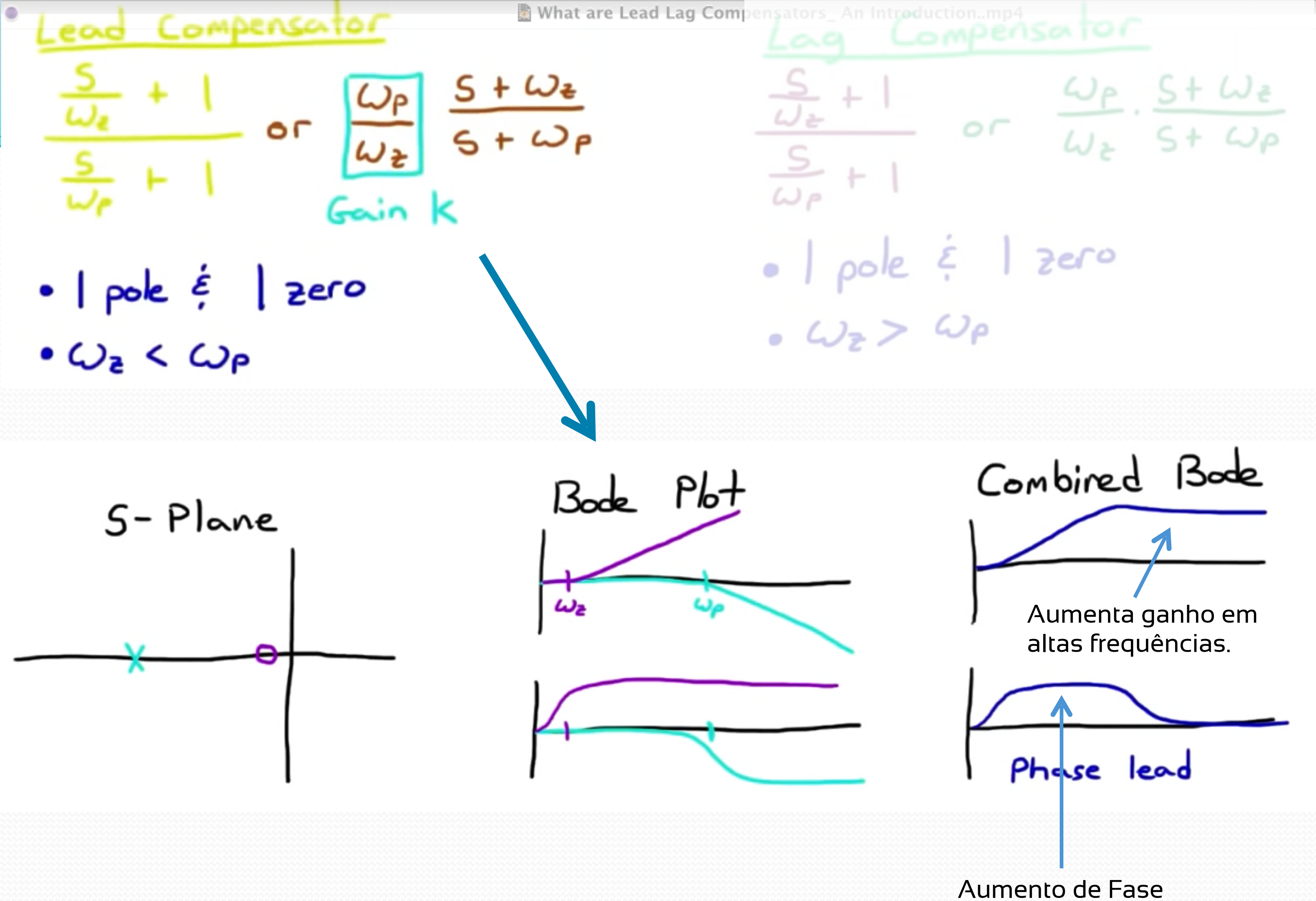
$$\boxed{\frac{s+\omega_z}{\omega_z}}\cdot\boxed{\frac{\omega_p}{s+\omega_p}}$$



Increased gain at high frequencies

But less than real zero alone = less noise amplification

Phase lead between the two corner frequencies


What are Lead Lag Compensators_ An Introduction..mp4
Lead Compensator
$\dfrac{\frac{s}{\omega_z}+1}{\frac{s}{\omega_p}+1}$ or $\boxed{\dfrac{\omega_p}{\omega_z}}\dfrac{s+\omega_z}{s+\omega_p}$
Gain K
• 1 pole & 1 zero
• $\omega_z < \omega_p$
Lag Compensator
$\dfrac{\frac{s}{\omega_z}+1}{\frac{s}{\omega_p}+1}$ or $\dfrac{\omega_p}{\omega_z}\cdot\dfrac{s+\omega_z}{s+\omega_p}$
• 1 pole & 1 zero
• $\omega_z > \omega_p$
S- Plane
Bode Plot
ω_z
ω_p
Combined Bode
Aumenta ganho em altas frequências.
Phase lead
Aumento de Fase

Lead Compensator

$$\frac{\frac{s}{\omega_z}+1}{\frac{s}{\omega_p}+1} \quad \text{or} \quad \boxed{\frac{\omega_p}{\omega_z}} \frac{s+\omega_z}{s+\omega_p}$$

Gain K

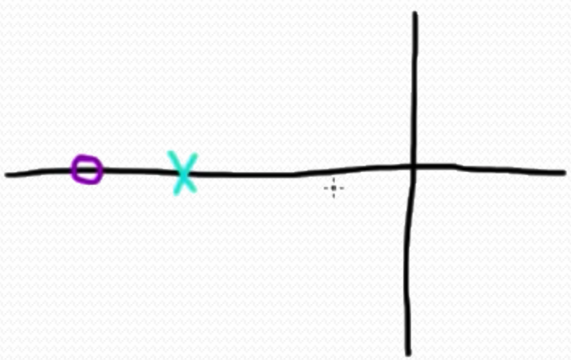
- 1 pole & 1 zero
- $\omega_z < \omega_p$

Lag Compensator

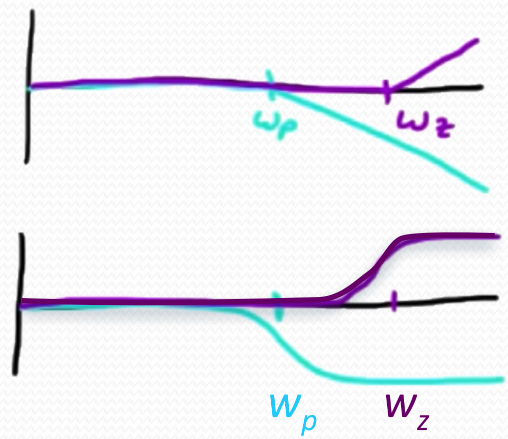
$$\frac{\frac{s}{\omega_z}+1}{\frac{s}{\omega_p}+1} \quad \text{or} \quad \frac{\omega_p}{\omega_z} \cdot \frac{s+\omega_z}{s+\omega_p}$$

- 1 pole & 1 zero
- $\omega_z > \omega_p$

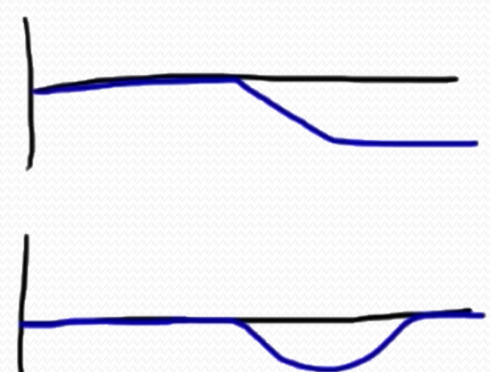
S-Plane



Bode Plot



Combined Bode



Phase lag

Efeito do Lead-Lag:

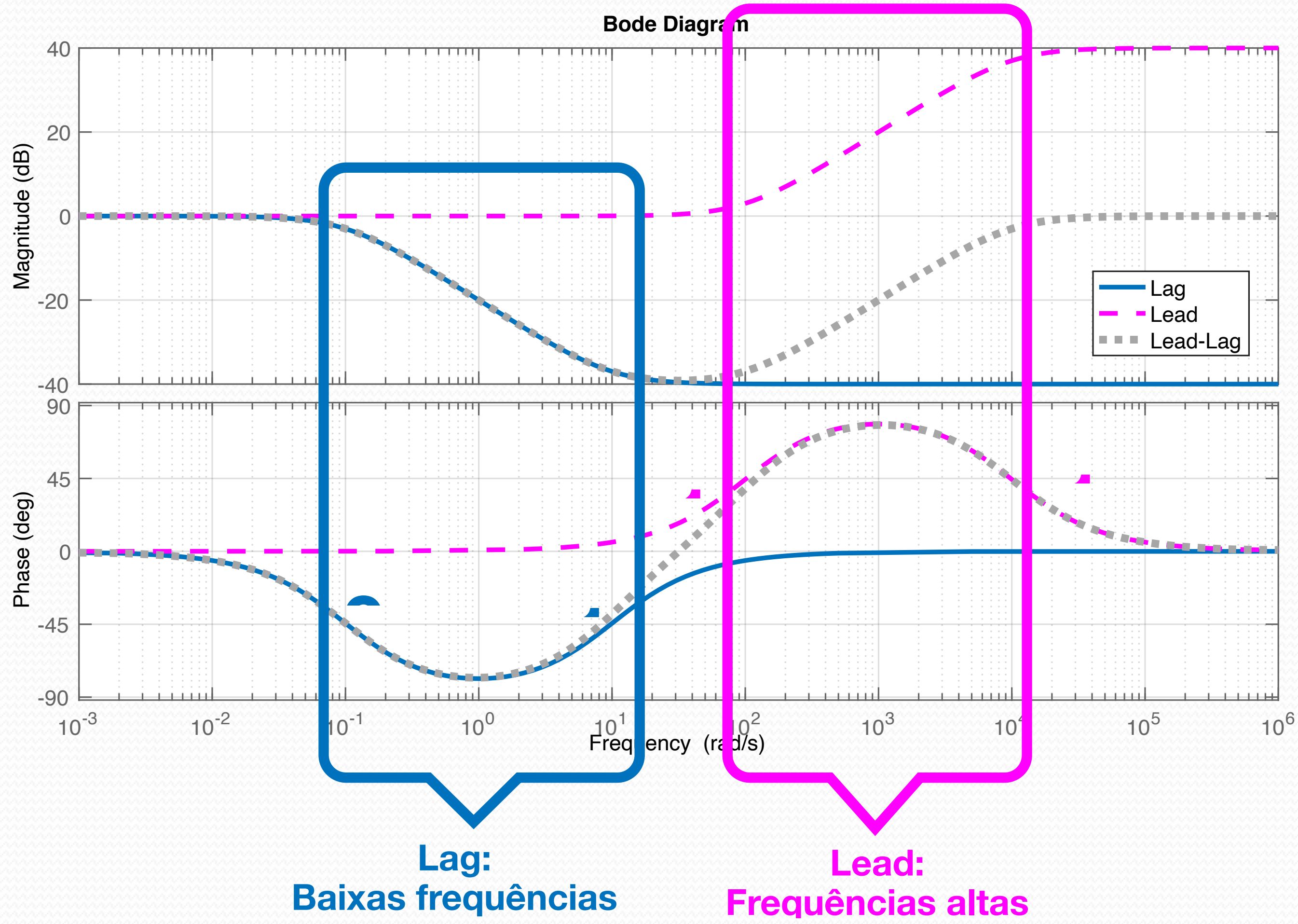
```
>>
G_lag=tf((0.1/10)*[1
10],[1 0.1]);
>> zpk(G_lag)

  0.01 (s+10)
  -----------
    (s+0.1)

>>
G_lead=tf((10000/100
)*[1 100],[1 10000])
>> zpk(G_lead)

  100 (s+100)
  -----------
   (s+1e04)

>> C=G_lag*G_lead;
>> figure;
bode(G_lag, G_lead,
C)
>> legend('Lag',
'Lead', 'Lead-Lag')
>> grid
```



Lag+Lead (cascata) ou...

$$G(s) = \frac{w_p}{w_z} \cdot \frac{(s+w_z)}{(s+w_p)}$$

$$w_z > w_p \qquad\qquad w_z < w_p$$

- Opção 1:

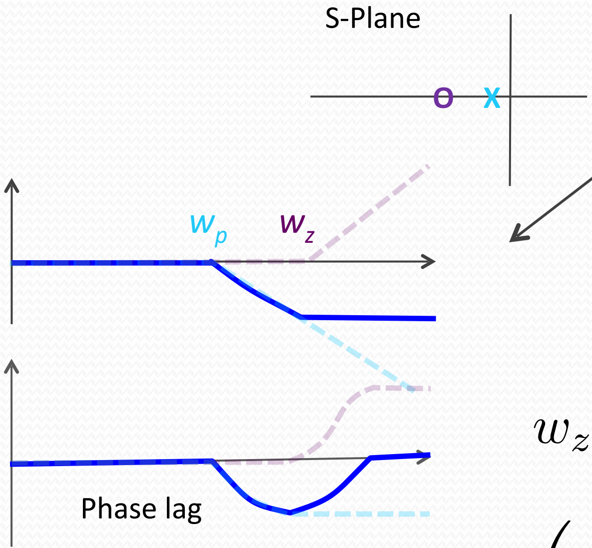
$$G_C(s) = \underbrace{\left(\alpha \cdot \frac{s + \frac{1}{T_{Lag}}}{s + \frac{1}{\alpha\, T_{Lag}}} \right)}_{G_{Lag}(s)} \underbrace{\left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{s + \frac{1}{T_{Lead}}}{s + \frac{1}{\beta\, T_{Lead}}} \right)}_{G_{Lead}(s)}$$

$$\alpha > 1 \qquad\qquad \beta < 1$$

- Opção 2:

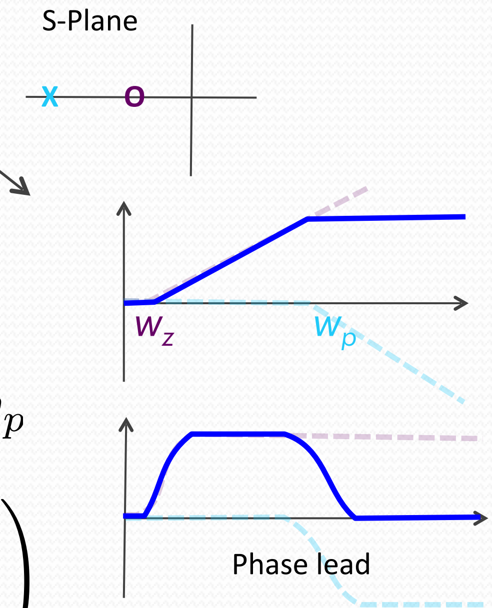
$$G_C(s) = \underbrace{\left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\gamma\, T_2}} \right)}_{G_{Lag(s)}} \underbrace{\left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right)}_{G_{Lead}(s)} \qquad \gamma > 1$$

- Uma única rede de atraso-avanço para realização do controlador → economia, montagem mais simples.
  (A opção 1 exige um buffer isolador entre a rede de atraso e a rede de avanço).



Lag

Lead



$$G(s) = \frac{w_p}{w_z} \cdot \frac{(s+w_z)}{(s+w_p)}$$

$$w_z > w_p \qquad\qquad w_z < w_p$$

- Opção 1:

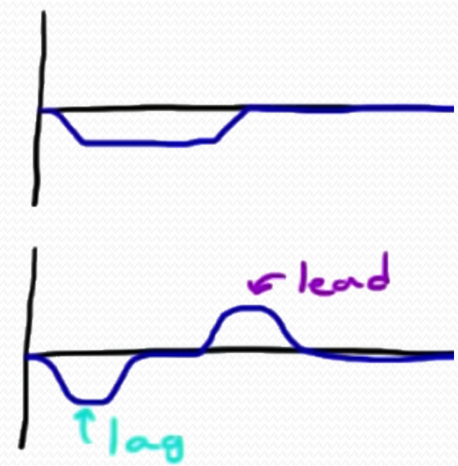
$$G_C(s) = \underbrace{\left(\alpha \cdot \frac{s+\frac{1}{T_{Lag}}}{s+\frac{1}{\alpha\, T_{Lag}}}\right)}_{G_{Lag}(s)} \underbrace{\left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{s+\frac{1}{T_{Lead}}}{s+\frac{1}{\beta\, T_{Lead}}}\right)}_{G_{Lead}(s)}$$

$$\alpha > 1 \qquad\qquad \beta < 1$$

- Opção 2:

$$G_C(s) = \underbrace{\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\gamma\, T_2}}\right)}_{G_{Lag(s)}} \underbrace{\left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}}\right)}_{G_{Lead}(s)}$$

$$\gamma > 1$$



- Uma única rede de atraso-avanço para realização do controlador → economia, montagem mais simples.
(A opção 1 exige um buffer isolador entre a rede de atraso e a rede de avanço).

Lead Compensator

$$\frac{\frac{s}{\omega_z}+1}{\frac{s}{\omega_p}+1} \quad \text{or} \quad \boxed{\frac{\omega_p}{\omega_z}} \frac{s+\omega_z}{s+\omega_p}$$

Gain K

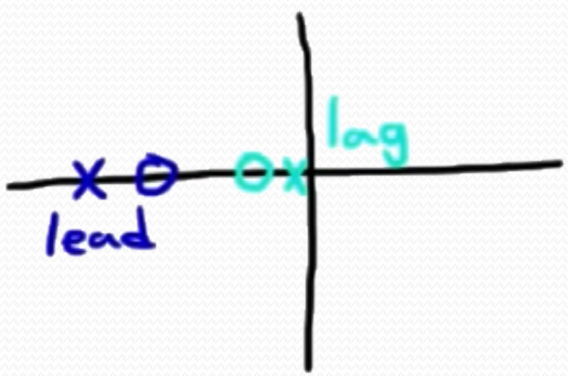
- 1 pole & 1 zero
- $\omega_z < \omega_p$

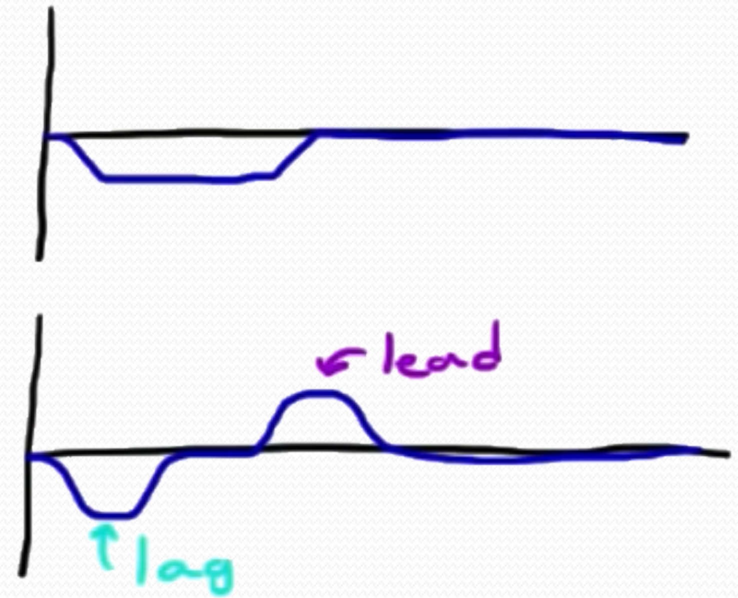
Lag Compensator

$$\frac{\frac{s}{\omega_z}+1}{\frac{s}{\omega_p}+1} \quad \text{or} \quad \frac{\omega_p}{\omega_z} \cdot \frac{s+\omega_z}{s+\omega_p}$$

- 1 pole & 1 zero
- $\omega_z > \omega_p$

what about lead/lag compensators?





Lag+Lead (cascata) ou...

- Opção 1: $$G_C(s) = \underbrace{\frac{1}{\beta}\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta\, T_2}}\right)}_{G_{Lag(s)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{1}{\alpha\, T_1}}\right)}_{G_Lead(s)}$$ $\beta > 1$, $\alpha < 1$

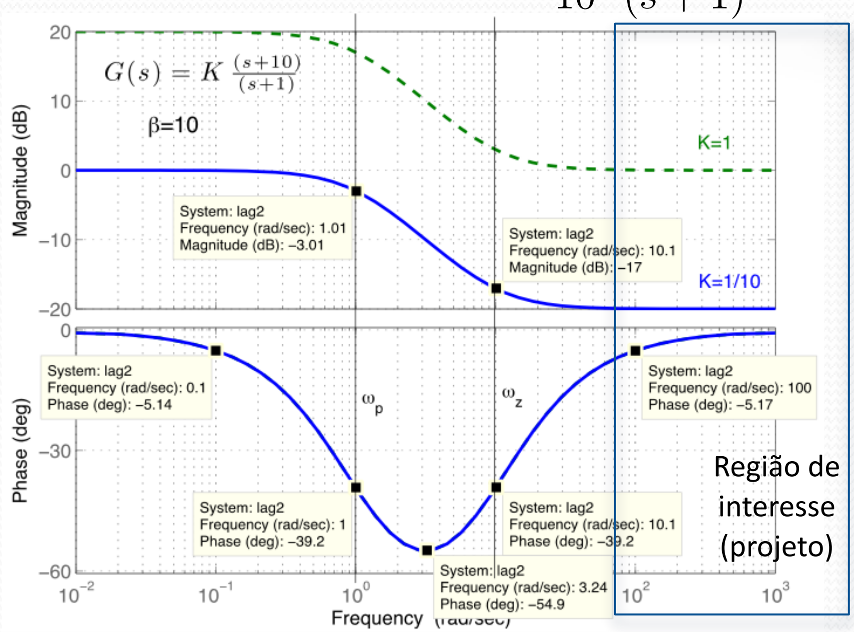
$$G_{Lag}(s) = \frac{1}{\beta}\,\frac{(s+\omega_z)}{(s+\frac{\omega_z}{\beta})} \qquad \omega_p = \frac{\omega_z}{\beta}$$

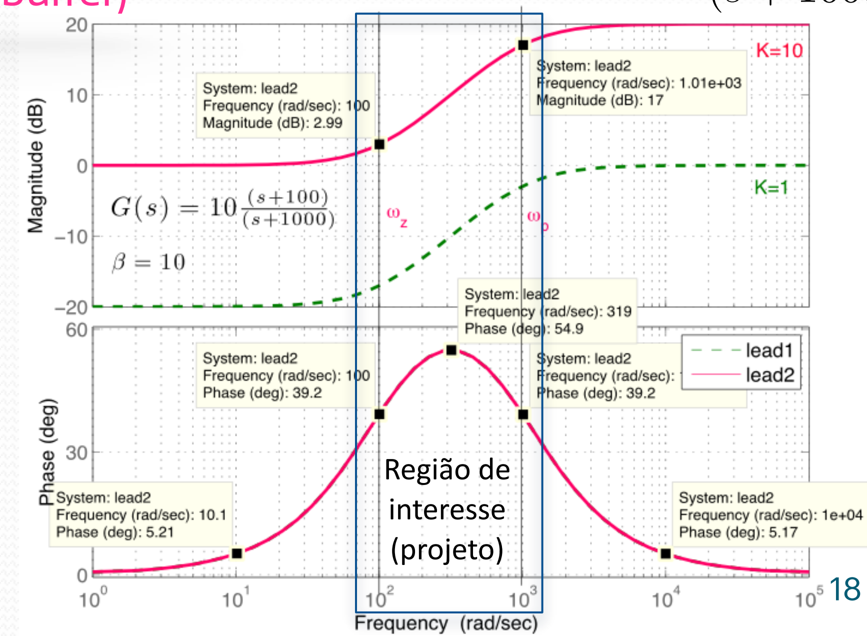
$$G_{Led}(s) = \frac{1}{\alpha}\,\frac{(s+\omega_z)}{(s+\frac{\omega_z}{\alpha})} \qquad \omega_p = \frac{\omega_z}{\alpha}$$

Exemplo: $\beta = 10$ $$G_{Lag}(s) = \frac{1}{10}\,\frac{(s+10)}{(s+1)}$$

Redes Separadas
(por buffer)

$$\alpha = \frac{1}{10} = 0,1$$
$$G_{Lead}(s) = 10\,\frac{(s+100)}{(s+1000)}$$





Códigos MATLAB

- **Lag:**

```
>> num_lag=[1 10];
>> den_lag=[1 1];
>> lag=tf(num_lag,den_lag);
>> zpk(lag)
Zero/pole/gain:
(s+10)
------
(s+1)
>> bode(lag,{0.1,10000})
>> grid
```

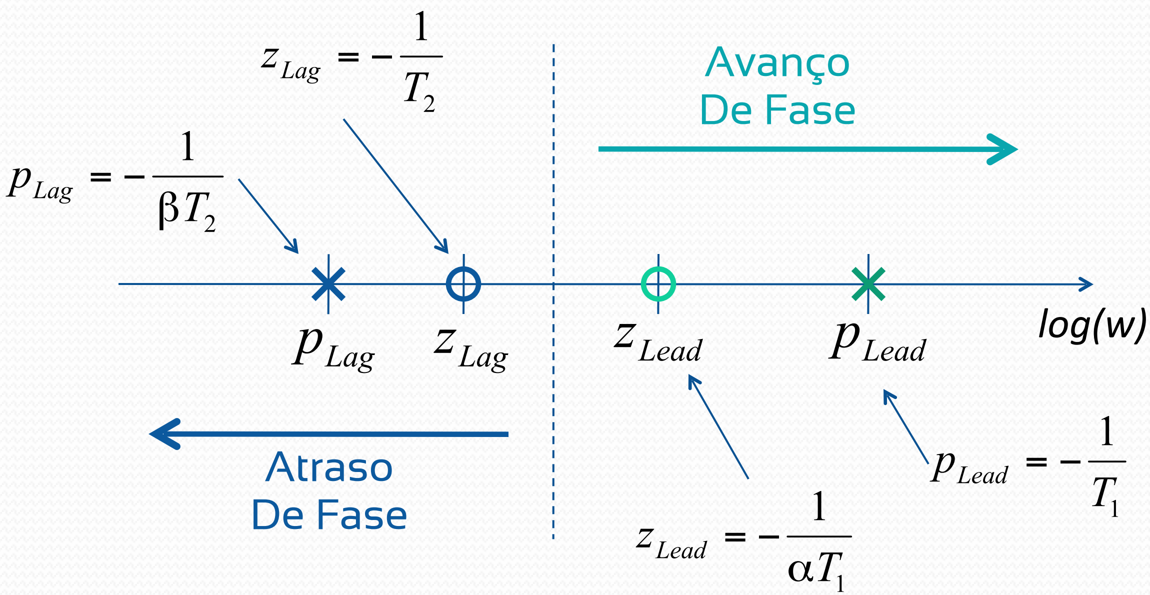
- **Lead:**

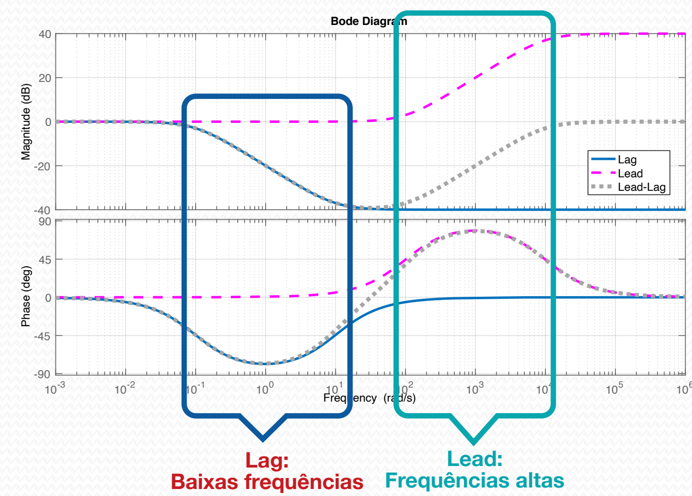
```
>> num_lead=[1 100];
>> den_lead=[1 1000];
>> lead=tf(num_lead,den_lead);
>> zpk(lead)
Zero/pole/gain:
(s+100)
--------
(s+1000)
>>
>> figure; bode(lead,{10 100000})
>> grid
```

Compensador por Atraso-Avanço de Fase

$$G_c(s) = K \cdot \underbrace{\frac{(1+T_2 s)}{(1+\beta T_2 s)}}_{\substack{\text{Atraso} \\ \text{de Fase} \\ \beta>1}} \cdot \underbrace{\frac{(1+\alpha T_1 s)}{(1+T_1 s)}}_{\substack{\text{Avanço de} \\ \text{Fase} \\ \alpha>1}}$$

$$G_c(s) = K \cdot \underbrace{\frac{(s+z_{Lag})}{(s+p_{LAG})}}_{\substack{\text{Atraso} \\ \text{de Fase}}} \cdot \underbrace{\frac{(s+z_{Lead})}{(s+p_{Lead})}}_{\substack{\text{Avanço} \\ \text{de Fase}}}$$

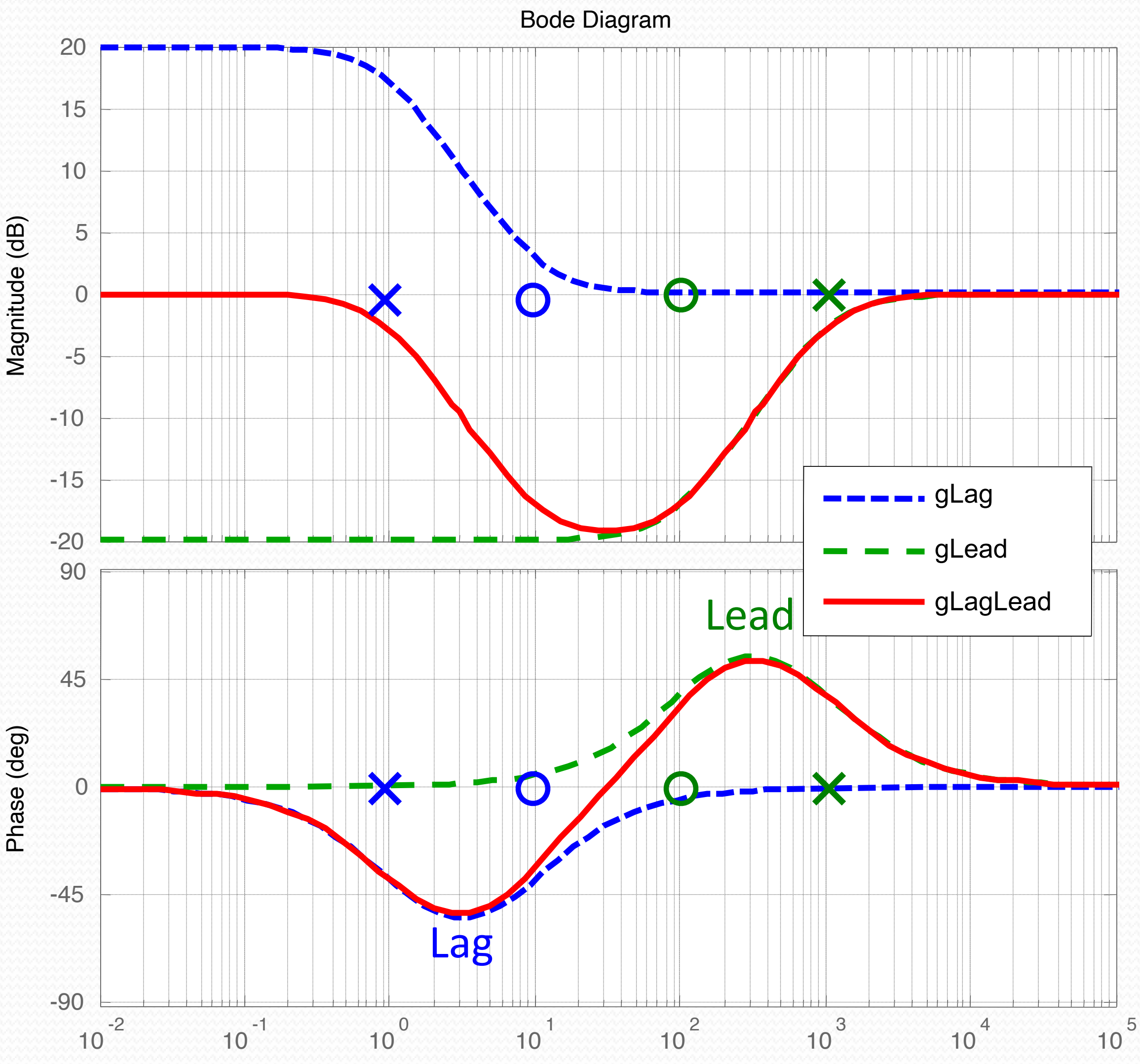




Idéia: Uma única rede passiva:

$$G_C(s) = \underbrace{\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\gamma T_2}}\right)}_{G_{Lag(s)}} \underbrace{\left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}}\right)}_{G_{Lead}(s)}$$

$$\gamma > 1$$



$$G_c(s) = 1 \cdot \underbrace{\frac{(s+10)}{(s+1)}}_{Atraso} \cdot \underbrace{\frac{(s+100)}{(s+1000)}}_{Avanço}$$

$$\gamma = 10$$

Relação com γ = 10:

- Uma década de freq. de separação entre pólos e zeros em cada compensador.
- Na figura (equação adotada), por acaso os compensadores também estão separados por uma década entre seus pólos e zeros.

Compensador por Atraso-Avanço de Fase

$$G_c(s) = K \cdot \underbrace{\frac{(1+T_2 s)}{(1+\beta T_2 s)}}_{\substack{\text{Atraso}\\ \text{de Fase}\\ \beta>1}} \cdot \underbrace{\frac{(1+\alpha T_1 s)}{(1+T_1 s)}}_{\substack{\text{Avanço de}\\ \text{Fase}\\ \alpha>1}}$$

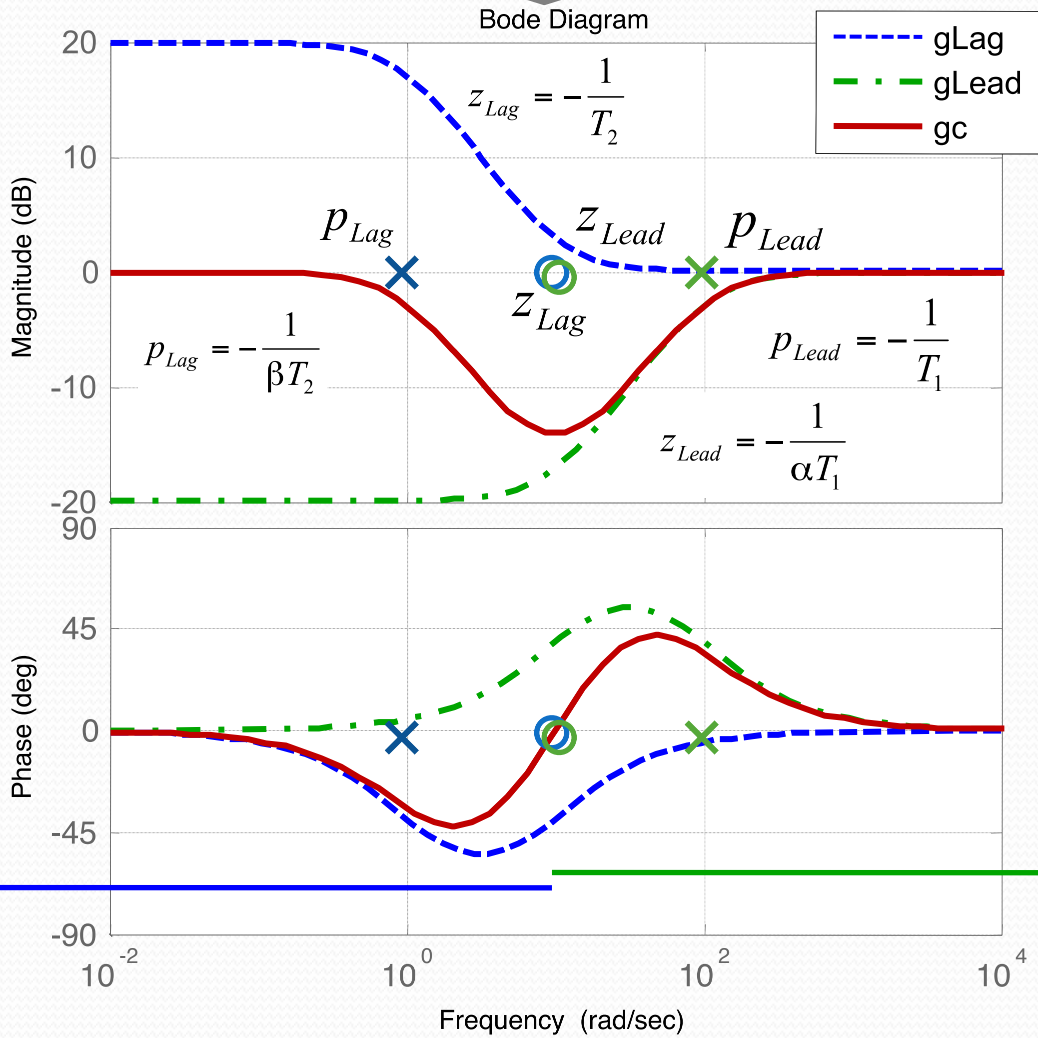
$$G_c(s) = 1 \cdot \underbrace{\frac{(s+10)}{(s+1)}}_{\substack{\text{Atraso}\\ \text{de Fase}}} \cdot \underbrace{\frac{(s+10)}{(s+100)}}_{\substack{\text{Avanço de}\\ \text{Fase}}}$$

$$G_c(s) = K \cdot \underbrace{\frac{(s+z_{Lag})}{(s+p_{LAG})}}_{\substack{\text{Atraso}\\ \text{de Fase}}} \cdot \underbrace{\frac{(s+z_{Lead})}{(s+p_{Lead})}}_{\substack{\text{Avanço de}\\ \text{Fase}}}$$

$$G_{Lag}(s) = \underbrace{\frac{(1+T_2 s)}{(1+\beta T_2 s)}}_{\substack{\text{Atraso}\\ \text{de Fase}}}$$

$$G_{Lag}(s) = \underbrace{\frac{(s+z_{Lag})}{\left(s+\frac{z_{LAG}}{\beta}\right)}}_{\substack{\text{Atraso}\\ \text{de Fase}}}$$

$$dcgain = \beta$$



$$G_{Lead}(s) = \underbrace{\frac{(1+\alpha T_1 s)}{(1+T_1 s)}}_{\substack{\text{Avanço de}\\ \text{Fase}}}$$

$$G_{Lead}(s) = \underbrace{\frac{\left(s+\frac{p_{Lead}}{\alpha}\right)}{(s+p_{Lead})}}_{\substack{\text{Avanço de}\\ \text{Fase}}}$$

$$dcgain = \frac{1}{\alpha}$$

Atraso De Fase

Avanço De Fase

Compensador por Atraso-Avanço

- Opção 2: Uma única rede!

$$G_C(s) = \underbrace{\left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right)}_{G_{Lead}(s)} \underbrace{\left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\gamma T_2}} \right)}_{G_{Lag}(s)}$$

Onde:

$$\gamma > 1$$

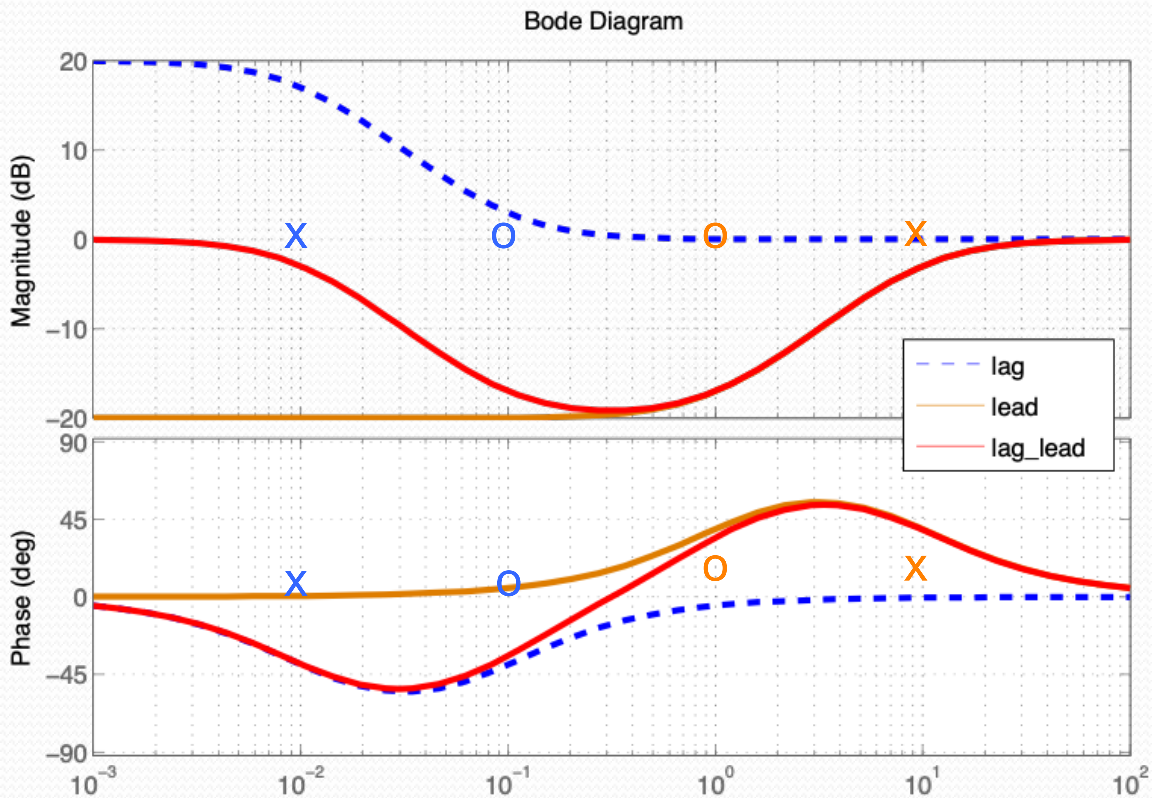
Uma única rede de atraso-avanço para realização do controlador → economia, montagem mais simples.
(A opção 1 exige um buffer isolador entre a rede de atraso e a rede de avanço).

Opção 2:

$$G_C(s) = \underbrace{\left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}}\right)}_{G_{Lead}(s)} \underbrace{\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\gamma T_2}}\right)}_{G_{Lag}(s)}$$

- Exemplo: $G_C(s) = \underbrace{\left(\frac{s+1}{s+\gamma}\right)}_{G_{Lead}(s)} \underbrace{\left(\frac{s+0,1}{s+\frac{0,1}{\gamma}}\right)}_{G_{Lag}(s)}$

$\gamma > 1$



Código MATLAB:

```
>> close all
>> clear all
>> num_lead=[1 1];
>> den_lead=[1 10];
>> lead=tf(num_lead,den_lead);
>> zpk(lead)
Zero/pole/gain:
(s+1)
------
(s+10)
>> num_lag=[1 0.1];
>> den_lag=[1 0.1/10];
>> lag=tf(num_lag,den_lag);
>> zpk(lag)
Zero/pole/gain:
(s+0.1)
--------
(s+0.01)
>>
```

```
>> lag_lead=lag*lead;
>> zpk(lag_lead)
Zero/pole/gain:
 (s+1) (s+0.1)
----------------
(s+10) (s+0.01)
>>
>> bode(lag,lead,lag_lead,{0.001 100})
>> grid
```

Compensador por Atraso-Avanço de Fase

$$G_c(s) = 1 \cdot \underbrace{\frac{(s+10)}{(s+1)}}_{Atraso} \cdot \underbrace{\frac{(s+100)}{(s+1000)}}_{Adelanto}$$

- Usado para melhorar a resposta transitória e diminuir o erro estacionário;
- A ideia aqui é projetar:
  1. O compensador por atraso de fase para componentes de baix Avanço frequência (seu projeto não é crítico)
     ⇒ estabilizar sistema e diminuir erro estacionário:

     (e(∞) < cte ← K_p ou K_v ou K_a);
  2. Projetar o compensador por avanço de fase
     ⇒ cumprir especificações de margem de fase (PM ← ζ, %OS)

- Segue projeto de compensador por atraso-avanço de fase usando una simples rede passiva:

$$G_c(s) = G_{Lead}(s) \cdot G_{Lag}(s) = \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \cdot \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\gamma T_2}} \right) \qquad \gamma > 1$$

Compensador por Atraso-Avanço de Fase

- Segue projeto de compensador por atraso-avanço de fase usando uma simples rede passiva:

$$G_c(s) = G_{Lead}(s) \cdot G_{Lag}(s) = \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \cdot \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\gamma T_2}} \right) \qquad \gamma > 1$$

- Compensador por atraso:

$$G_{Lag}(s) = \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\alpha T_2}}$$

$$G_c(s) = 1 \cdot \underbrace{\frac{(s+10)}{(s+1)}}_{Atraso} \cdot \underbrace{\frac{(s+100)}{(s+1000)}}_{\text{Avanço}}$$

- Compensador por avanço:

$$G_{Lead}(s) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{\beta T_1}}$$

$$\phi_{max} = \sin^{-1}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)$$

$$\beta = \frac{1 - \sin(\varphi_{max})}{1 + \sin(\varphi_{max})}$$

Compensador por Atraso-Avanço de Fase

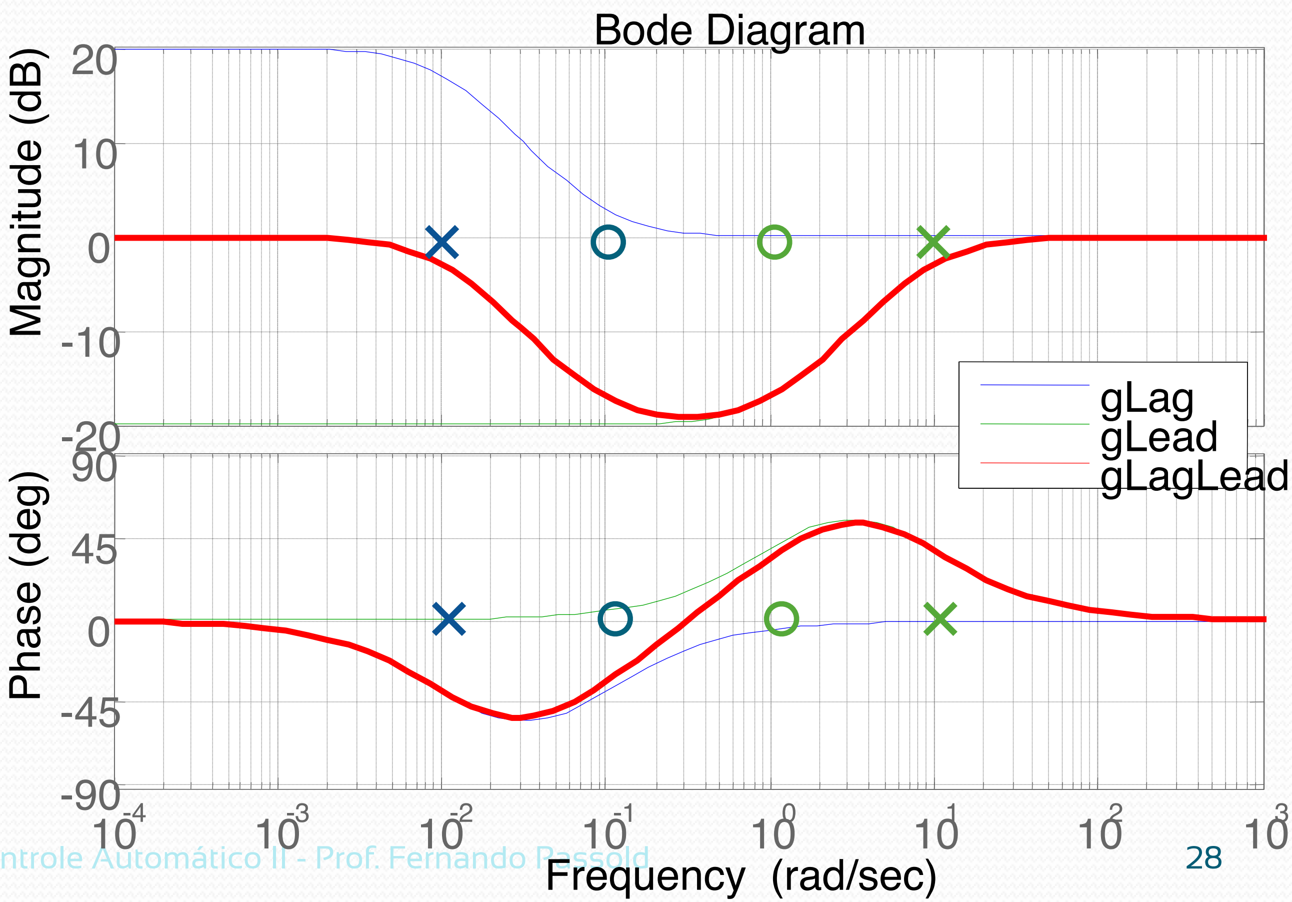
$$G_c(s) = G_{Lead}(s) \cdot G_{Lag}(s) = \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \cdot \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\gamma T_2}} \right) \qquad \gamma > 1$$

$$G_c(s) = 1 \cdot \underbrace{\frac{(s+10)}{(s+1)}}_{Atraso} \cdot \underbrace{\frac{(s+100)}{(s+1000)}}_{Avanço}$$

$$G_c(s) = \underbrace{\left(\frac{s+1}{s+\gamma} \right)}_{Avanço} \cdot \underbrace{\left(\frac{s+0{,}1}{s+\frac{0{,}1}{\gamma}} \right)}_{Atraso}$$

Si $\gamma = 10$

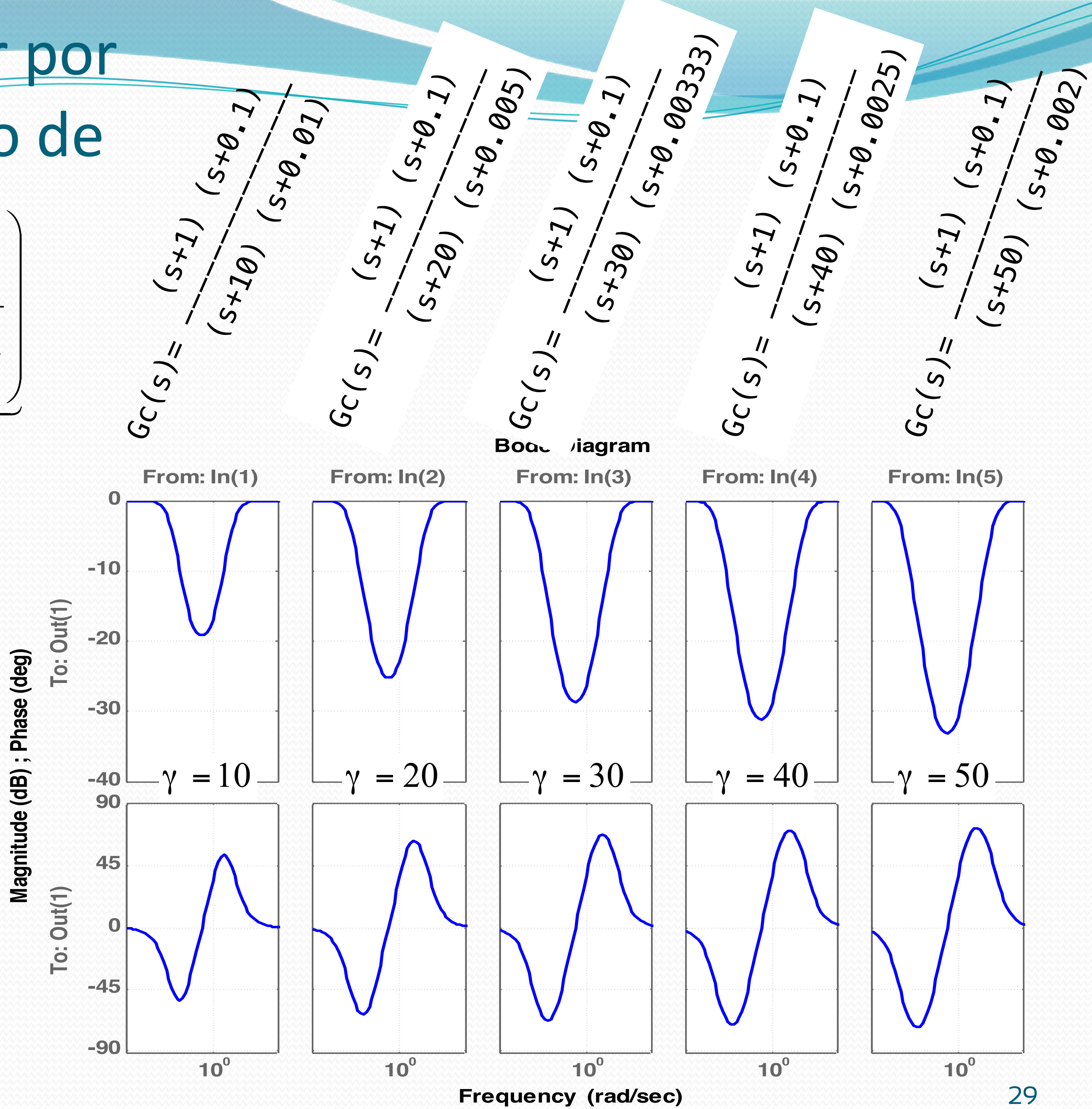
$$G_c(s) = \underbrace{\left(\frac{s+1}{s+10} \right)}_{Avanço} \cdot \underbrace{\left(\frac{s+0{,}1}{s+0{,}01} \right)}_{Atraso}$$



Compensador por Atraso-Avanço de Fase

$$G_c(s) = \underbrace{\left(\frac{s+1}{s+\gamma}\right)}_{Avanço} \cdot \underbrace{\left(\frac{s+0{,}1}{s+\dfrac{0{,}1}{\gamma}}\right)}_{Atraso}$$

$10 \le \gamma \le 50$



Conclusões:

γ ↗: $|G_C(s)|$ ↗;

γ ↗: $\Phi_C(s)$ ↗;

$W_{máx} = cte$

Compensador por Atraso-Avanço de Fase

$$G_c(s) = \underbrace{\left(\frac{s+1}{s+\gamma}\right)}_{\text{Avanço}} \cdot \underbrace{\left(\frac{s+0{,}1}{s+\frac{0{,}1}{\gamma}}\right)}_{\text{Atraso}}$$

$10 \leq \gamma \leq 50$

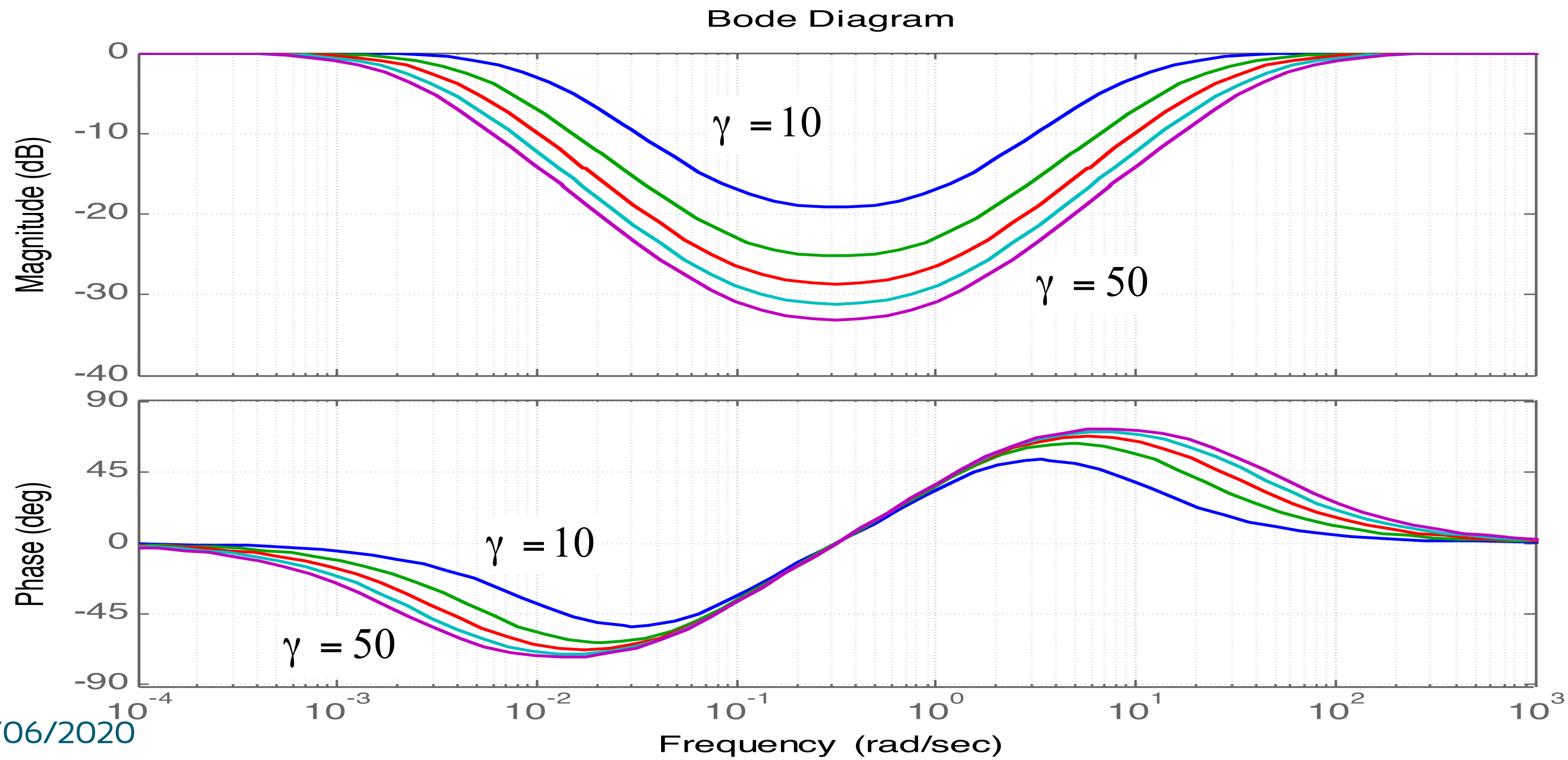
$Gc(s) = \frac{(s+1)\ (s+0.1)}{(s+10)\ (s+0.01)}$ $\quad \gamma = 10$

$Gc(s) = \frac{(s+1)\ (s+0.1)}{(s+20)\ (s+0.005)}$ $\quad \gamma = 20$

$Gc(s) = \frac{(s+1)\ (s+0.1)}{(s+30)\ (s+0.00333)}$ $\quad \gamma = 30$

$Gc(s) = \frac{(s+1)\ (s+0.1)}{(s+40)\ (s+0.0025)}$ $\quad \gamma = 40$

$Gc(s) = \frac{(s+1)\ (s+0.1)}{(s+50)\ (s+0.002)}$ $\quad \gamma = 50$



Compensador de Atraso-Avanço – Exemplo

- Ex. 11.4) Para o sistema abaixo, projete um compensador por atraso-avanço usando diagramas de Bode, capaz de cumprir com os seguintes requisitos: 13,25% de sobrepasso máximo, K_V = 12, e tempo de pico ≤ 2 segundos.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

$$G_c(s) = \underbrace{\frac{(1+\alpha T_1 s)}{(1+T_1 s)}}_{\text{Atraso De Fase}} \cdot \underbrace{\frac{(1+T_2 s)}{(1+\beta T_2 s)}}_{\text{Avanço De Fase}}$$

- Solução:

1. Determinando e erro estacionário (sistema tipo 1, erro ≠ 0 para entrada rampa):

1) $$K_V = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{(s+1)(s+4)} = \frac{K}{4} = K \cdot 0{,}25 \qquad \therefore \qquad K = 48$$

2. Calculando fator de amortecimento, ζ, para compatibilizar com %OS ≤ 13,25%:

2) $$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}} = 0{,}5411$$

3. Determinando Margem de Fase para ζ=0,5411:

3) $$\Phi_{M\_Req} = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}} = 55{,}02^o$$

Compensador de Atraso-Avanço – Exemplo

- Ex. 11.4) Para o sistema abaixo, projete um compensador por atraso-avanço usando diagramas de Bode, capaz de cumprir com os seguintes requisitos: 13,25% de sobrepasso máximo, $K_V = 12$, e tempo de pico ≤ 2 segundos.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

$$G_c(s) = \underbrace{\frac{(1+\alpha T_1 s)}{(1+T_1 s)}}_{\text{Atraso De Fase}} \cdot \underbrace{\frac{(1+T_2 s)}{(1+\beta T_2 s)}}_{\text{Avanço De Fase}}$$

- Solução:

4. Determinando frequência natural do sistema compatível com $\zeta = 0{,}5411$ (%OS ≤ 13,25%) y $T_p = 2{,}0$:

4.1) $$w_n = \frac{4}{T_p\sqrt{1-\zeta^2}} = 1{,}8678\ (rad/s)$$

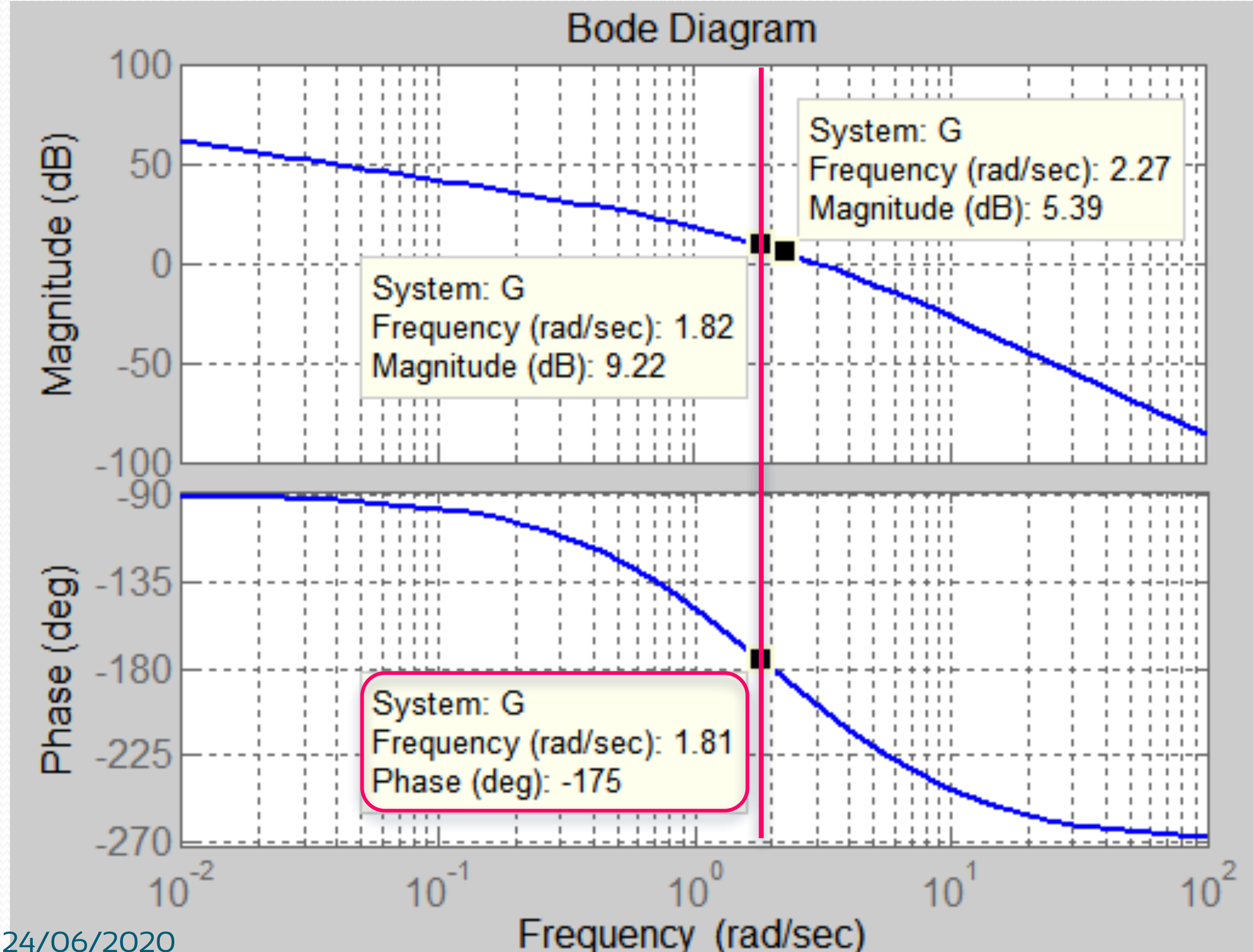
4.2) $$w_{BW} = w_n\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4-4\zeta^2+2}} = 2{,}2853\ (rad/s)$$

5. Através do Diagrama de Bode selecionar nova frequência de margem de fase próximo de w_{BW}:

Compensador de Atraso-Avanço – Exemplo

- Ex. 11.4) Para o sistema abaixo, projete um compensador por atraso-avanço usando diagramas de Bode, capaz de cumprir com os seguintes requisitos: 13,25% de sobrepasso máximo, K_V = 12, e tempo de pico ≤ 2 segundos.

5. Através do Diagrama de Bode selecionar nova frequência de margem de fase próximo de w_{BW}:



$$G(s) = \frac{48}{s(s+1)(s+4)}$$

w_{BW} = 2,2853 rad/s

Novo w_{BW} = 80% de w_{BW} = 1,8282 rad/s

Neste ultimo ponto:

|G(s)| = 2,8907 (9.22 dB)

Φ = -175,9º

Notas:

1. Sistema instável para este valor de K (=48).

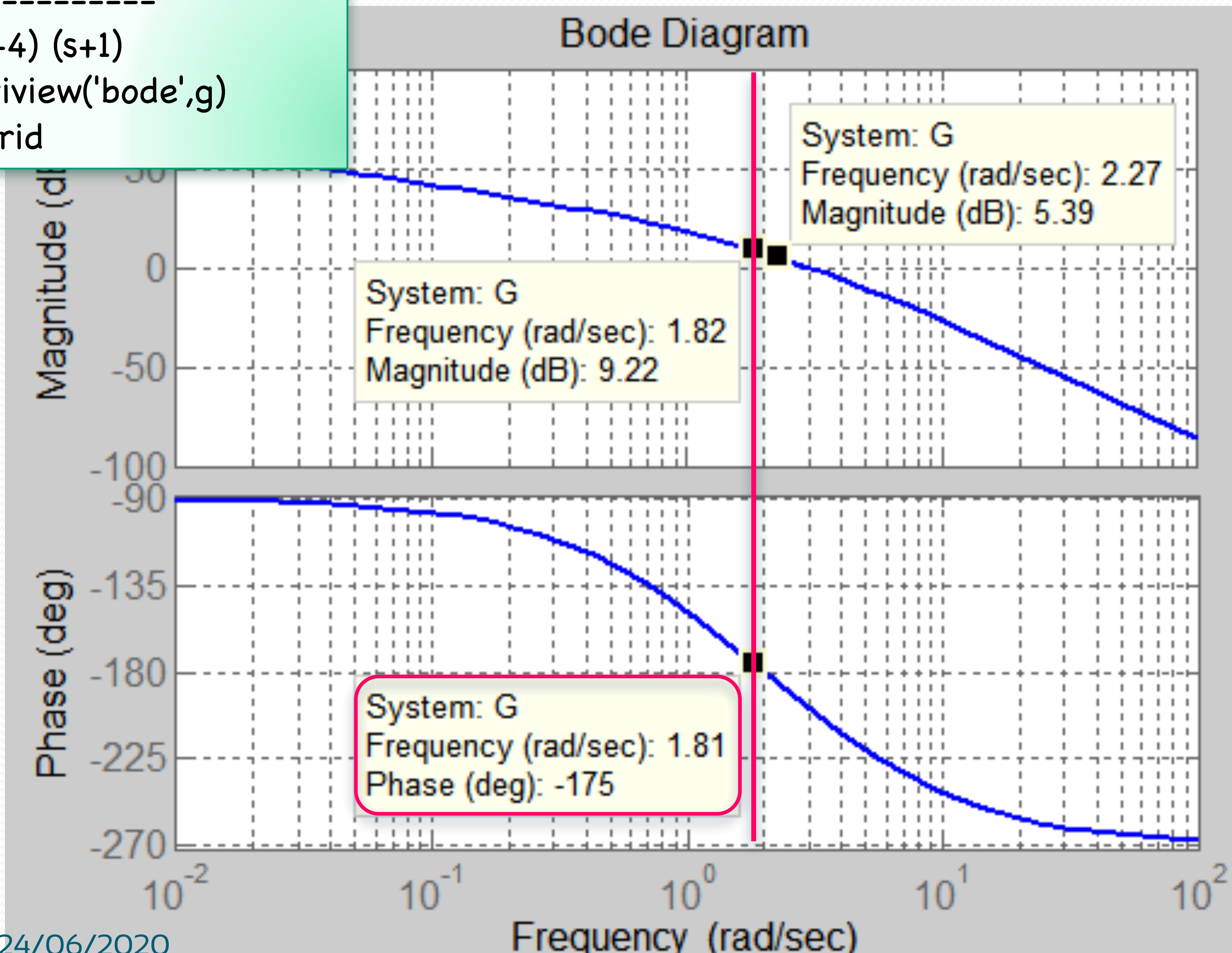
2. Margem de Fase desejada = 55,2º (180º – 55,2º = 124,98º).

```
>> num_g=48;
>> den_g=poly([0 -1 -4]);
>> g=tf(num_g,den_g);
>> zpk(g)
Zero/pole/gain:
      48
-------------
s (s+4) (s+1)
>> ltiview('bode',g)
>> grid
```

...r de Atraso-Avanço – Exemplo

...ma abaixo, projete um compensador por atraso-avanço usando diagramas de Bode, ...m os seguintes requisitos: 13,25% de sobrepasso máximo, K_V = 12, e tempo de pico ≤ 2

...a de Bode selecionar nova frequência de margem de fase próximo de w_{BW}:



$$G(s) = \frac{48}{s(s+1)(s+4)}$$

w_{BW} = 2,2853 rad/s

Novo w_{BW} = 80% de w_{BW} = 1,8282 rad/s

Neste ultimo ponto:

|G(s)| = 2,8907 (9.22 dB)

Φ = -175,9º

Notas:

1. Sistema instável para este valor de K (=48).

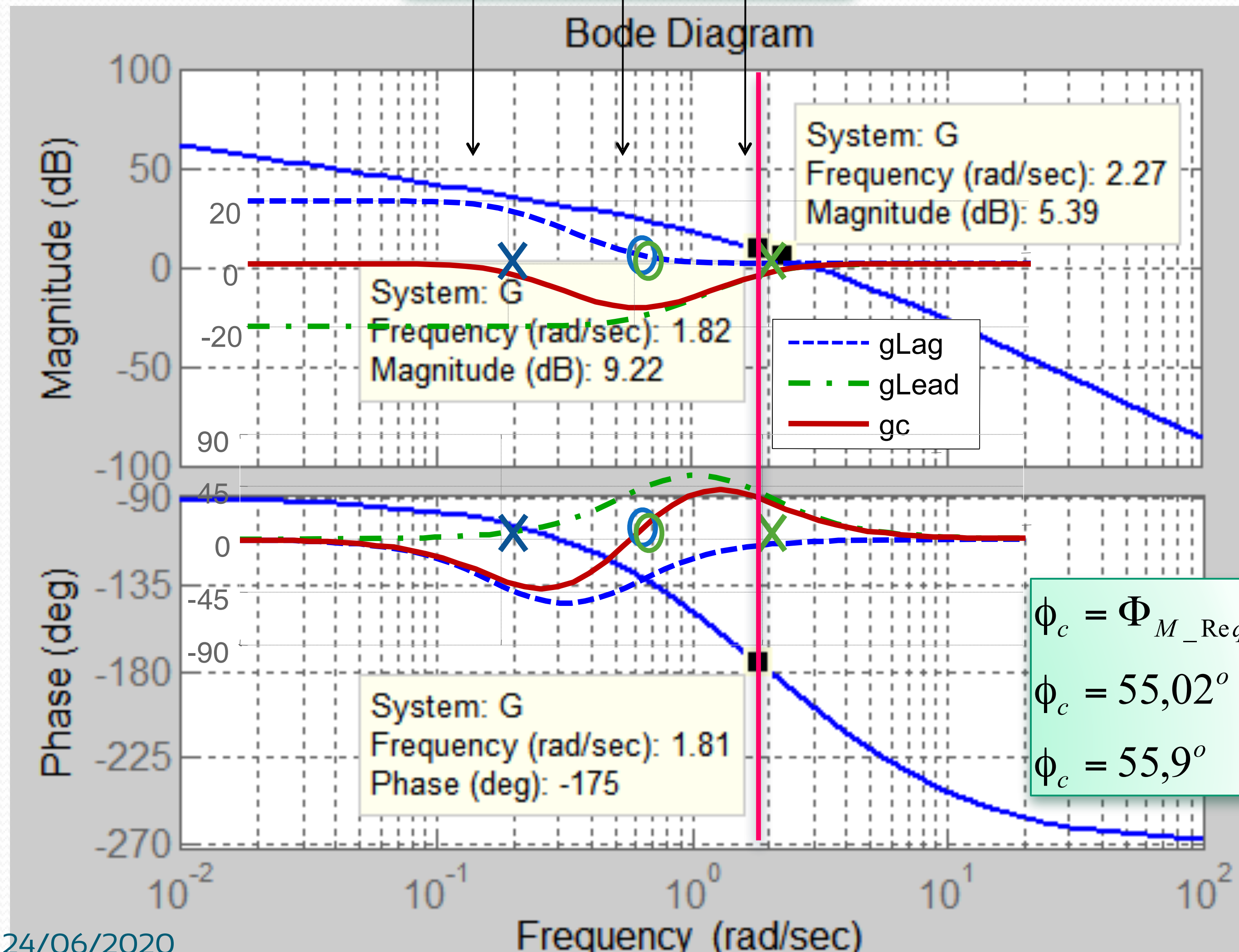
2. Margem de Fase desejada = 55,2º (180º – 55,2º = 124,98º).

Compensador de Atraso-Avanço – Exemplo

- Ex. 11.4) Para o sistema por atraso-avanço usando diagramas de Bode, capaz de cumprir com os sobrepasso máximo, $K_V = 12$, e tempo de pico ≤ 2 segundos.

5. Através do Diagrama de a de margem de fase próximo de w_{BW}:

p_{Lag} z_{Lag} z_{Lead} p_{Lead}



$$G(s) = \frac{48}{s(s+1)(s+4)}$$

w_{BW} = 2,2853 rad/s

Novo w_{BW} = 80% de w_{BW} = 1,8282 rad/s

Neste ultimo ponto:

|G(s)| = 2,8907 (9.22 dB)

Φ = -175,9º

6) Contribuição:

$$\phi_c = \Phi_{M\_Req} - (180^o + PM) + 5^o$$

$$\phi_c = 55{,}02^o - (180^o - 175{,}9^o) + 5^o$$

$$\phi_c = 55{,}9^o$$

p_{Lead}

Compensador de Atraso-Avanço – Exemplo

- Ex. 11.4) Para o sistema abaixo, projete um compensador por atraso-avanço usando diagramas de Bode, capaz de cumprir com os seguintes requisitos: 13,25% de sobrepasso máximo, $K_V = 12$, e tempo de pico ≤ 2 segundos.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

$$\phi_c = \Phi_{M\_\mathrm{Req}} - (180^o + PM) + 5^o$$

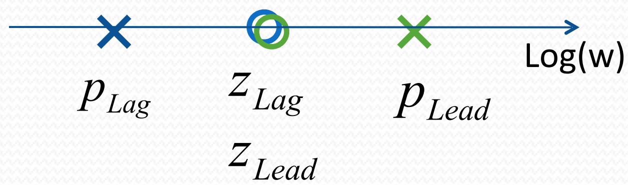
$$\phi_c = 55{,}02^o - (180^o - 175{,}9^o) + 5^o$$

$$\phi_c = 55{,}9^o \quad \text{em } \omega = 1.8\,\mathrm{rad/s}$$

- Solução:

7. Determinando β (=γ) do compensador ($\phi_{max} = \phi_c$):

$$\phi_{\max} = \sin^{-1}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) \longrightarrow \beta = \frac{1-\sin(\phi_{\max})}{1+\sin(\phi_{\max})} = 0{,}094$$



8. Se projeta o compensador por Atraso considerando como base: $w_n = 1{,}8282$ rad/s ($\zeta = 0{,}5411$, %OS $\leq 13{,}25\%$)
- seu zero se posiciona una década abaixo de w_n e seu polo coincide com:

$$G_{Lag}(s) = \beta \cdot \frac{s + z_{Lag}}{s + \underbrace{\beta \cdot z_{Lag}}_{p_{Lag}}} = 0{,}094 \cdot \frac{(s+0{,}1828)}{(s+0{,}01719)}$$

$$G_c(s) = \underbrace{\beta \cdot \frac{s+z_{Lag}}{s+\beta \cdot z_{Lag}}}_{Atraso} \times \underbrace{\frac{1}{\beta} \cdot \frac{s+z_{Lead}}{s+\frac{z_{Lead}}{\beta}}}_{\text{Avanço}}$$

9. Projeto do Compensador por Avanço…

Compensador de Atraso-Avanço – Exemplo

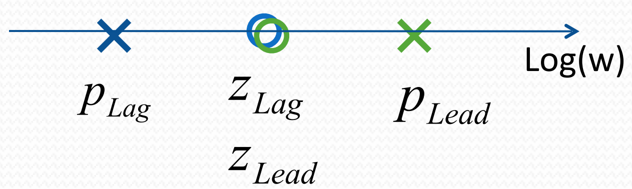
- Ex. 11.4) Para o sistema abaixo, projete um compensador por atraso-avanço usando diagramas de Bode, capaz de cumprir com os seguintes requisitos: 13,25% de sobrepasso máximo, K_V = 12, e tempo de pico ≤ 2 segundos.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

$$\phi_c = \Phi_{M\_Req} - (180^o + PM) + 5^o$$

$$\phi_c = 55{,}02^o - (180^o - 175{,}9^o) + 5^o$$

$$\phi_c = 55{,}9^o$$



- Solução:

$$\beta = \frac{1-\sin(\phi_{\max})}{1+\sin(\phi_{\max})} = 0{,}094$$

9. Projeto do Compensador por Avanço...

$$G_{Lead}(s) = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{s+z_{Lead}}{s+\underbrace{\frac{z_{Lead}}{\beta}}_{p_{Lead}}} = 0{,}094\cdot\frac{(s+0{,}5606)}{(s+0{,}5606/0{,}094)} = 10{,}6353\cdot\frac{(s+0{,}5606)}{(s+5{,}962)}$$

$$z_{Lead} = w_{PM}\cdot\sqrt{\beta} = 1{,}8282\cdot\sqrt{0{,}094} = 0{,}5606$$

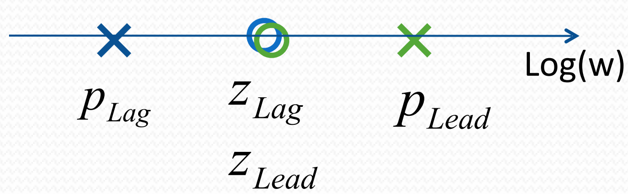
Compensador de Atraso-Avanço – Exemplo

- Ex. 11.4) Para o sistema abaixo, projete um compensador por atraso-avanço usando diagramas de Bode, capaz de cumprir com os seguintes requisitos: 13,25% de sobrepasso máximo, K_V = 12, e tempo de pico ≤ 2 segundos.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

- Solução:

$$G_c(s) = \underbrace{\beta \cdot \frac{s + z_{Lag}}{s + \beta \cdot z_{Lag}}}_{Atraso} \times \underbrace{\frac{1}{\beta} \cdot \frac{s + z_{Lead}}{s + \frac{z_{Lead}}{\beta}}}_{\text{Avanço}}$$



10. Compensador completo:

$$G_c(s) = \underbrace{\frac{(s+0{,}1828)}{(s+0{,}01719)}}_{Atraso} \cdot \underbrace{\frac{(s+0{,}5606)}{(s+5{,}962)}}_{\text{Avanço}}$$

11. Sistema em malha direta (*FTMA*(*s*)):

$$G_c(s) \cdot G(s) = 48 \cdot \frac{(s+0{,}1828)}{(s+0{,}01719)} \cdot \frac{(s+0{,}5606)}{(s+5{,}962)} \cdot \frac{1}{s(s+1)(s+4)}$$

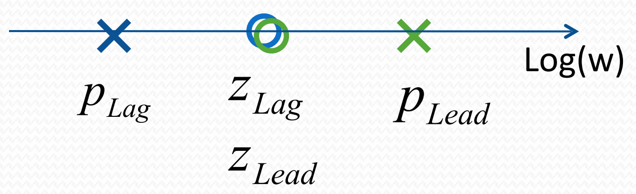
Compensador de Atraso-Avanço – Exemplo

- Ex. 11.4) Para o sistema abaixo, projete um compensador por atraso-avanço usando diagramas de Bode, capaz de cumprir com os seguintes requisitos: 13,25% de sobrepasso máximo, K_V = 12, e tempo de pico ≤ 2 segundos.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

- Solução:

$$G_c(s) = \underbrace{\beta \cdot \frac{s + z_{Lag}}{s + \beta \cdot z_{Lag}}}_{Atraso} \times \underbrace{\frac{1}{\beta} \cdot \frac{s + z_{Lead}}{s + \frac{z_{Lead}}{\beta}}}_{\text{Avanço}}$$



12. Resposta ao degrau do sistema em malha fechada:

```
>> Ge=G*Glag*Glead;
>> T=feedback(Ge,1);
>> step(T)
```

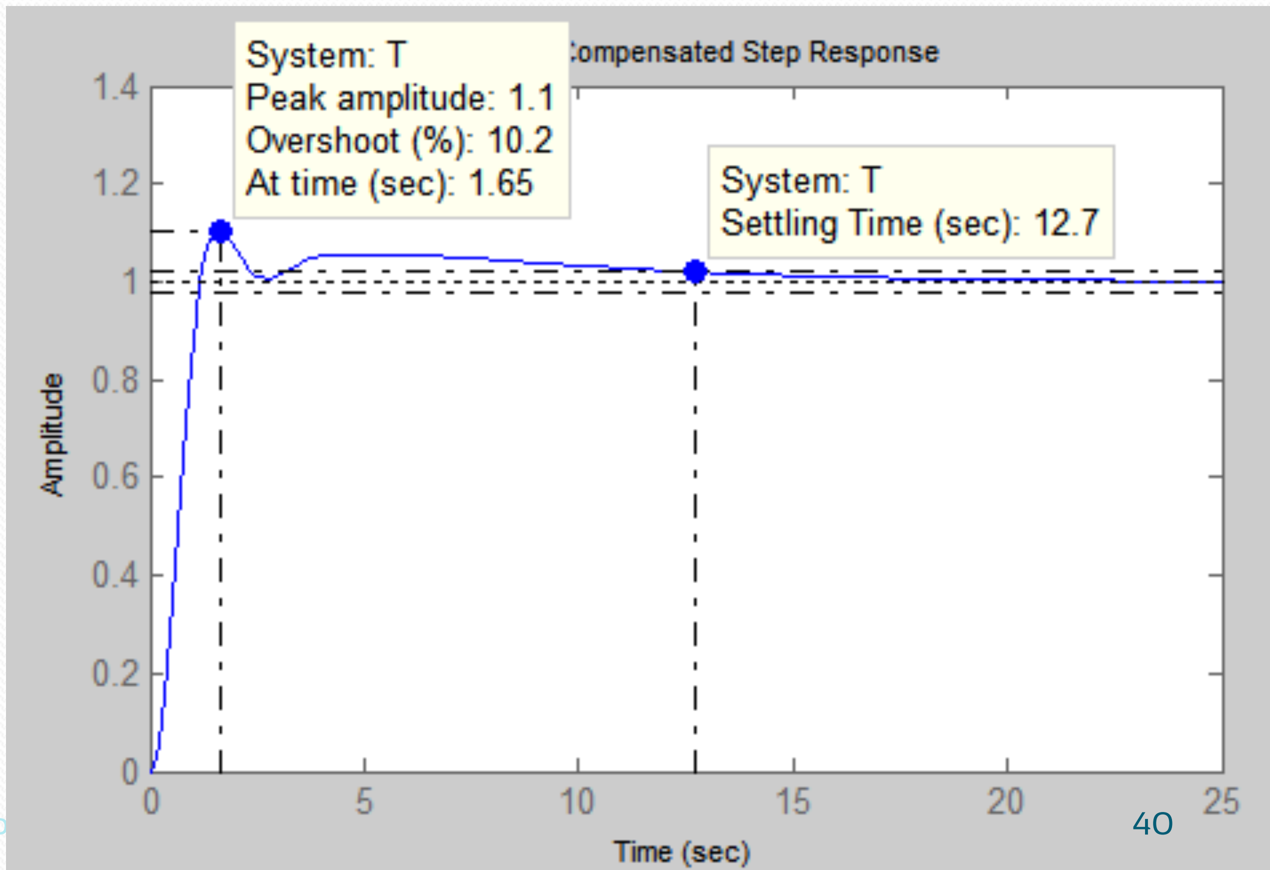
Compensador de Atraso-Avanço – Exemplo

- Ex. 11.4) Para o sistema abaixo, projete um compensador por atraso-avanço usando diagramas de Bode, capaz de cumprir com os seguintes requisitos: 13,25% de sobrepasso máximo, $K_V = 12$, e tempo de pico ≤ 2 segundos.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+4)}$$

- Solução:

$$G_c(s) = 48 \cdot \underbrace{\frac{(s+0{,}1828)}{(s+0{,}01719)}}_{Atraso} \cdot \underbrace{\frac{(s+0{,}5606)}{(s+5{,}962)}}_{\text{Avanço}}$$

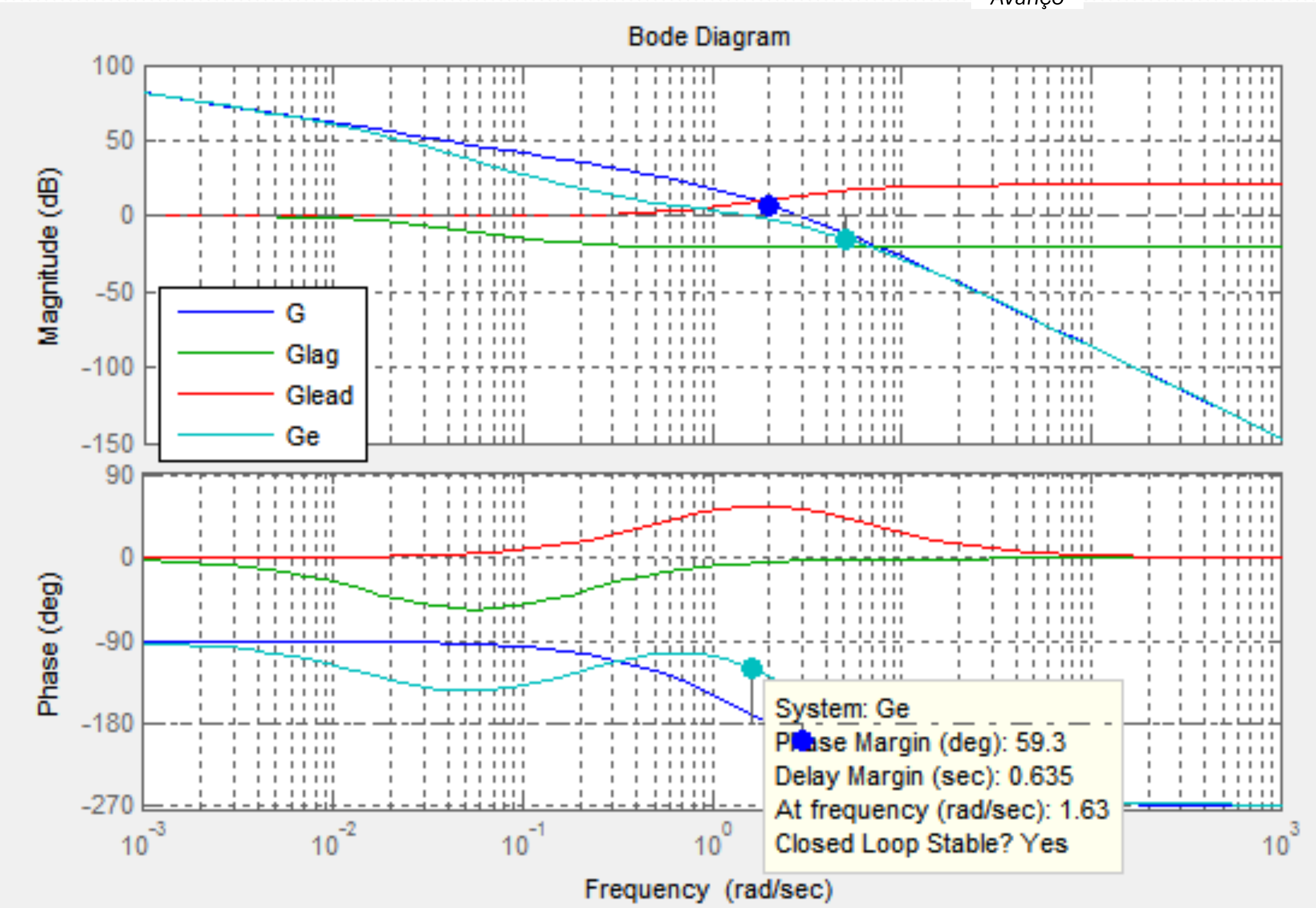


Compensador de Atraso-Avanço – Exemplo

- Ex. 11.4) Para o sistema abaixo, projete um compensador por atraso-avanço usando diagramas de Bode, capaz de cumprir com os seguintes requisitos: 13,25% de sobrepasso máximo, $K_V = 12$, e tempo de pico ≤ 2 segundos.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+4)} \qquad G_c(s) = 48 \cdot \underbrace{\frac{(s+0{,}1828)}{(s+0{,}01719)}}_{Atraso} \cdot \underbrace{\frac{(s+0{,}5606)}{(s+5{,}962)}}_{Avanço}$$

- Solução:



Problema

- Projetar um compensador de atraso-avanço para o sistema G(s) respeitando os seguintes requisitos de controle: (1) overshoot máximo de 10%, (2) tempo de pico menor que 0,6 segundos e (3) constante de erro estático menor que 10.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+8)(s+30)}$$

- Resposta:

$$G_{Lag}(s) = 0,456\,\frac{(s+0,602)}{(s+0,275)} \qquad G_{Lead}(s) = 2,19\,\frac{(s+4,07)}{(s+8,93)} \qquad K = 2400$$