Cap 10) Técnicas de Resposta em Frequencia

Controle Automatico II
Prof. Fernando Passold
Nov-2009; Jul-2020

Objetivos

- Definição do que é Resposta em Frequência;
- Como graficar resposta em frequência;
- Como usar resposta em frequência para analisar estabilidade?
- Como usar resposta em frequência para analisar resposta transitória de um sistema e seu erro de regime permanente;
- Como usar resposta em frequência para determinar o ganho de acordo com especificações de estabilidade?

Para que serve Resposta em Frequência do ponto de vista de projeto de controladores?

- Ajustar o ganho de forma a atender a especificações de resposta transitória;
- Projetar compensadores em cascata para melhorar erro de regime permanente;
- Projetar controladores em cascada para melhorar a resposta transitória;
- Projetar controladores em cascata para melhorar tanto o erro estacionário quanto a resposta transitória

Introdução

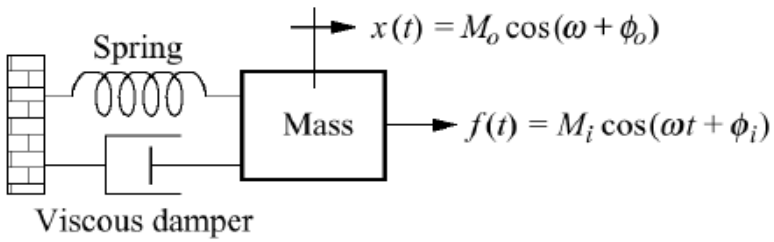
- Estabilidade e projeto da resposta transitória mediante ajuste de ganho:
  - Métodos baseados em resposta em frequência, diferentes do método baseado em RL, podem ser realizados sem a obrigatoriedade de una ferramenta computacional usando aproximações assintóticas.

- O projeto da resposta transitória mediante compensação em cascata:
  - Métodos baseados em resposta em frequência não são tão intuitivos como os baseados em RL.

- Projeto dos erros de estado estacionário mediante compensação en cascata:
  - Métodos baseados em resposta em frequência facilitam o projeto de compensadores derivativos de forma a acelerar a resposta do sistema ao mesmo tempo respeitando requerimentos de erros de regime permanente.

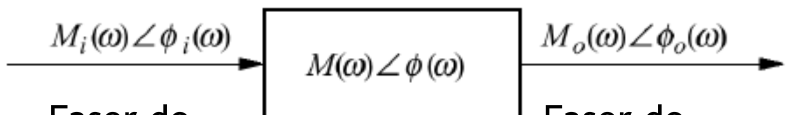
Resposta em frequência: Definição…

- Ondas sinusoidais podem ser representadas como números complexos clamados fasores



(a)

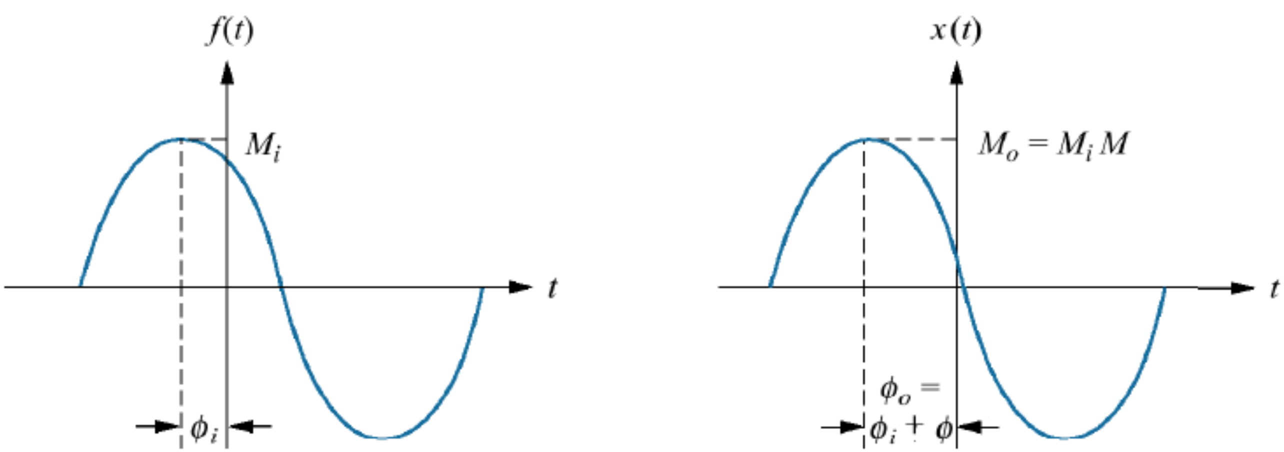
f(t) = entrada de força, sinusoidal neste caso:



Fasor de entrada

(b)

Fasor de saída



Definição:

$$M(w) = \frac{M_o(w)}{M_i(w)}$$

$$\phi(w) = \phi_o(w) - \phi_i(w)$$

Resposta em frequência: Definição...

- Definição: $M(w)\angle\phi(w)$
  - Magnitude: $M(w) = M_o(w)/M_i(w)$
  - Fase: $\phi(w) = \phi_o(w) - \phi_i(w)$

- Formatos de expressão:

$$r(t) = A\cos(wt) + B\sin(wt) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\left[wt - \tan^{-1}(B/A)\right]$$

1. Forma Polar: $M_i\angle\phi_i$
2. Forma Retangular: $A - jB$
3. Equação de Euler: $M_i e^{j\phi_i}$

Exemplo 10.1: $G(s) = 1/(s+2)$

Sustituindo: *s* = *jw*, para obter: $G(jw) = G(s)\big|_{s \to jw}$

$$dB = 20\log M$$

$$G(jw) = \frac{1}{(jw+2)} \cdot \frac{(-jw+2)}{(-jw+2)} = \frac{2-jw}{(w^2+4)}$$

Magnitude: $|G(jw)| = M(w) = \dfrac{1}{\sqrt{(w^2+4)}}$

Fase: $\phi(w) = -\tan^{-1}\left(w/2\right)$

Grafico de Magnitude: $20\log M(w) = 20\log\left(1/\sqrt{w^2+4}\right)$

Grafico de Fase: $\phi(w) = -\tan^{-1}(w/2)$

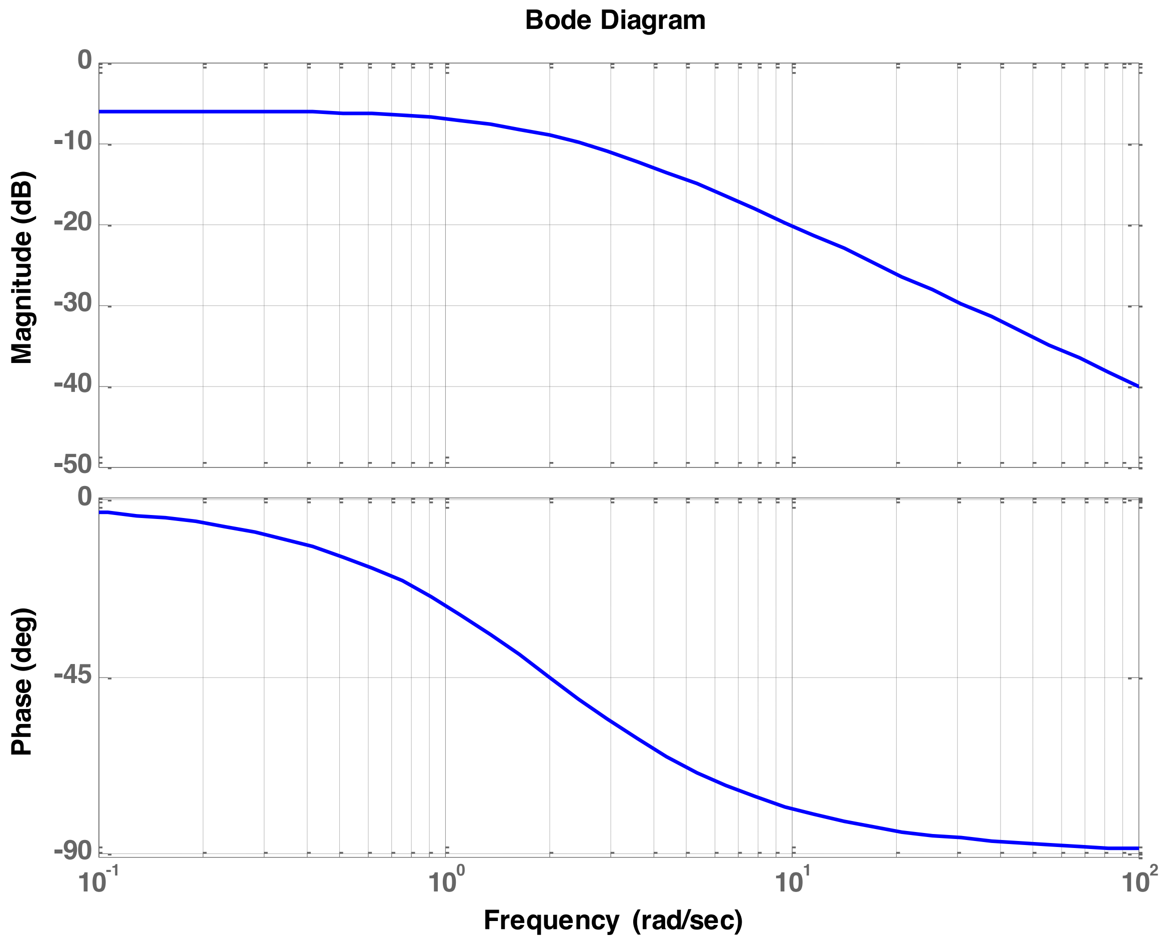
Diagrama Polar:

$$M(w)\angle\phi(w) = 1/\sqrt{w^2+4}\ \angle -\tan^{-1}(w/2)$$

Exemplo 10.1: $G(s) = 1/(s+2)$

Grafico de Magnitude: $20\log M(w) = 20\log\left(1/\sqrt{w^2+4}\right)$

Grafico de Fase: $\phi(w) = -\tan^{-1}(w/2)$

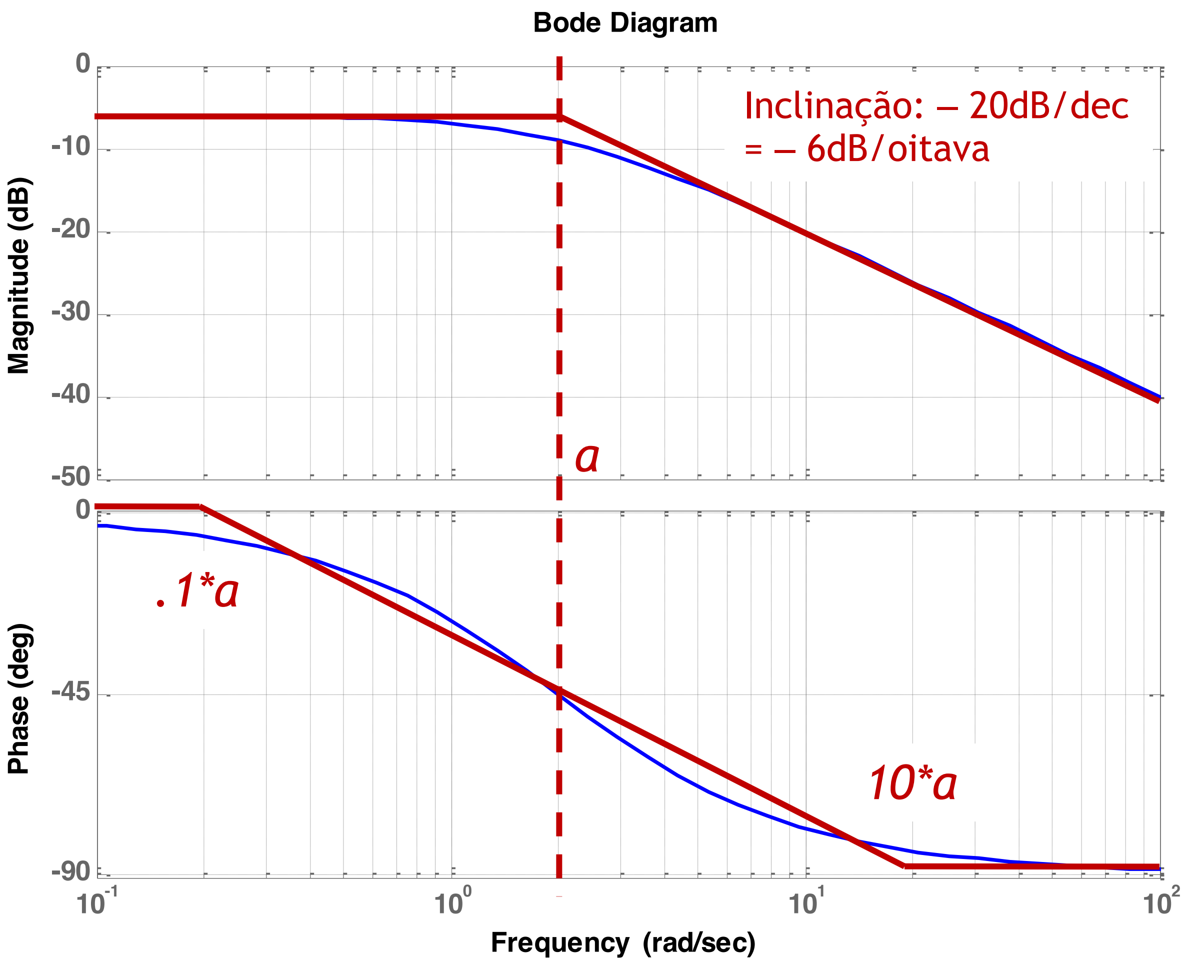



```
>> clear all
>> numg=1;
>> deng=([1 2]);
>> g=tf(numg,deng);
>> zpk(g)

Zero/pole/gain:
  1
-----
(s+2)

>> bode(g), grid
```

Ref: URL: http://www.swarthmore.edu/NatSci/echeeve1/Ref/LPSA/Bode/BodeHow.html

Exemplo 10.1: $G(s) = 1/(s+2)$

Assintóticamente:



$$G(s) = \frac{1}{(s+a)} = \frac{1}{a\left(\frac{s}{a}+1\right)}$$

Para baixas freq. ($jw<a$):

$$G(jw) \approx \frac{1}{a}$$

$$20\log M = -20\log a$$

Para altas freq. ($jw>a$):

$$G(jw) = \frac{1}{a\left(\frac{jw}{a}\right)} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{w}{a}}\angle -90^o = \frac{1}{w}\angle -90^o$$

$$20\log M = -20\log\left(\frac{1}{a}\right) - 20\log\left(\frac{w}{a}\right) = -20\log(w)$$

$$\begin{aligned} 20\log(M) &= 20\log(1/a) \\ &= 20\log(a^{-1}) \\ &= -20\log(a) \\ &= -20\log(2) \\ &= -6{,}0206 \end{aligned}$$

Ref: URL: http://www.swarthmore.edu/NatSci/echeeve1/Ref/LPSA/Bode/BodeHow.html

Revisão de traçados de Diagramas de Bode…

- **Diagrama de Bode para:** $G(s) = (s+a)$
  - Se $s = jw$: (Derivador Puro)

$$G(jw) = (jw + a) = a\left(j\frac{w}{a} + 1\right)$$

  - Para baixas frequências ($w < a$):

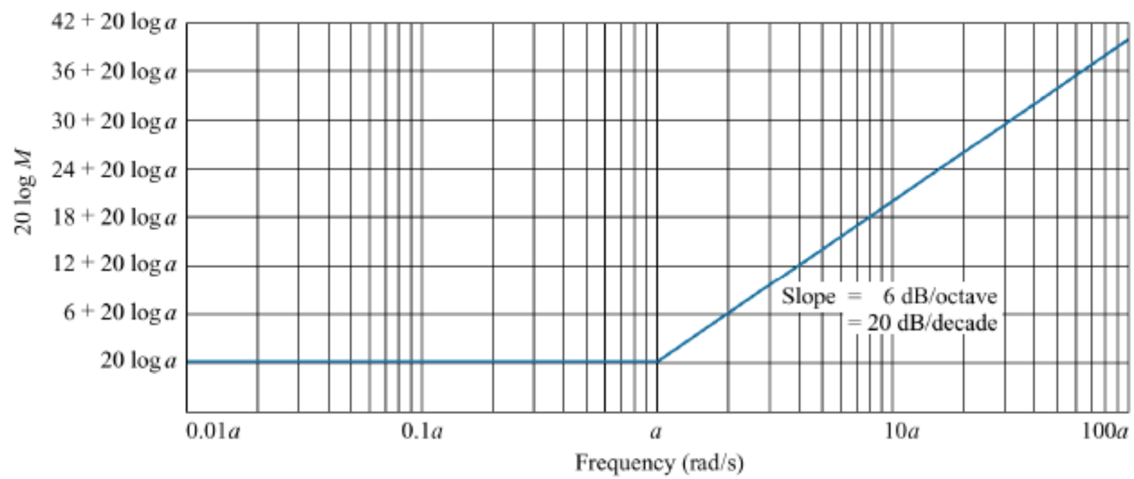
$$G(jw) \approx a$$

$$20\log(M) = 20\log(a)$$

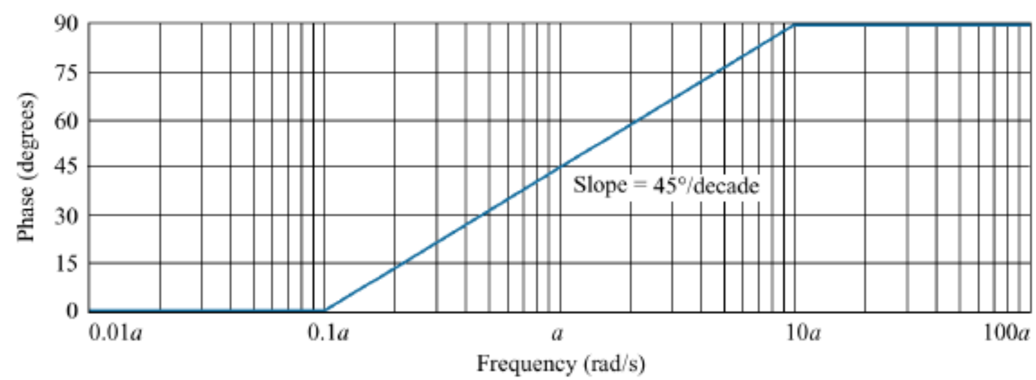
  - Para frequências elevadas ($w > a$)

$$G(jw) \approx a$$

$$20\log(M) = 20\log(a)$$



(a)



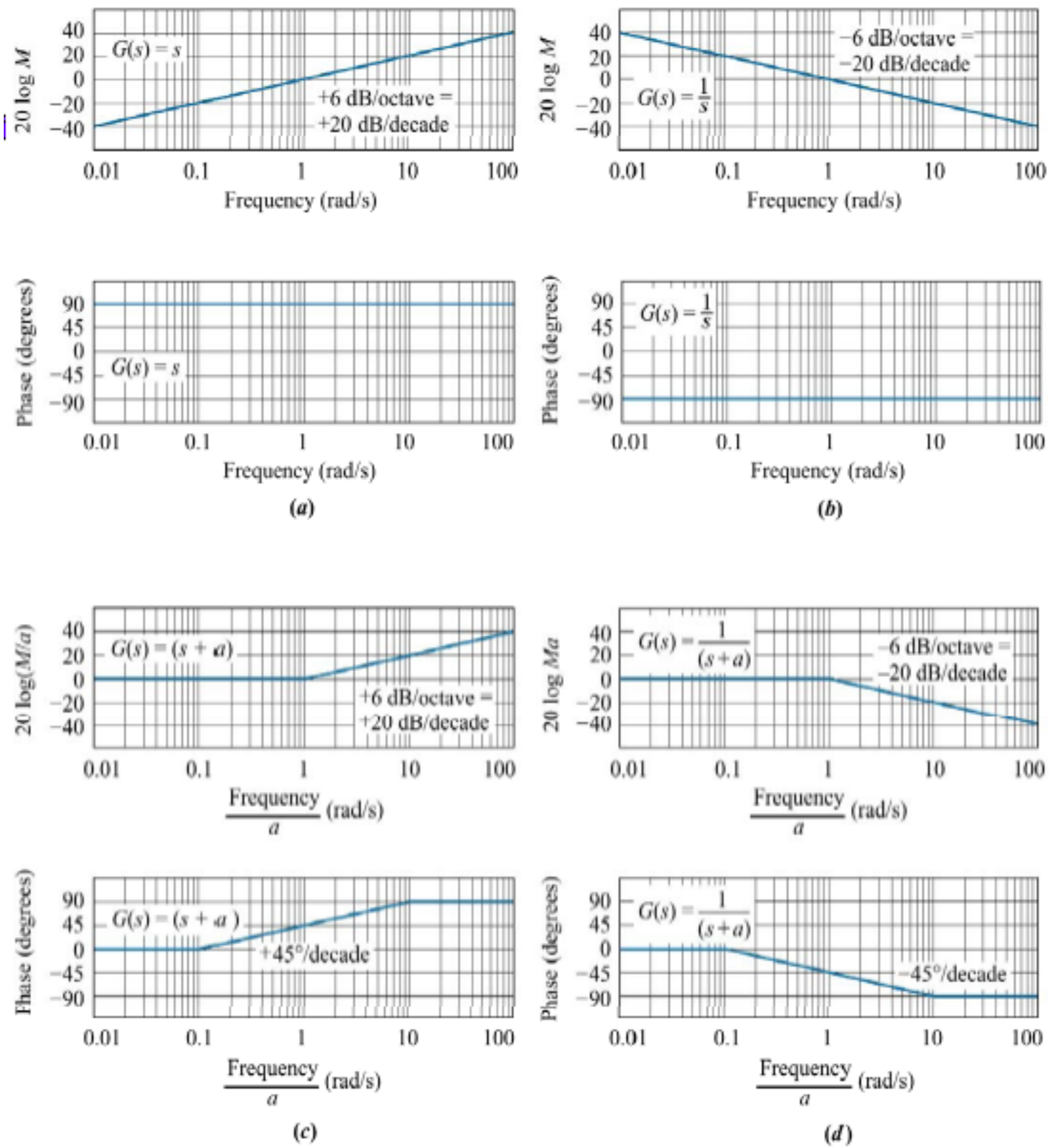
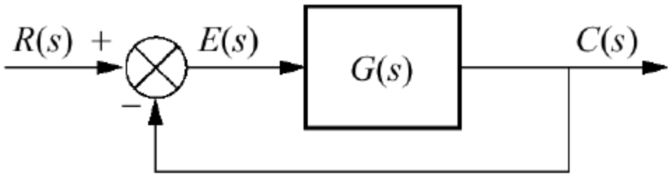


Figure 10.9
Normalized and scaled Bode plots for
a. $G(s) = s$;
b. $G(s) = 1/s$;
c. $G(s) = (s + a)$;
d. $G(s) = 1/(s + a)$

Control System Eng.

Exemplo 10.2)

$$G(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s+2)}$$

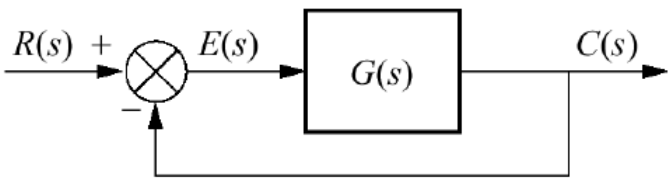


Reescrevendo a função, normalizada com relação aos zeros e polos:

$$G(s) = \frac{\frac{3}{2}K\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

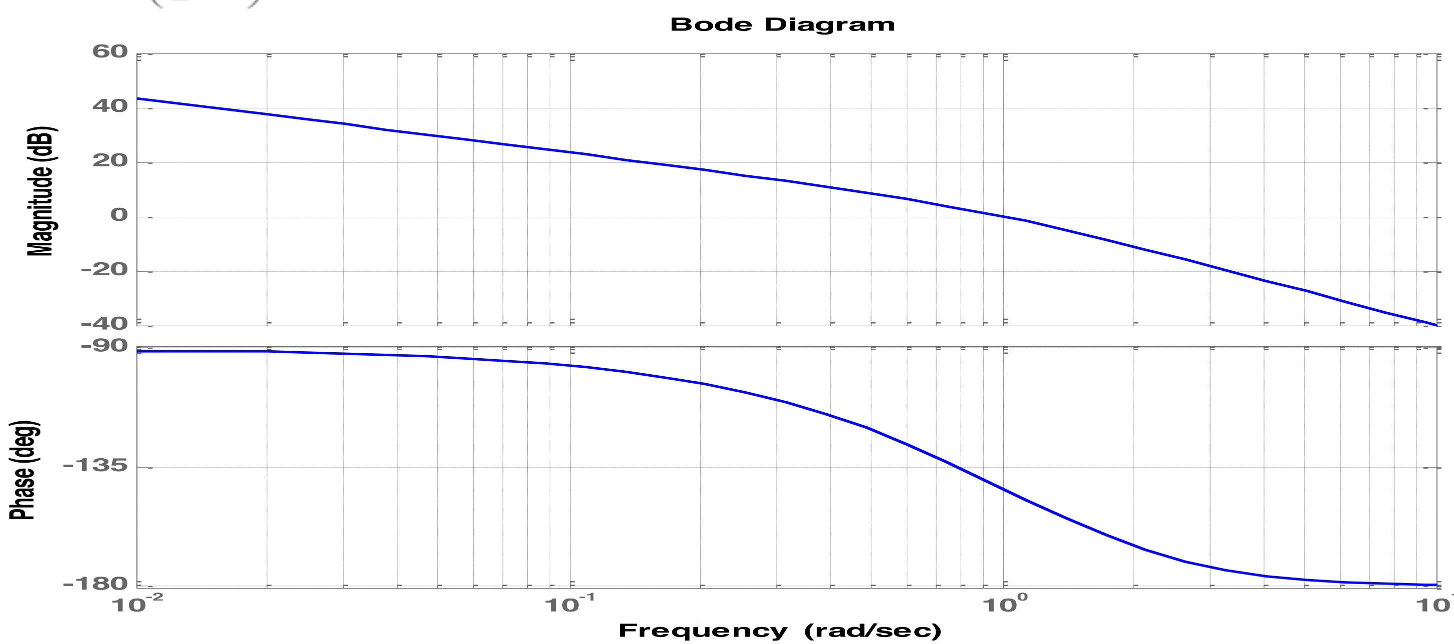
	Start: Pole at 0	Start: Pole at −1	Start: Pole at −2	Start: Zero at −3
Frequency (rad/s)	0.1	1	2	3
Pole at 0	−20	−20	−20	−20
Pole at −1	0	−20	−20	−20
Pole at −2	0	0	−20	−20
Zero at −3	0	0	0	20
Total slope (dB/dec)	−20	−40	−60	−40

Exemplo 10.2) $G(s) = \dfrac{K(s+3)}{s(s+1)(s+2)}$



$$G(s) = \frac{\frac{3}{2}K\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

	Start: Pole at 0	Start: Pole at −1	Start: Pole at −2	Start: Zero at −3
Frequency (rad/s)	0.1	1	2	3
Pole at 0	−20	−20	−20	−20
Pole at −1	0	−20	−20	−20
Pole at −2	0	0	−20	−20
Zero at −3	0	0	0	20
Total slope (dB/dec)	−20	−40	−60	−40

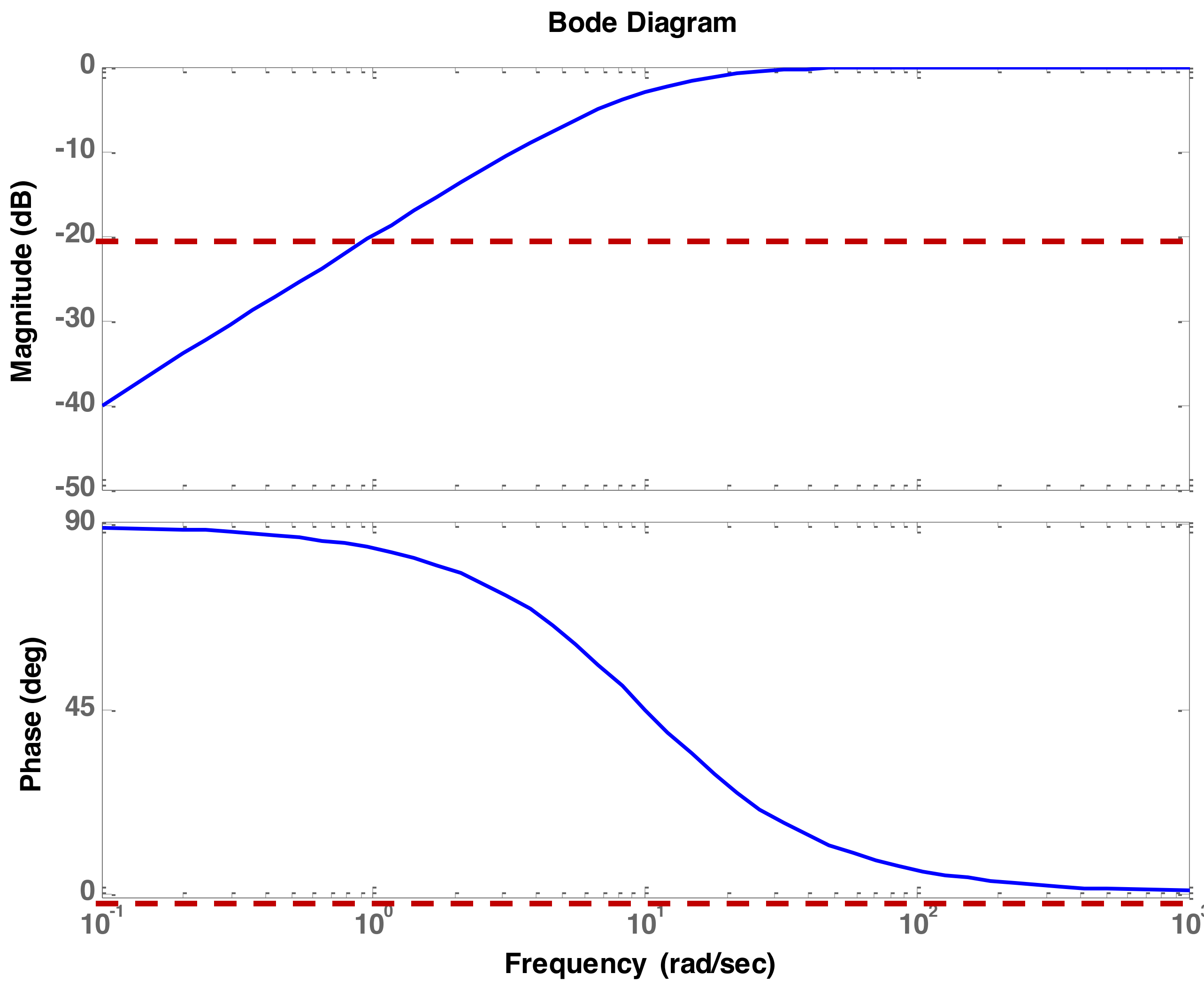


Outros exemplos:

$$G_1(s) = \frac{s}{(s+10)}$$

$$G_1(s) = \frac{1}{10} \cdot \frac{s}{\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$

Linha de base,
ganho = 0,1
(-20 dB)



$$\log(10) = 1$$

$$\log\left(\frac{1}{10}\right) = \log(10^{-1}) = -1$$

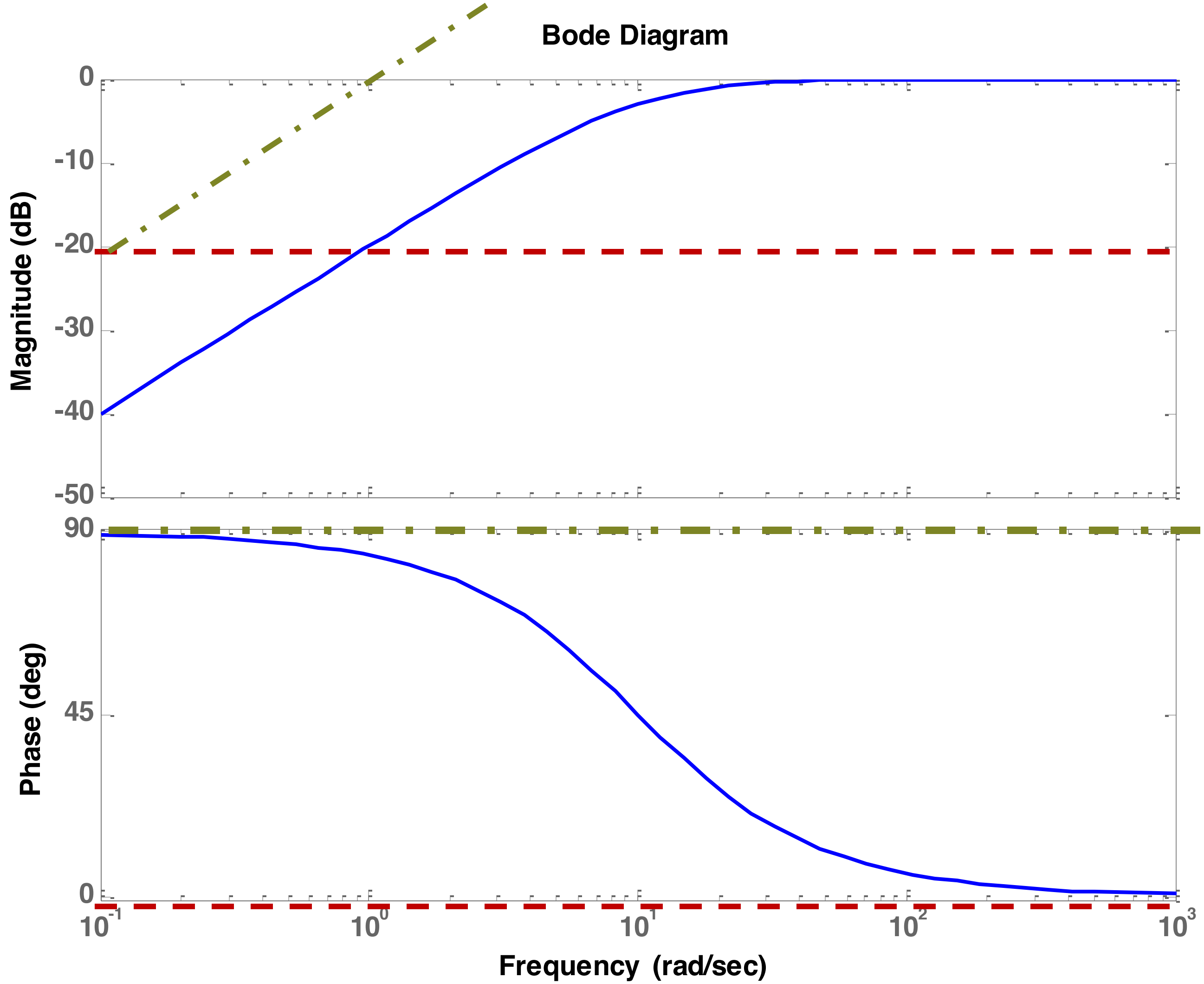
Outros exemplos:

+20 dB/déc
(zero na origem)

$$G_1(s) = \frac{s}{(s+10)}$$

$$G_1(s) = \frac{1}{10} \cdot \frac{s}{\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$

Zero na origem



$$\log(10) = 1$$

$$\log\left(\frac{1}{10}\right) = \log(10^{-1}) = -1$$

Outros exemplos:

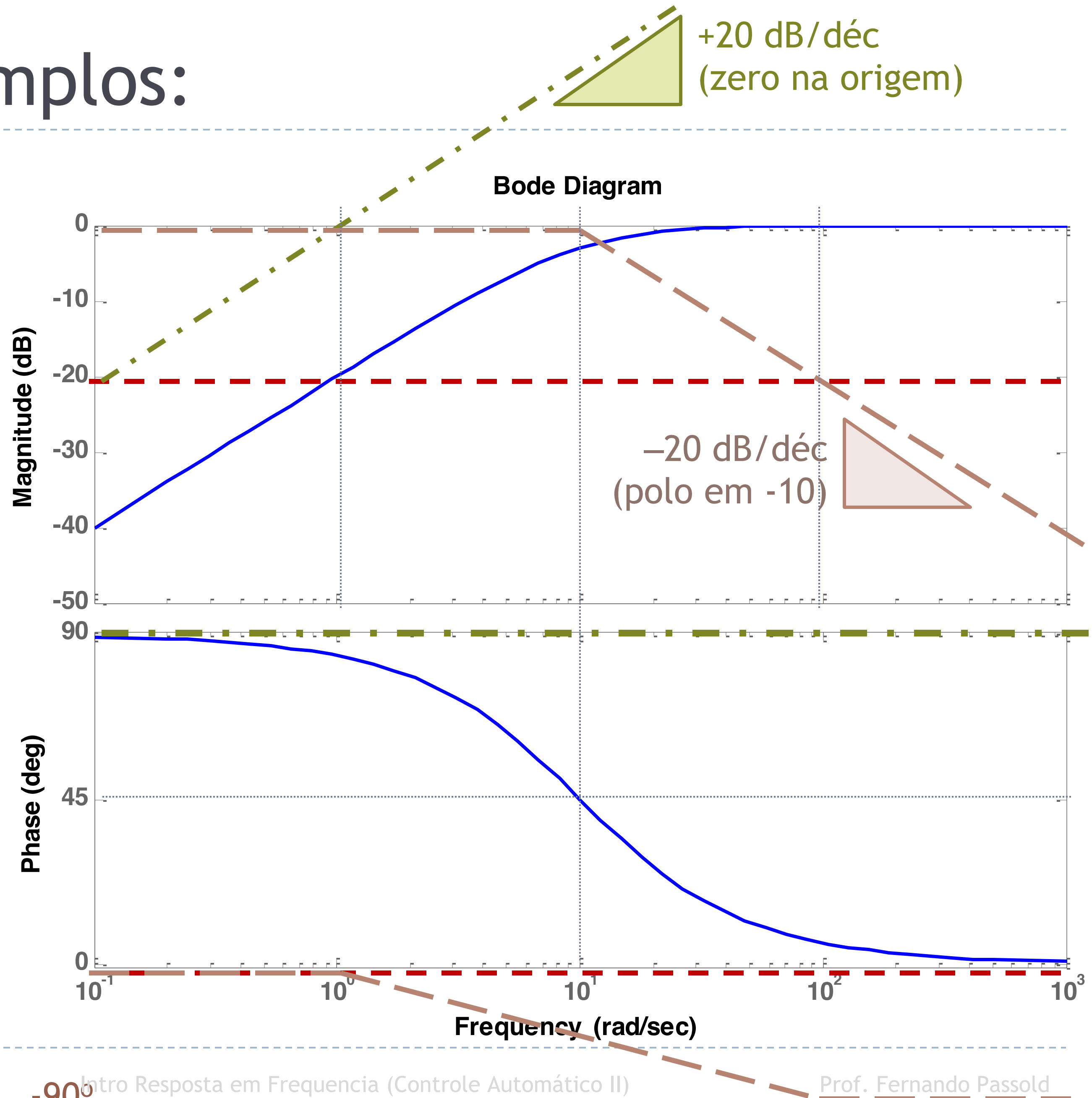
$$G_1(s) = \frac{s}{(s+10)}$$

$$G_1(s) = \frac{1}{10} \cdot \frac{s}{\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$

Polo real em $s = -10$

$$\log(10) = 1$$

$$\log\left(\frac{1}{10}\right) = \log(10^{-1}) = -1$$



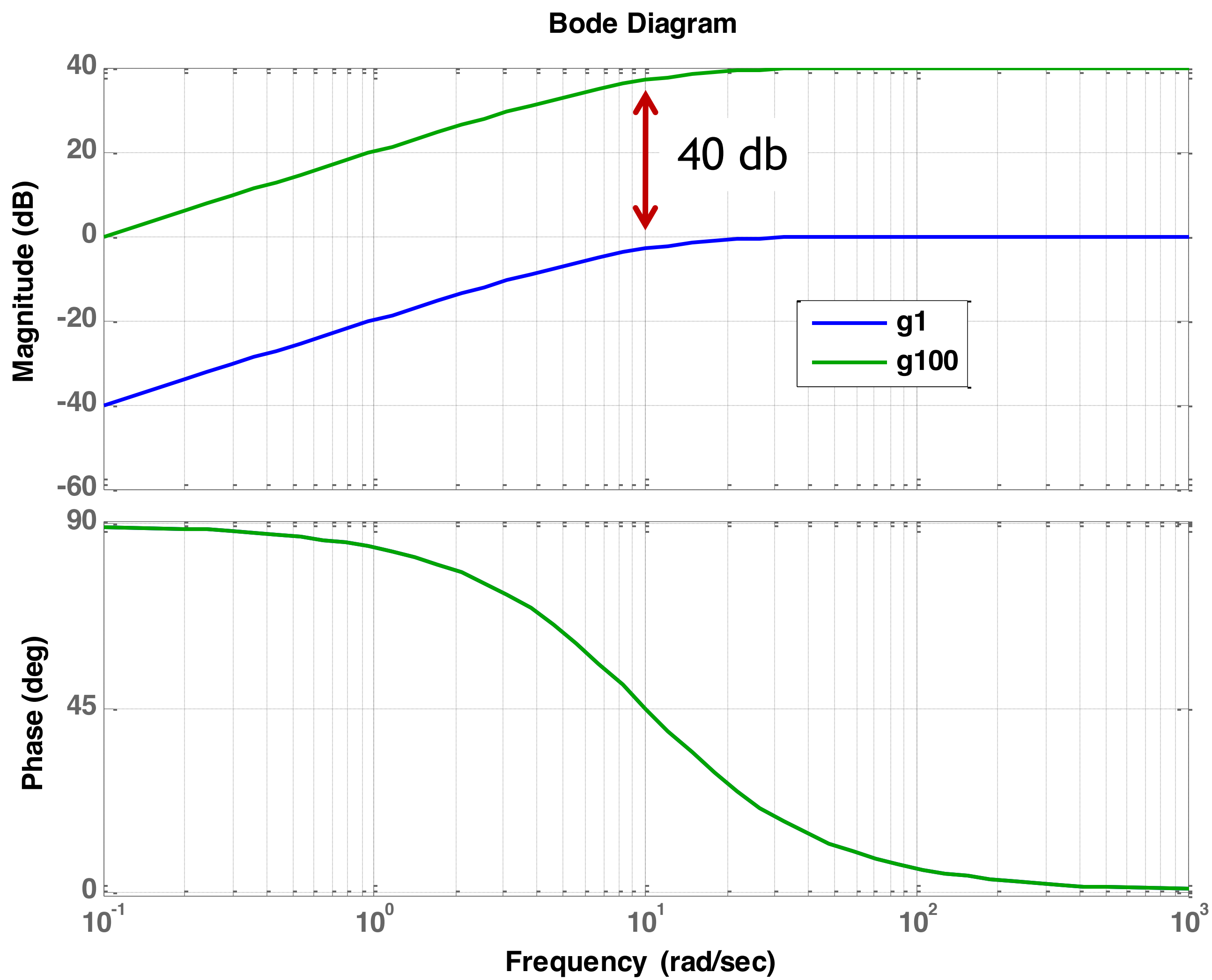
Outros exemplos:

$$G_1(s) = \frac{s}{(s+10)}$$

$$G_{100}(s) = 100\frac{s}{(s+10)}$$

$$G_{100}(s) = 10\frac{s}{s+\frac{s}{10}}$$

Diferença:
Ganho de magnitude:
$\log(100) = 2$

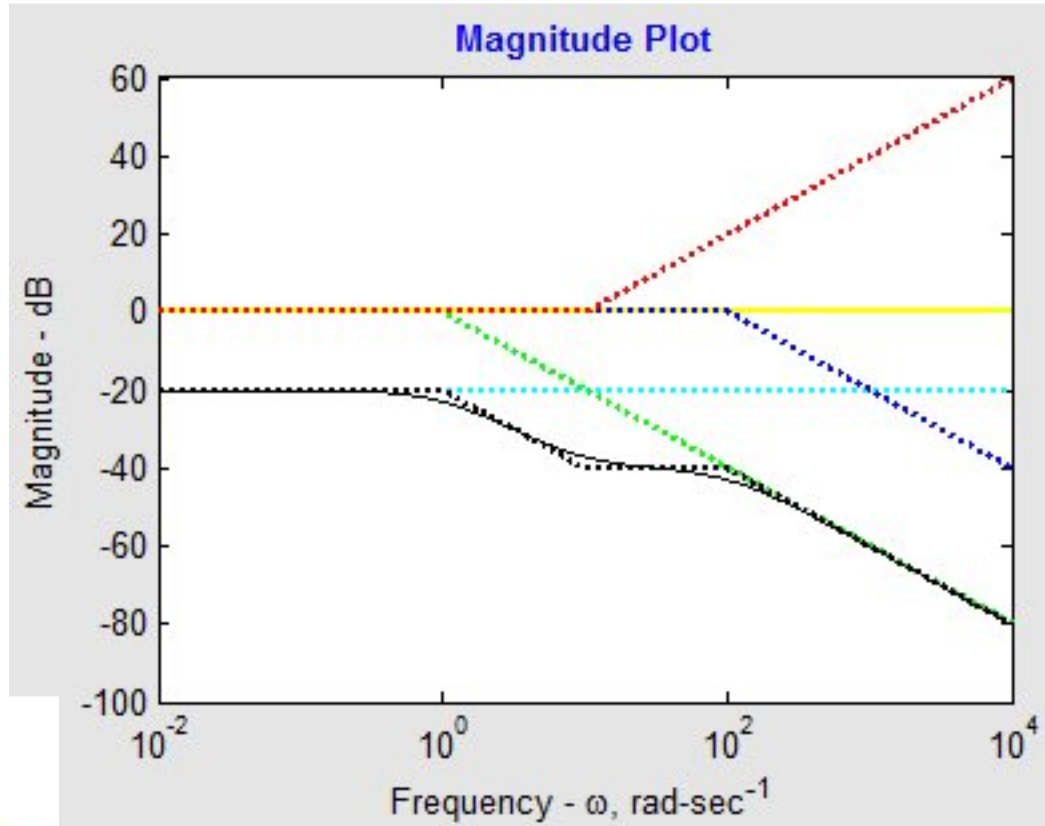


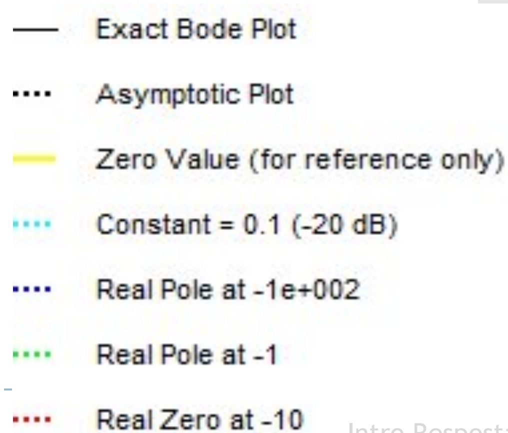
Outros exemplos:

- $$G_2(s) = \frac{s+10}{(s+1)(s+100)}$$

$$= \frac{10\left(\dfrac{s}{10}+1\right)}{(s+1)\cdot 100\left(\dfrac{s}{100}+1\right)}$$

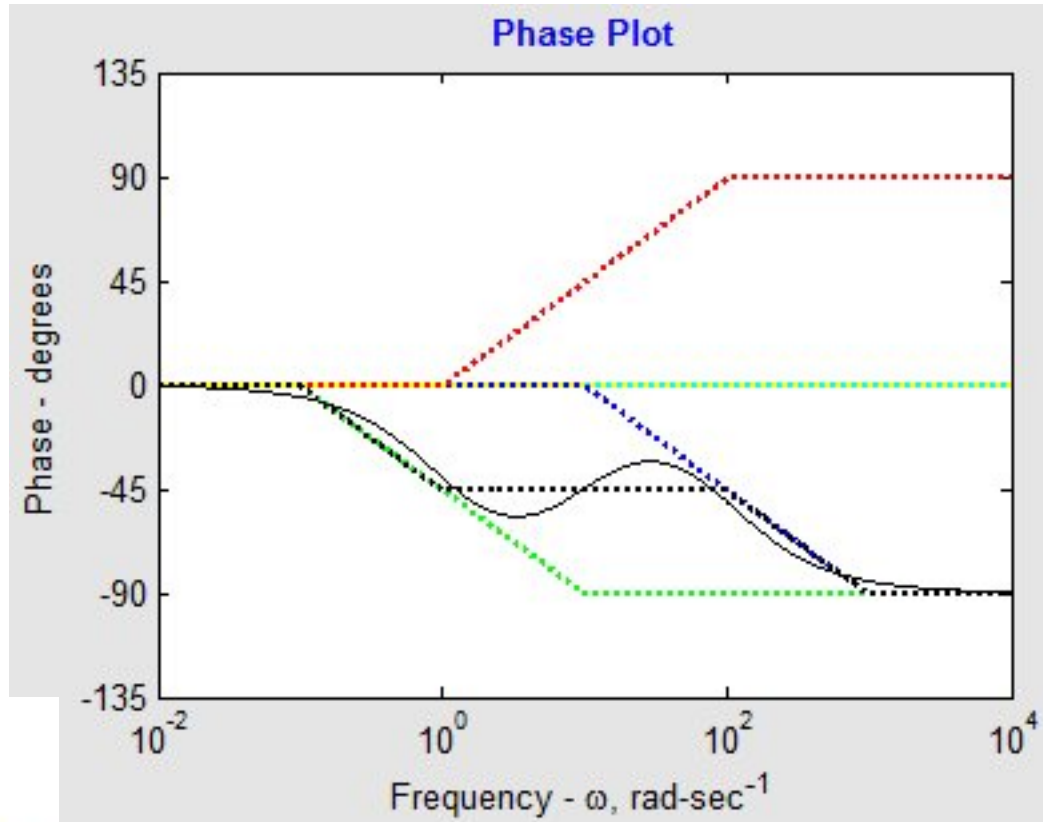
$$= \frac{10}{100}\cdot\frac{\left(\dfrac{s}{10}+1\right)}{(s+1)\left(\dfrac{s}{100}+1\right)}$$

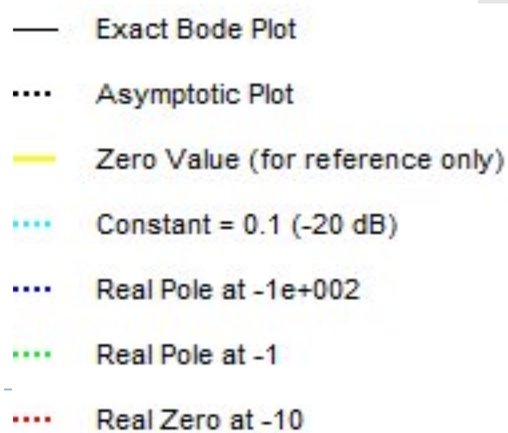




Outros exemplos:

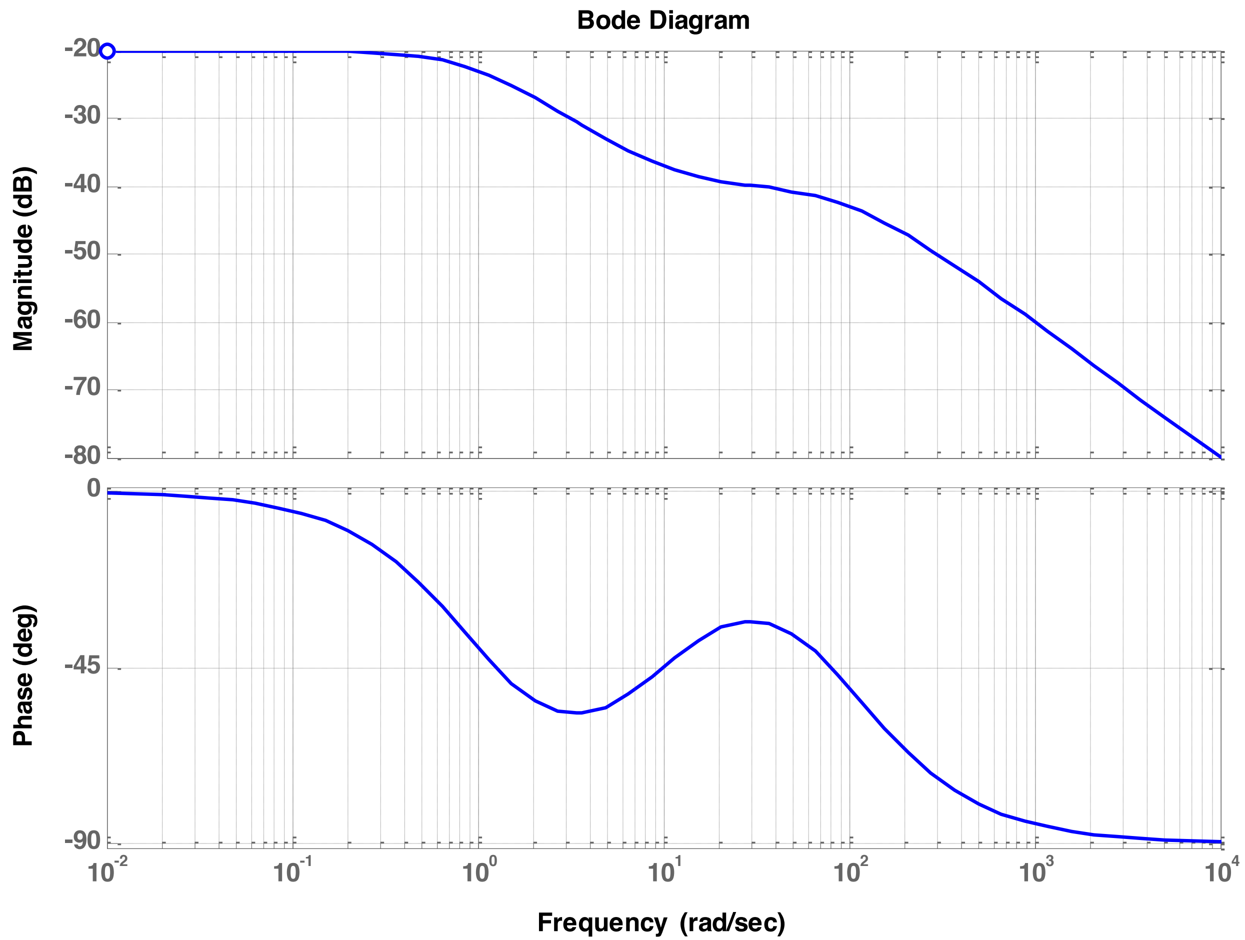
- $$G_2(s)=\frac{s+10}{(s+1)(s+100)}$$
$$=\frac{10\left(\dfrac{s}{10}+1\right)}{(s+1)\cdot 100\left(\dfrac{s}{100}+1\right)}$$
$$=\frac{10}{100}\cdot\frac{\left(\dfrac{s}{10}+1\right)}{(s+1)\left(\dfrac{s}{100}+1\right)}$$





Outros exemplos:

- $$G_2(s) = \frac{s+10}{(s+1)(s+100)}$$
  $$= \frac{10\left(\frac{s}{10}+1\right)}{(s+1)\cdot 100\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$
  $$= \frac{10}{100}\cdot\frac{\left(\frac{s}{10}+1\right)}{(s+1)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

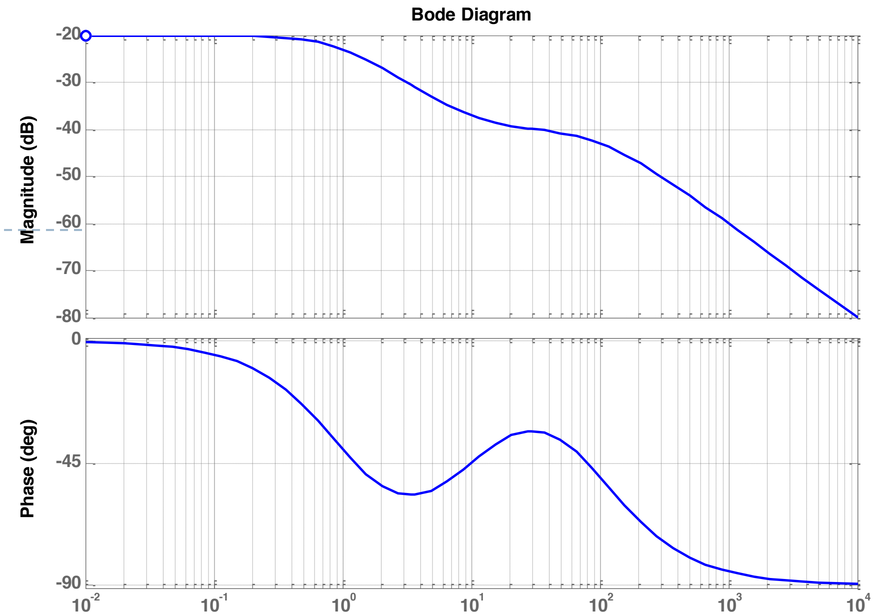


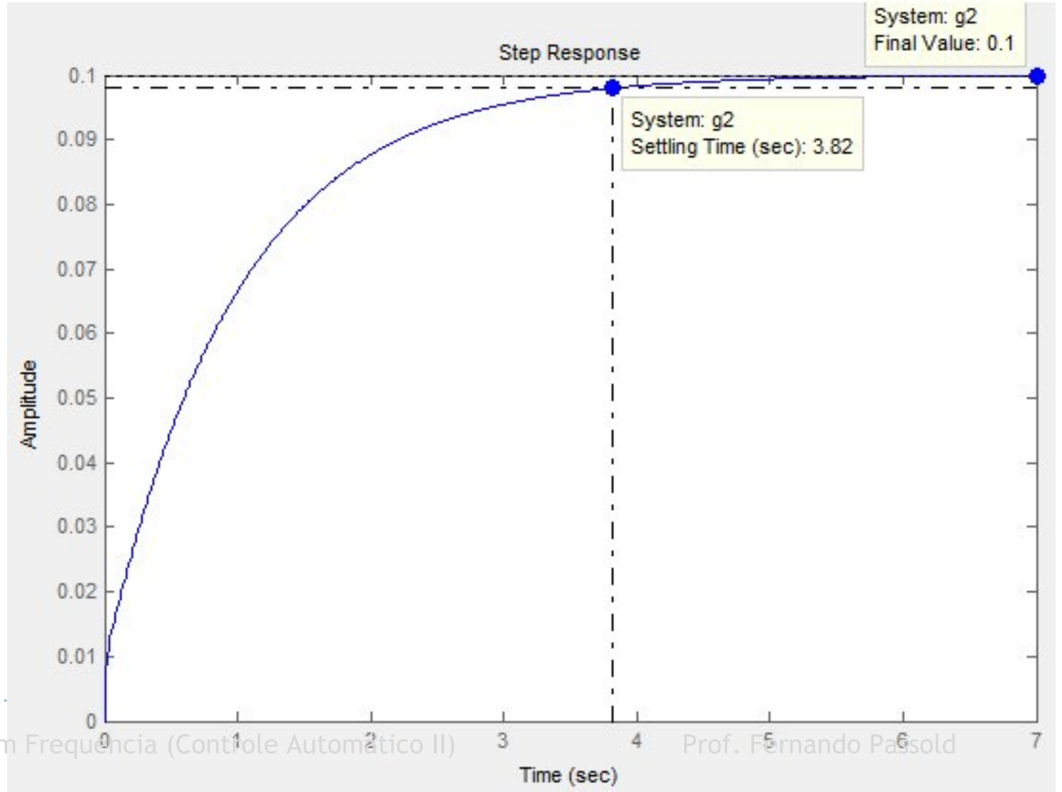
Outros exemplos:

- $$G_2(s) = \frac{s+10}{(s+1)(s+100)}$$

$$= \frac{10\left(\frac{s}{10}+1\right)}{(s+1)\cdot 100\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

$$= \frac{10}{100}\cdot\frac{\left(\frac{s}{10}+1\right)}{(s+1)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$



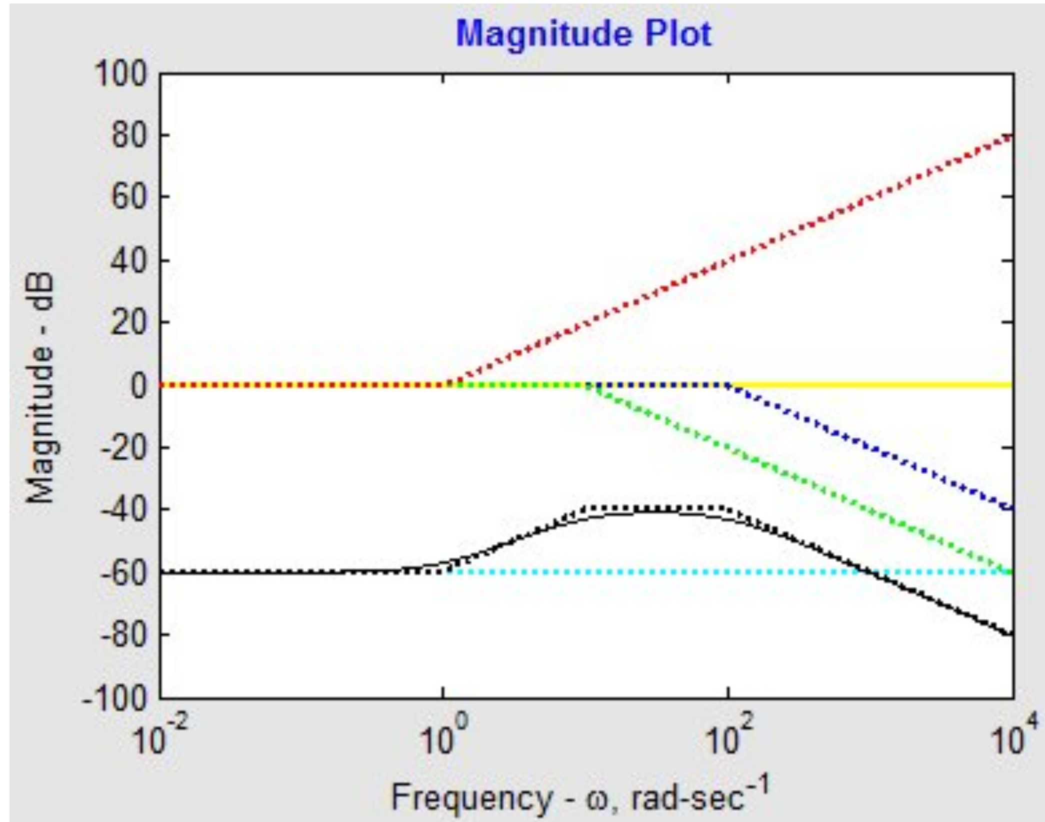


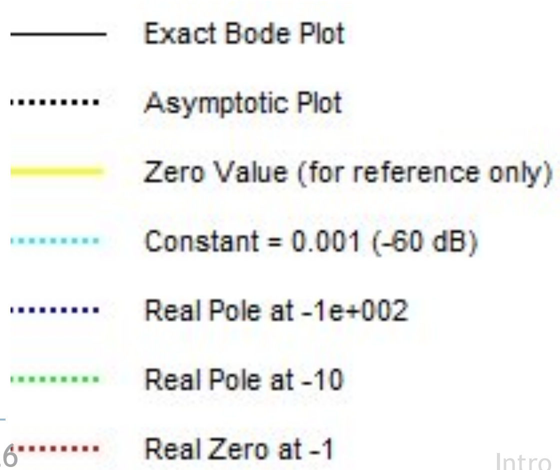
Outros Exemplos:

$$G_3(s) = \frac{s+1}{(s+10)(s+100)}$$

$$= \frac{(s+1)}{10\left(\frac{s}{10}+1\right)\cdot 100\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

$$= \frac{(s+1)}{1000\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$



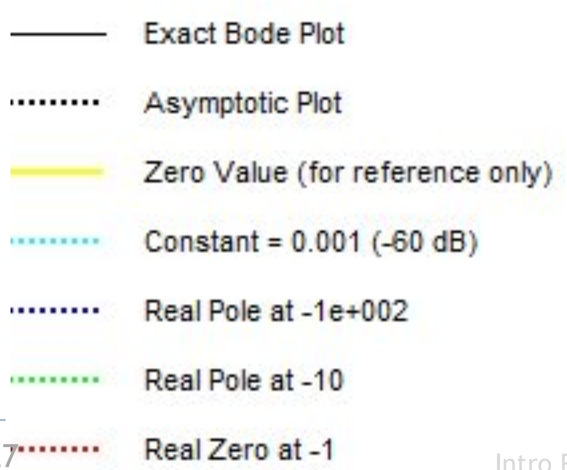


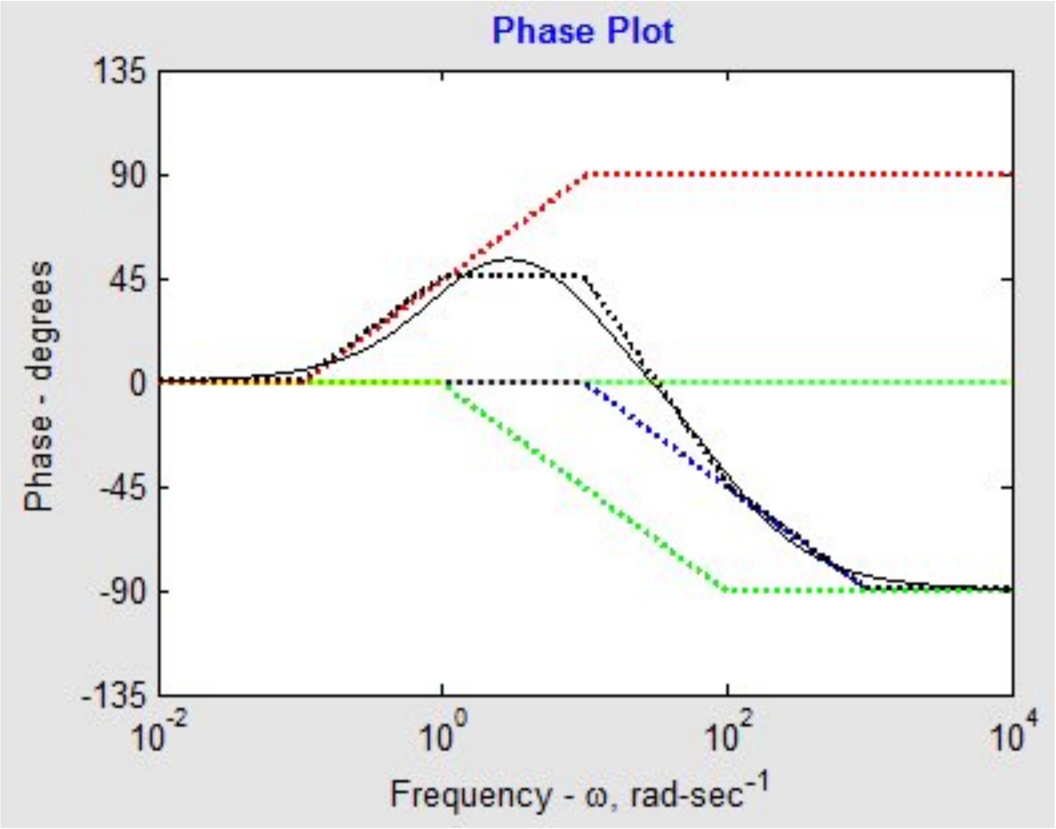
Outros Exemplos:

$$G_3(s) = \frac{s+1}{(s+10)(s+100)}$$

$$= \frac{(s+1)}{10\left(\frac{s}{10}+1\right)\cdot 100\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

$$= \frac{(s+1)}{1000\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$



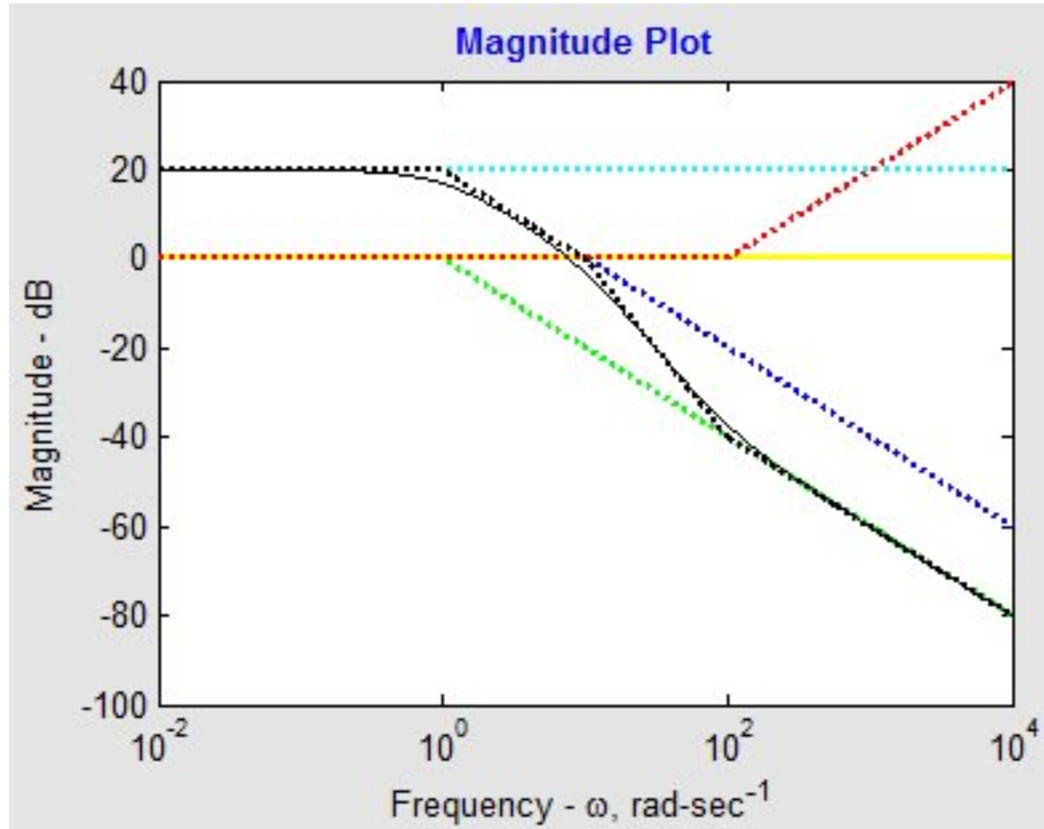


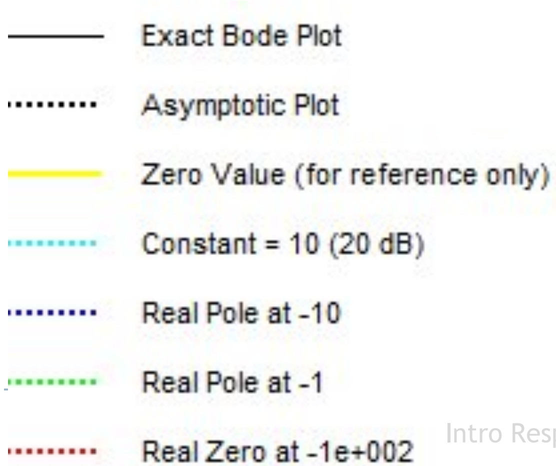
Outros Exemplos:

- $$G_4(s) = \frac{s+100}{(s+1)(s+10)}$$

$$= \frac{100\left(\frac{s}{100}+1\right)}{(s+1)\cdot 10\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$

$$= 10\frac{\left(\frac{s}{100}+1\right)}{(s+1)\cdot\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$



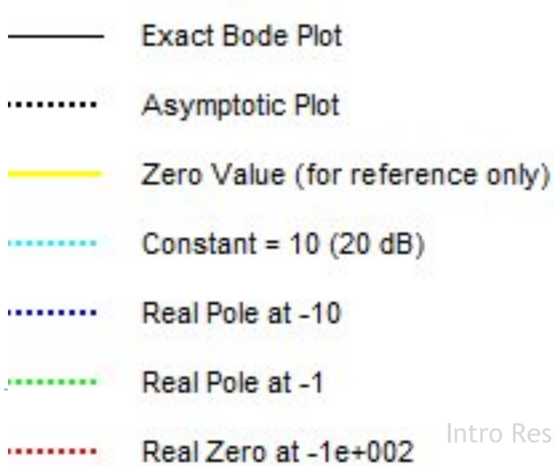


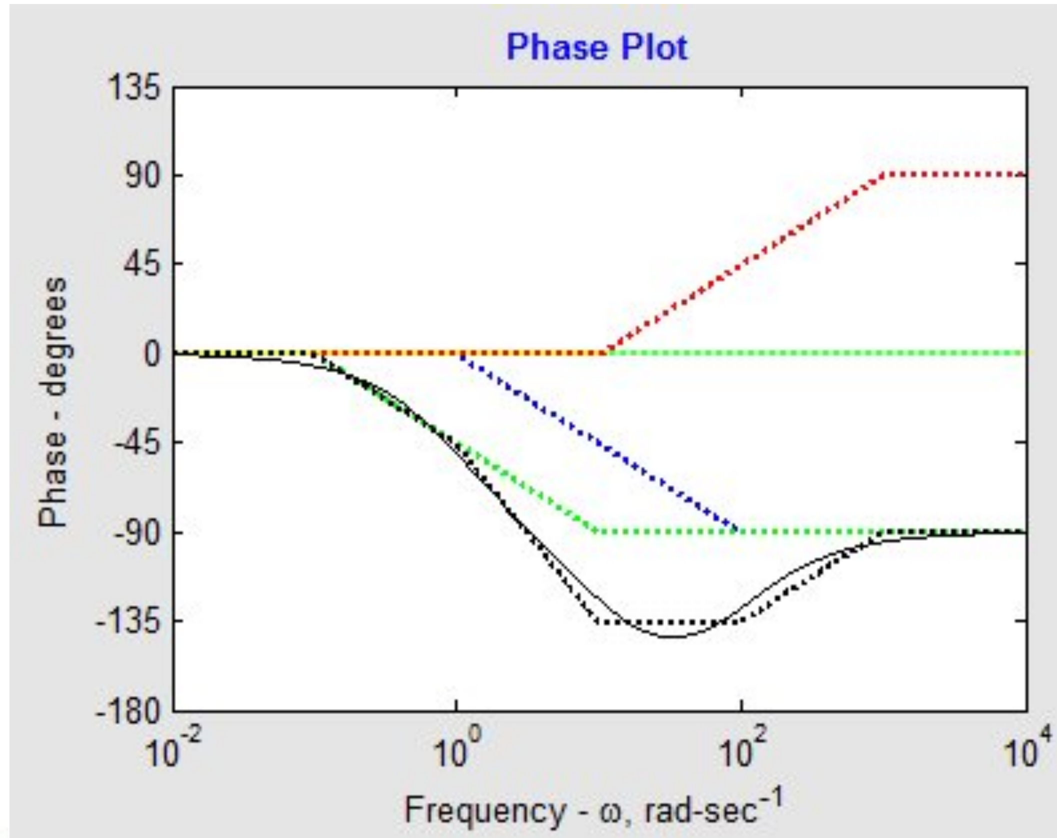
Outros Exemplos:

- $$G_4(s)=\frac{s+100}{(s+1)(s+10)}$$

$$=\frac{100\left(\frac{s}{100}+1\right)}{(s+1)\cdot 10\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$

$$=10\frac{\left(\frac{s}{100}+1\right)}{(s+1)\cdot\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$



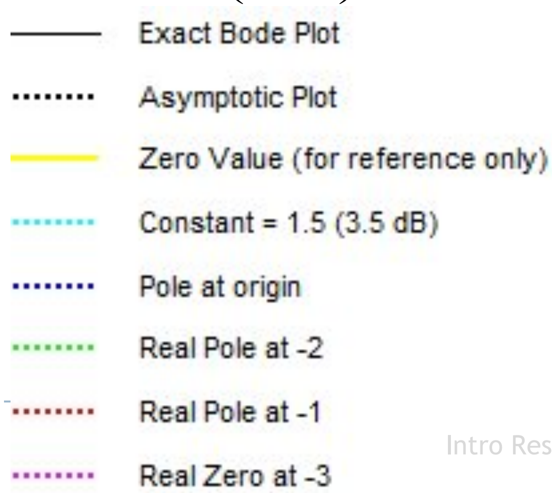


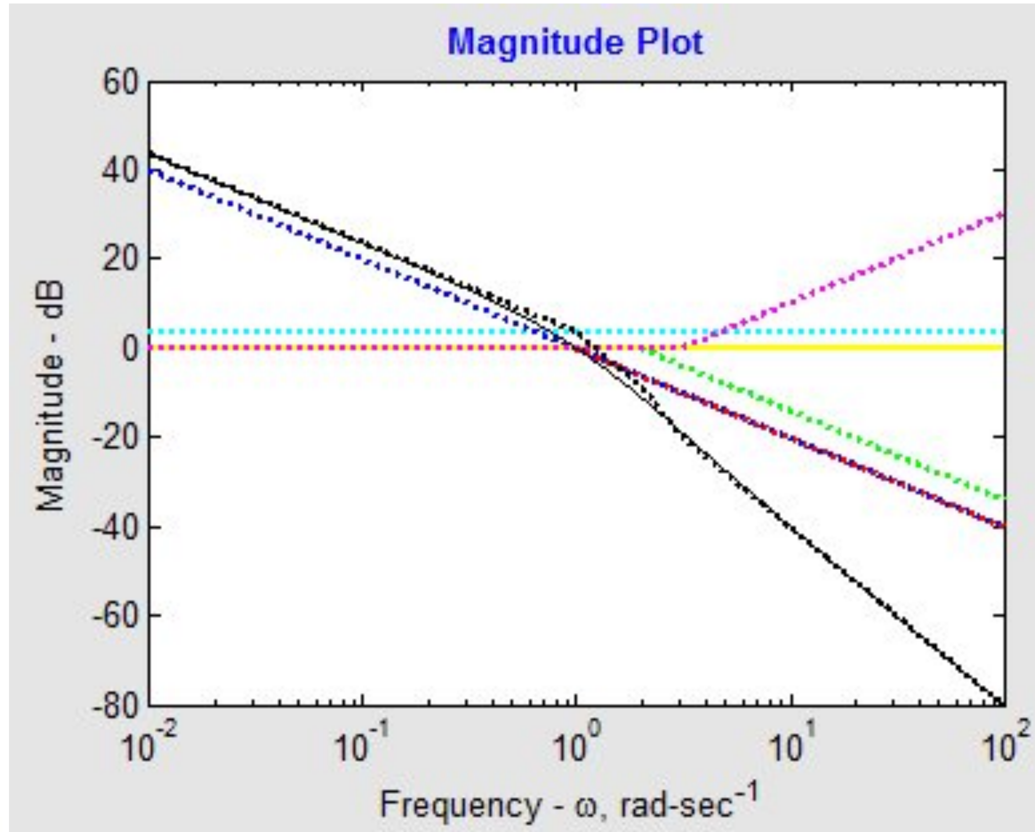
Outros Exemplos:

- $$G_5(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{3\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s(s+1)\cdot 2\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s(s+1)\cdot\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$





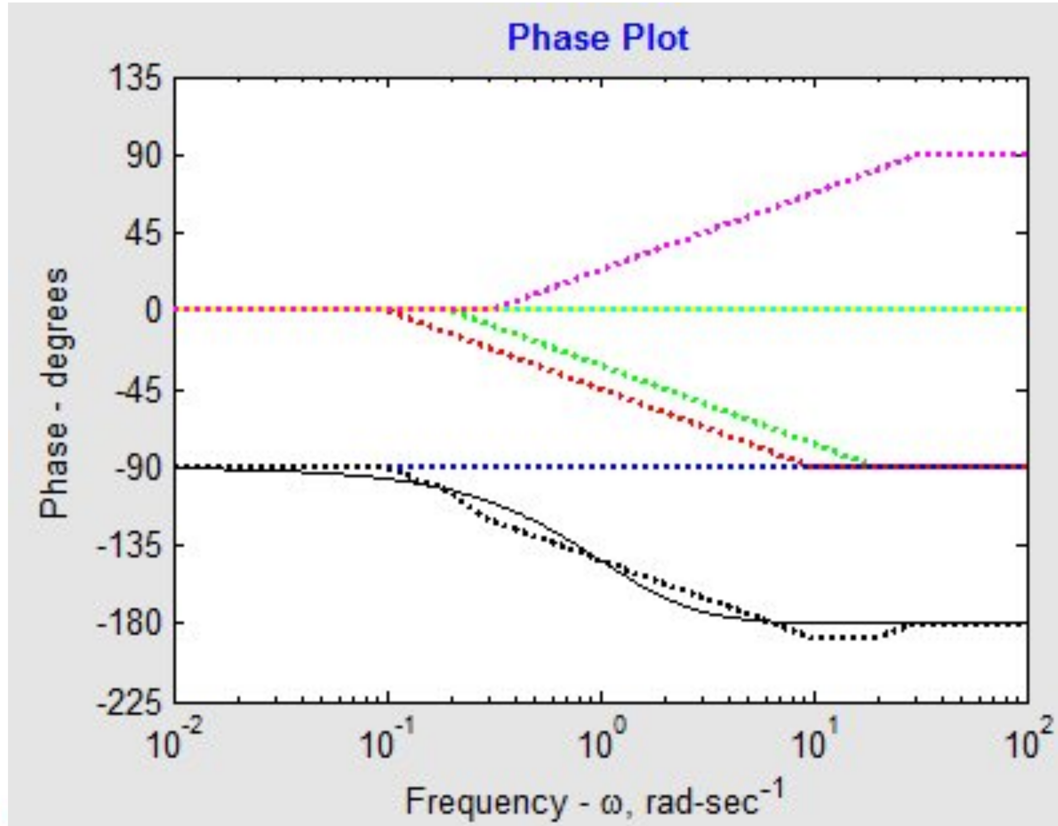
$$20\times\log(3/2) = 20\times 0{,}1761 = 3{,}5218$$

Outros Exemplos:

- $$G_5(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{3\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s(s+1)\cdot 2\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s(s+1)\cdot\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$



Exact Bode Plot

Asymptotic Plot

Zero Value (for reference only)

Constant = 1.5 (3.5 dB)

Pole at origin

Real Pole at -2

Real Pole at -1

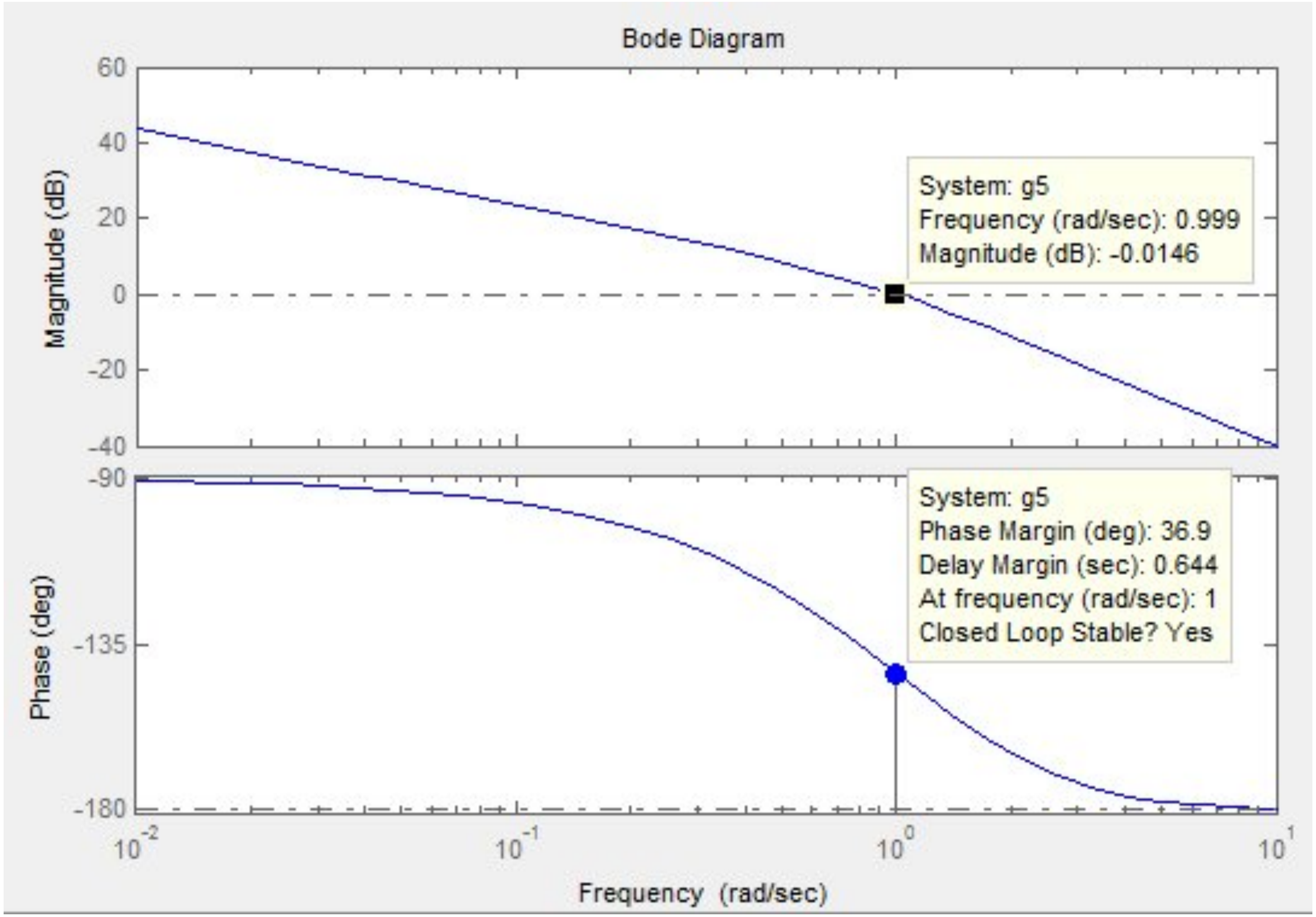
Real Zero at -3

Outros Exemplos:

$$G_5(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{3\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s(s+1)\cdot 2\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s(s+1)\cdot\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$



Outros Exemplos:

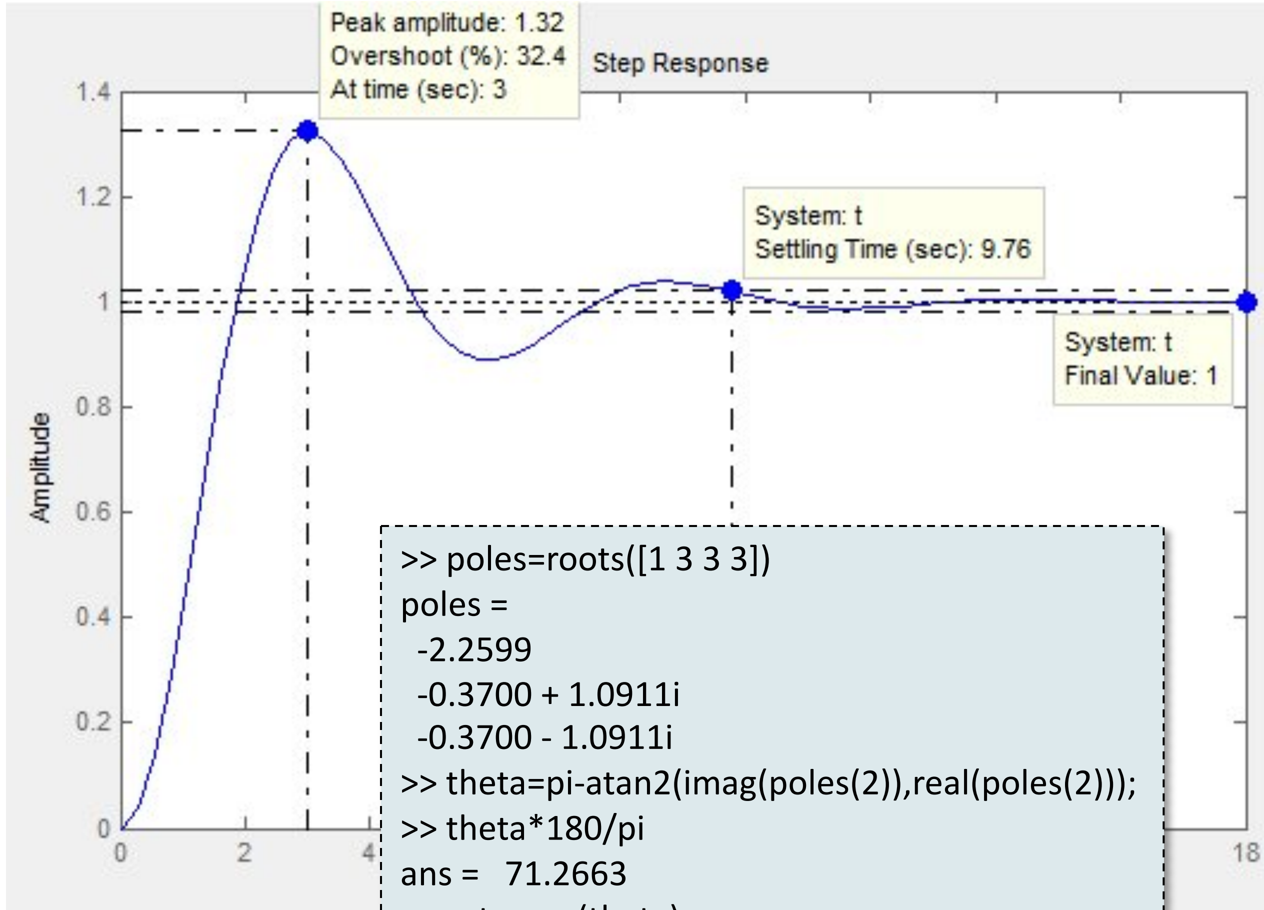
$$G_5(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$$

$$T_5(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$= \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)+(s+3)}$$

$$= \frac{(s+3)}{s^3+3s^2+3s+2}$$

$$= \frac{(s+3)}{(s+2{,}26)(s+0{,}37 \pm j1{,}09)}$$




```
>> poles=roots([1 3 3 3])
poles =
  -2.2599
  -0.3700 + 1.0911i
  -0.3700 - 1.0911i
>> theta=pi-atan2(imag(poles(2)),real(poles(2)));
>> theta*180/pi
ans =   71.2663
>> zeta=cos(theta)
zeta =    0.3212
>> OS=exp(-(zeta*pi)/(sqrt(1-zeta*zeta)))*100
OS =   34.4580
>>
```

Sistemas com polos complexos

- Seja: $$G(s) = s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 = w_n^2\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\zeta\frac{s}{w_n} + 1\right)$$
- Em baixas frequências:

$$G(s) \approx w_n^2 = w_n^2 \angle 0^o \qquad 20\log M = 20\log\left|G(jw)\right| = 20\log w_n^2$$

- Em altas frequências:

$$20\log M = 20\log\left|G(jw)\right| = 20\log w^2 = 40\log w$$

$$G(s) \approx s^2$$

$$G(jw) \approx -w^2 = w^2 \angle 180^o$$

- Detalhes:
  - w_n: frequência de corte (quebra).
  - Fase em w_n:

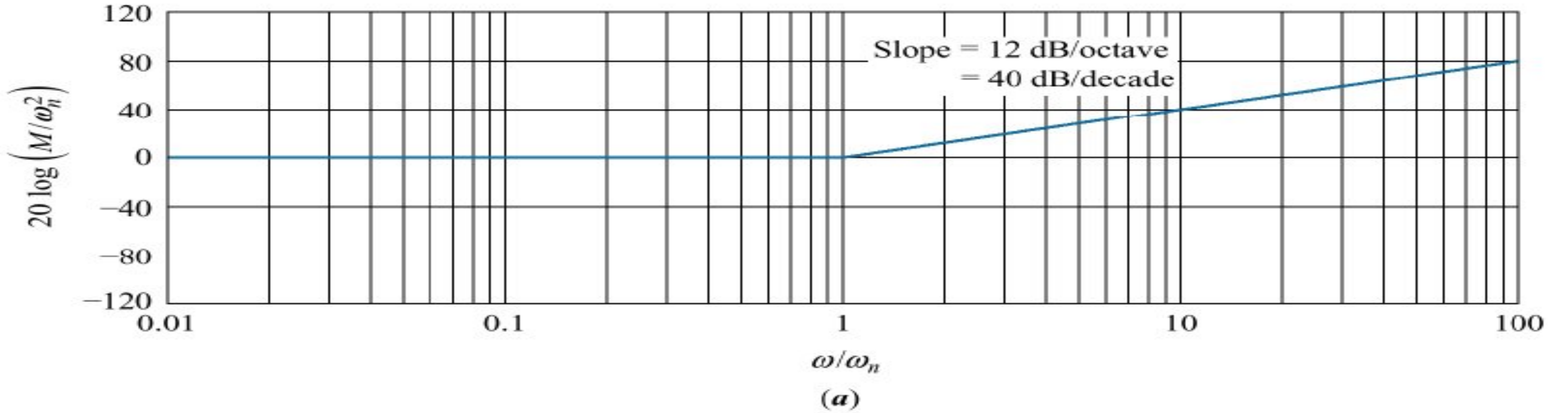
$$G(jw) = s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2\Big|_{s\to jw} = \left(w_n^2 - w^2\right) + j2\zeta w_n w$$

em wn o resultado é: $j2\zeta w_n^2$ assim a fase na frequência natural é de +90º

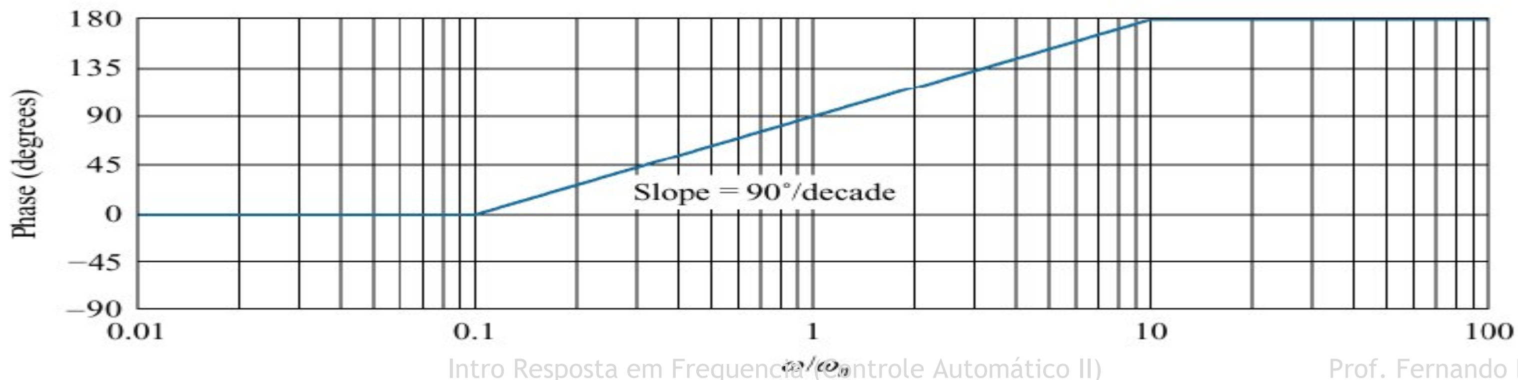
Sistemas com polos complexos

- Seja: $$G(s) = s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 = w_n^2\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\zeta\frac{s}{w_n} + 1\right)$$
- Em baixas frequências: $G(s) \approx w_n^2 = w_n^2\angle 0^o$ $\quad 20\log M = 20\log|G(jw)| = 20\log w_n^2$
- Em altas frequências: $G(s) \approx s^2$ $\quad 20\log M = 20\log|G(jw)| = 20\log w^2 = 40\log w$

$G(jw) \approx -w^2 = w^2\angle 180^o$



(*a*)



Sistemas com polos complexos
Correções em diagrama assintótico..

- Seja:

$$G(s) = s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 = w_n^2\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\zeta\frac{s}{w_n} + 1\right)$$

- Um polinômio de 1ª-orden resulta nuna diferencia não superior a 3,01 dB na magnitude e 5,71° em relação à fase (no ponto do polo).

- Um polinômio de 2ª-orden pode implicar maior disparidade, depende do valor de ζ (na localização dos polos complexos):

$$G(jw) = s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2\Big|_{s\to jw} = \left(w_n^2 - w^2\right) + j2\zeta w_n w$$

$$M = \sqrt{(w_n^2 - w^2)^2 + (2\zeta w_n w)^2}$$

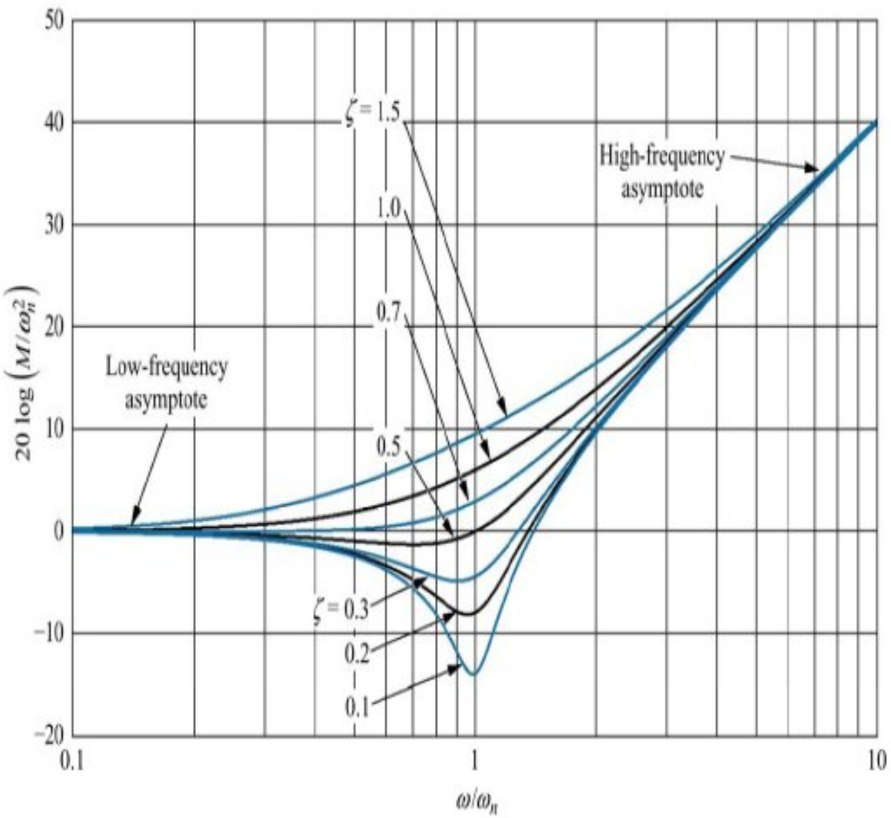
$$Fase = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta w_n w}{w_n^2 - w^2}\right)$$

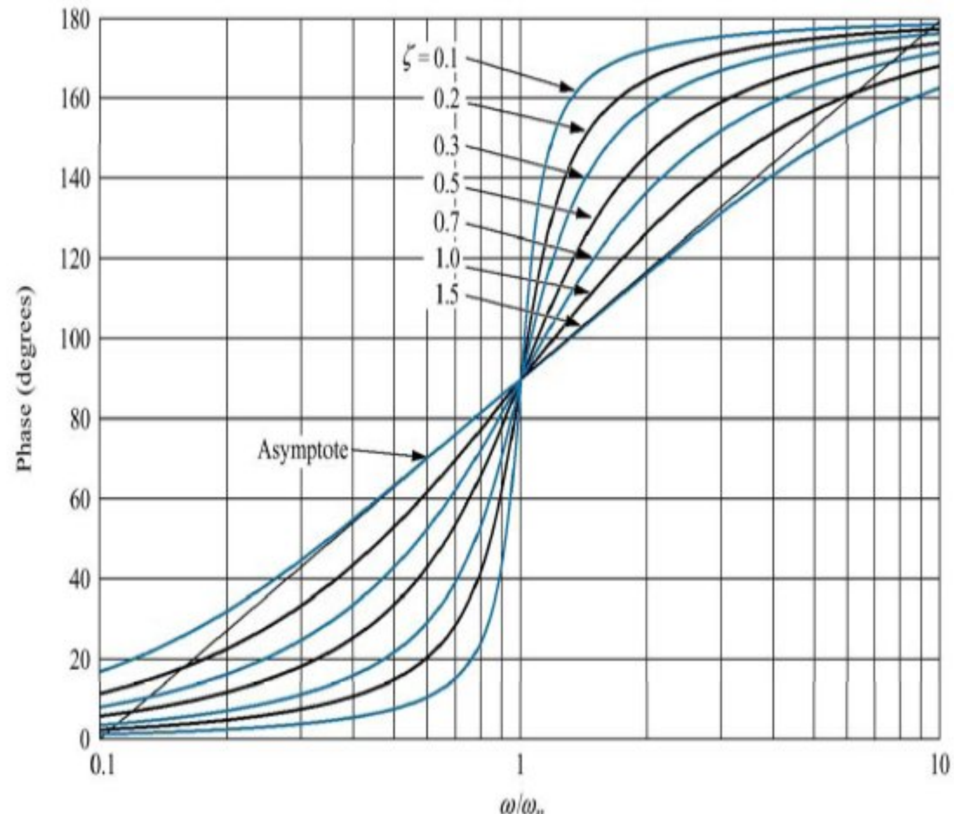
Sistemas com polos complexos
Correções em diagrama assintótico..

- Seja: $G(s) = s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 = w_n^2\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\zeta\frac{s}{w_n} + 1\right)$

$$M = \sqrt{(w_n^2 - w^2)^2 + (2\zeta w_n w)^2}$$

$$Fase = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta w_n w}{w_n^2 - w^2}\right)$$



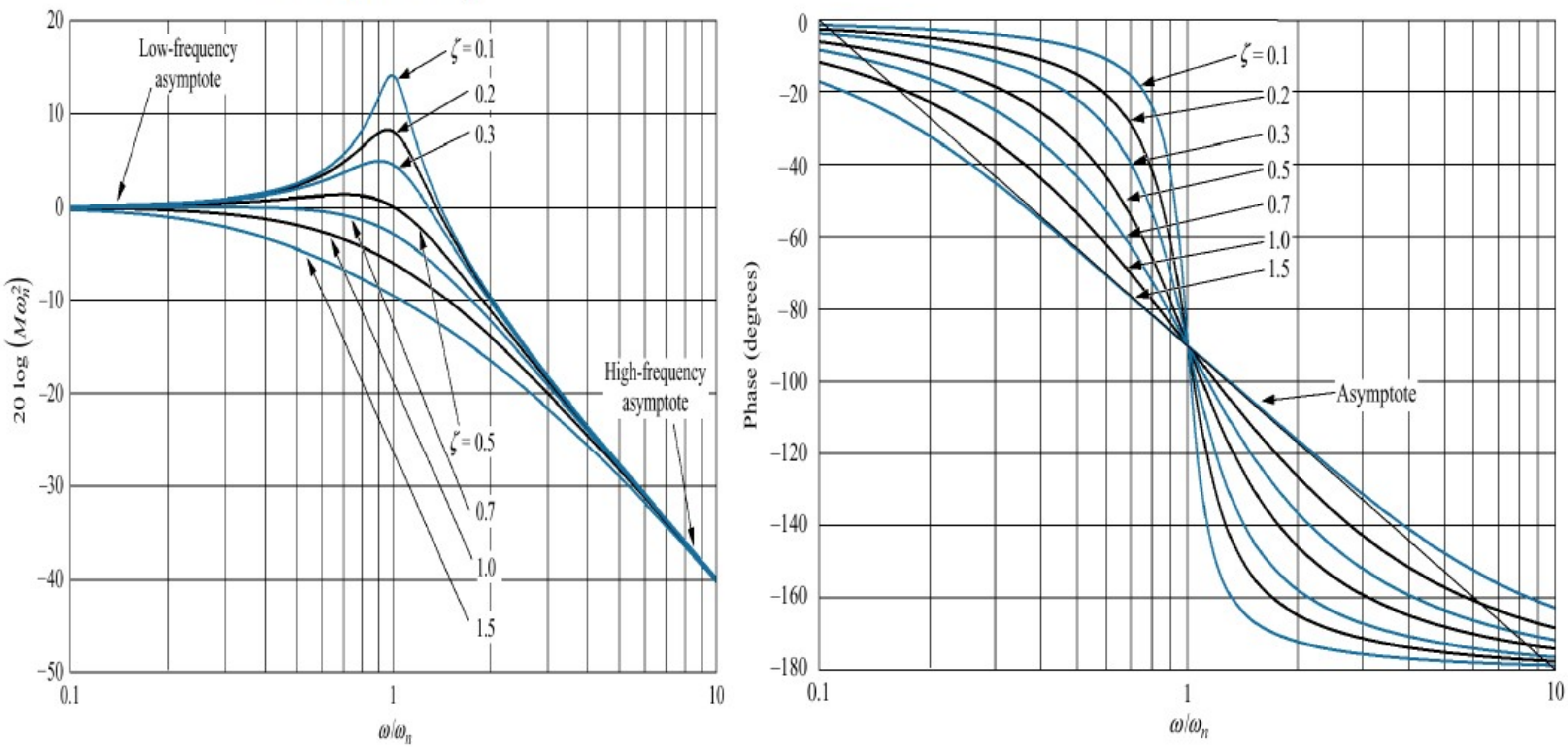


$$G(jw) = s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2\Big|_{s\to jw} = \left(w_n^2 - w^2\right) + j2\zeta w_n w$$

Sistemas com polos complexos
Correções em diagrama assintótico..

$$G(s) = 1/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$$

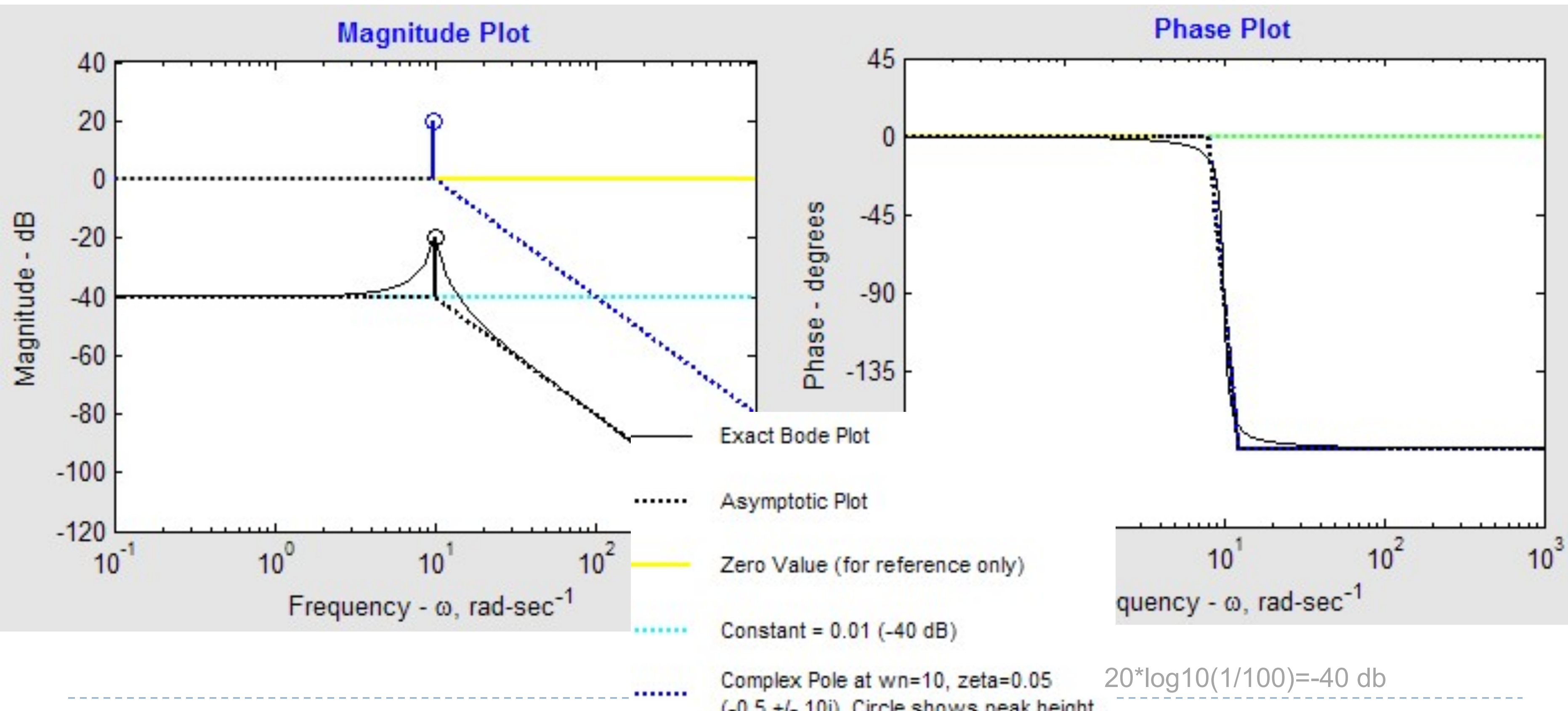
- The slope is –40dB/decade.
- The normalized magnitude at the scaled natural frequency is $-20\log 2\zeta\omega_n^2$



Exemplo polos complexos

- $$G(s)=\frac{1}{s^2+s+100}$$
$$G(s)=\frac{1}{(s+0{,}5+j10)(s+0{,}5-j10)}$$

$$G(s)=s^2+2\zeta w_n s+w_n^2=w_n^2\left(\frac{s^2}{w_n^2}+2\zeta\frac{s}{w_n}+1\right)$$
$$w_n=\sqrt{100}=10 \qquad \zeta=1/2w_n=1/20=0{,}05$$



20*log10(1/100)=-40 db

```
>> roots([1 3 50])
ans =
  -1.5000 + 6.9101i
  -1.5000 - 6.9101i
>>
```

Problemas sugeridos:

$$H_1(s) = 30\frac{s+10}{s^2+3s+50}$$

$$H(s) = 30\frac{s+10}{s^2+3s+50} = 30\frac{10}{50}\frac{\frac{s}{10}+1}{\frac{s^2}{50}+\frac{3}{50}s+1} = 6\frac{\frac{s}{10}+1}{\frac{s^2}{50}+\frac{3}{50}s+1}$$

- valor constante = 6,
- um zero e s=-10,
- e par de polos complexos conjugados em: raízes de: $s^2+3s+50=0$;
- Polos complexos em s=-1,5 ± *j*6,9 (onde *j*=sqrt(-1)).

Uma maneira mais comum (e útil para nossos propósitos) de expressar isso é usar a notação padrão para um polinômio de segunda ordem:

$$\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right)+1 \qquad \omega_0 = \sqrt{50} = 7.07, \quad \zeta = \frac{3\sqrt{50}}{2\cdot 50} = 0.21$$

Exact Bode Plot

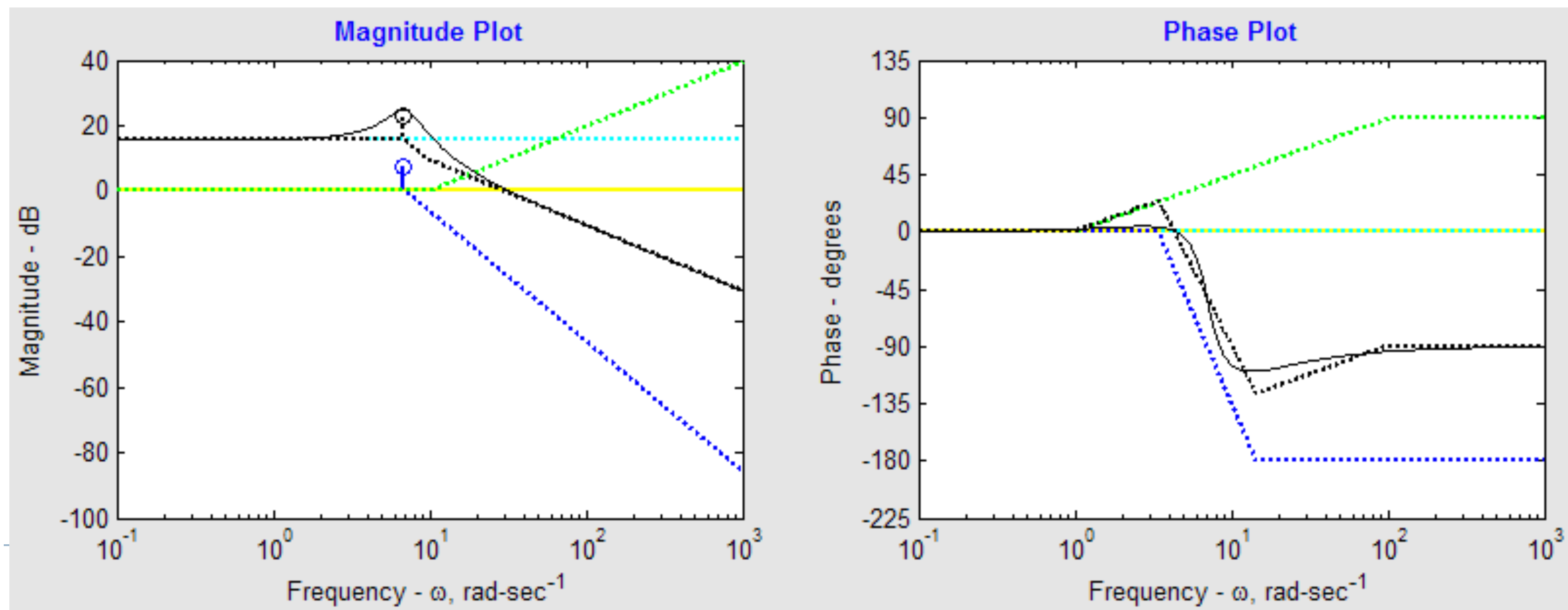
Asymptotic Plot

Zero Value (for reference only)

Constant = 6 (16 dB)

Complex Pole at wn=7.1, zeta=0.21 (-1.5 +/- 6.9j) Circle shows peak height.

Real Zero at -10



Problemas sugeridos:

$$H_2(s) = 30\frac{5s}{s^2 + 3s + 50}$$

Exact Bode Plot

Asymptotic Plot

Zero Value (for reference only)

Constant = 3 (9.5 dB)

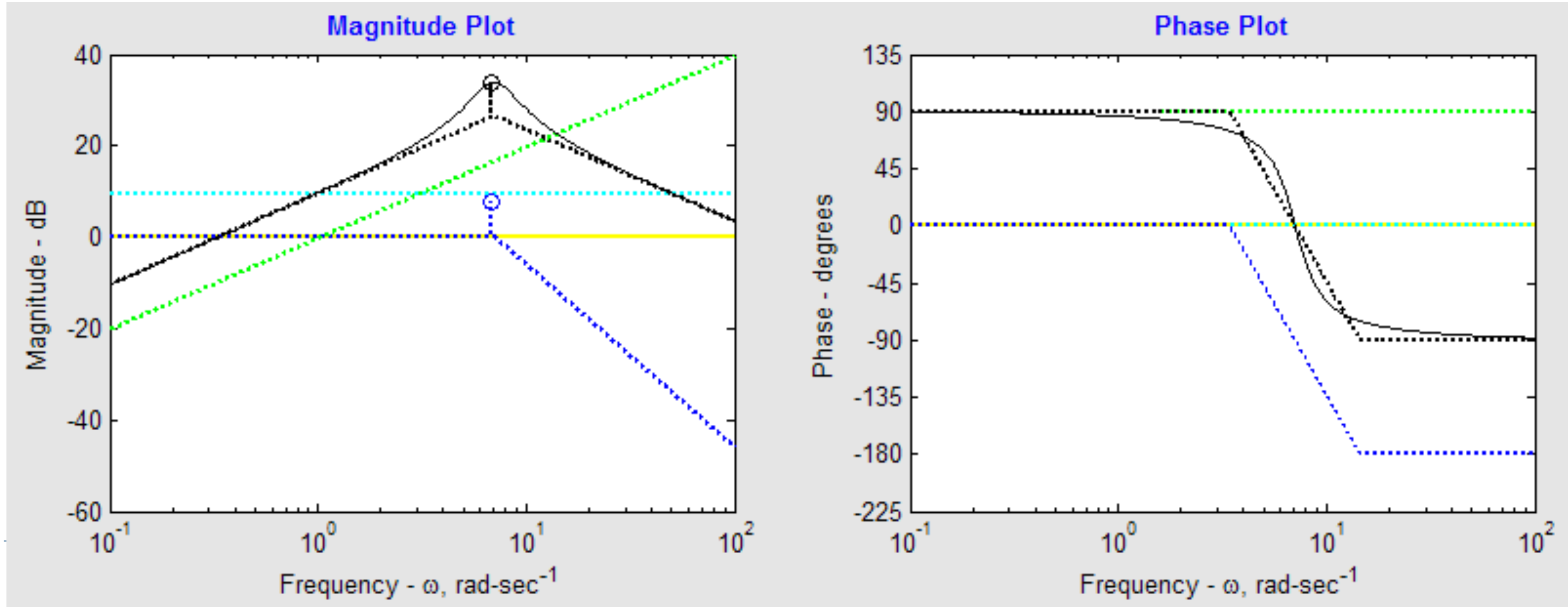
Complex Pole at wn=7.1, zeta=0.21
(-1.5 +/- 6.9j) Circle shows peak height.

Zero at origin

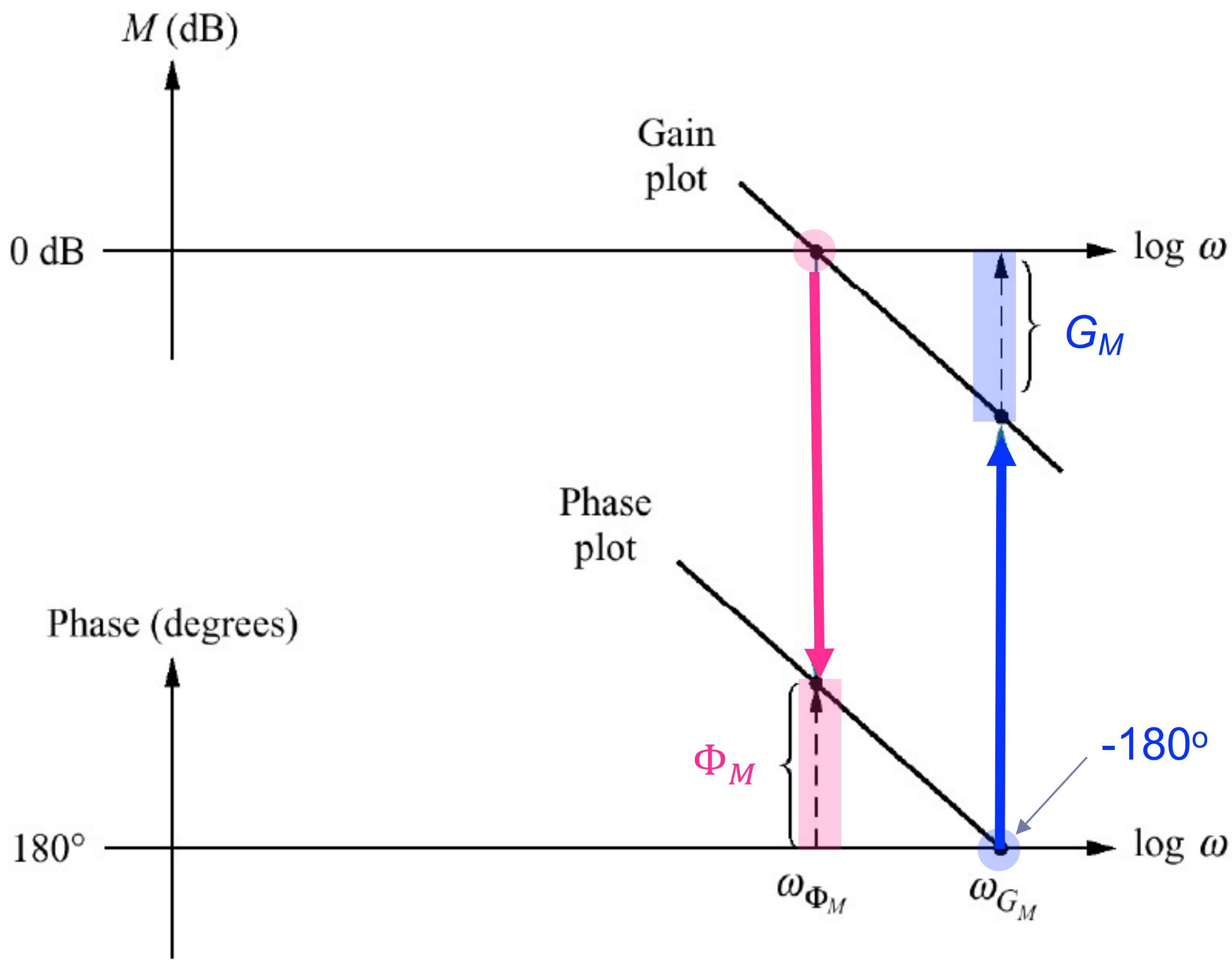
$$H(s) = 30\frac{s+10}{s^2+3s+50} = 30\frac{10}{50}\frac{\frac{s}{10}+1}{\frac{s^2}{50}+\frac{3}{50}s+1} = 6\frac{\frac{s}{10}+1}{\frac{s^2}{50}+\frac{3}{50}s+1}$$

- valor constante = 6,
- um zero e s=-10,
- e par de polos complexos conjugados em: raízes de: $s^2+3s+50=0$, ou:

$$\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1 \qquad \omega_0 = \sqrt{50} = 7.07, \quad \zeta = \frac{3\sqrt{50}}{2\cdot 50} = 0.21$$

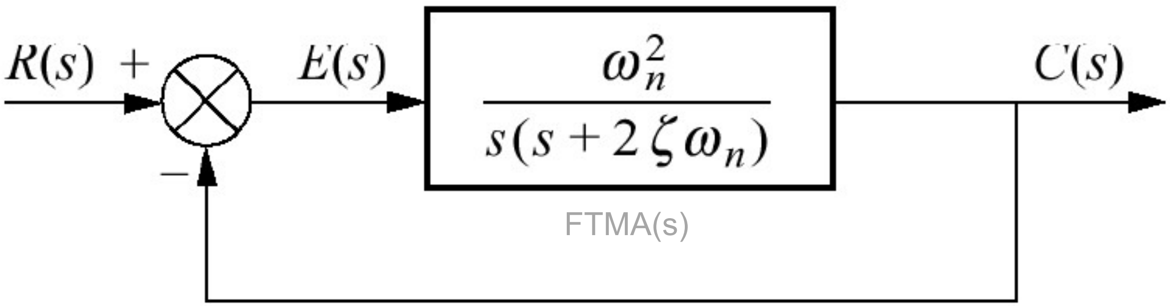


Estabilidade, Margem de Ganho, G_M e Margem de Fase, Φ_M através do Diagrama de Bode...



Relação entre Transitório de Malha Fechada e Resposta em Frequência de malha aberta

- Fator de amortecimento, ζ e resposta em frequência de malha fechada, *T*(*s*):



$$\frac{C(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

FTMF(s)

$$M = |T(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}$$

$$M_P = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_P = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

Relação entre Transitório de Malha Fechada e Resposta em Frequência de malha aberta

- Através do Diagrama de Bode de um sistema ainda em malha aberta, *G*(*s*), se pode prever o porcentual de sobressinal, %*OS*, do sistema em malha fechada, *T*(*s*):
  - Este valor se pode obter a partir da margem de fase do sistema em malha aberta:

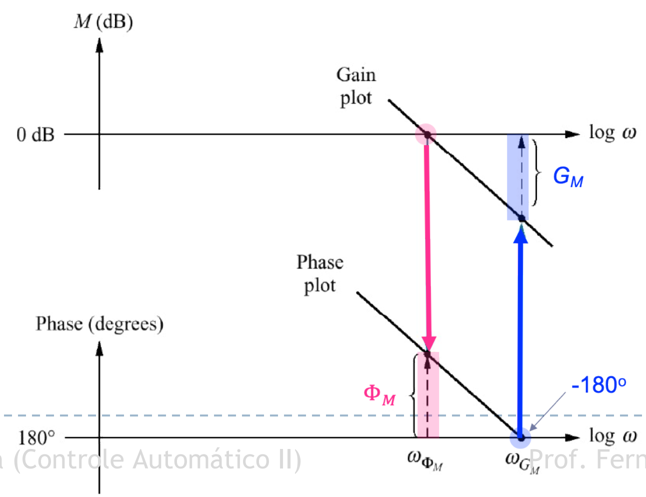
$$G(s) \xrightarrow{\text{Bode}} \Phi_M$$

$$\Phi_M \rightarrow \zeta$$

$$T(s) \leftarrow \zeta \rightarrow \%OS = e^{-\left(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}\right)} \times 100$$

Se é possível variar o Φ_M, então se pode variar o %OS!

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}$$



Relação entre Transitório de Malha Fechada e Resposta em Frequência de malha aberta

Sistema malha aberta:

$$G(s)=\frac{w_n^2}{s(s+2\zeta w_n)}$$

Sistema malha fechada:

$$T(s)=\frac{w_n^2}{s^2+2\zeta w_n+w_n^2}$$

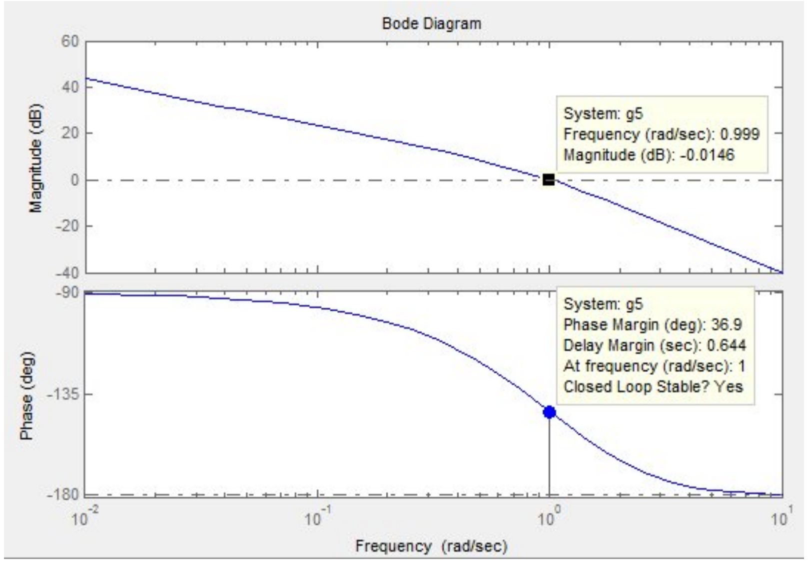
Encontrando frequência w_1 onde $\left|G(jw)\right|=1$

$$\left|G(jw)\right|=\frac{w_n^2}{\left|-w^2+j2\zeta w_n w\right|}=1$$

$$w_1=w_n\sqrt{-2\zeta^2+\sqrt{1+4\zeta^4}}$$

$$\angle G(jw)=-90-\tan^{-1}\left(\frac{w_1}{2\zeta w_n}\right)$$

$$=-90-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{-2\zeta^2+\sqrt{4\zeta^4+1}}}{2\zeta}\right)$$



Como $\Phi M=\angle G(jw)-180^o$:

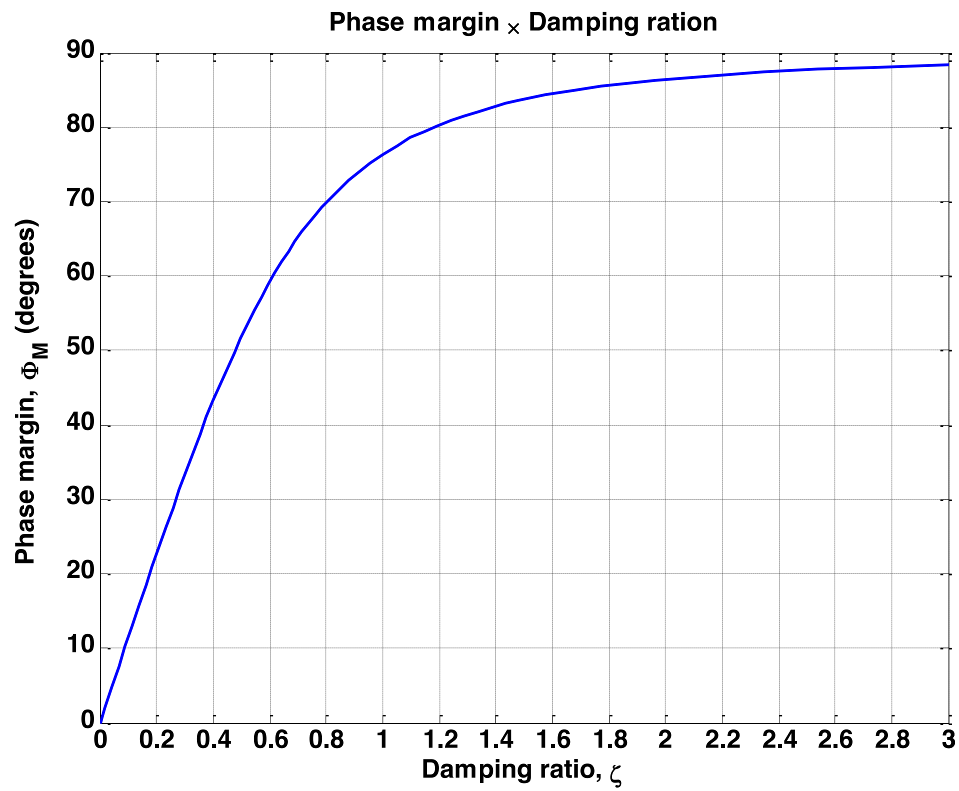
$$\Phi_M=90-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{-2\zeta^2+\sqrt{4\zeta^4+1}}}{2\zeta}\right)$$

$$\Phi_M=\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2+\sqrt{4\zeta^4+1}}}\right)$$

Relação entre Transitório de Malha Fechada e Resposta em Frequência de malha aberta

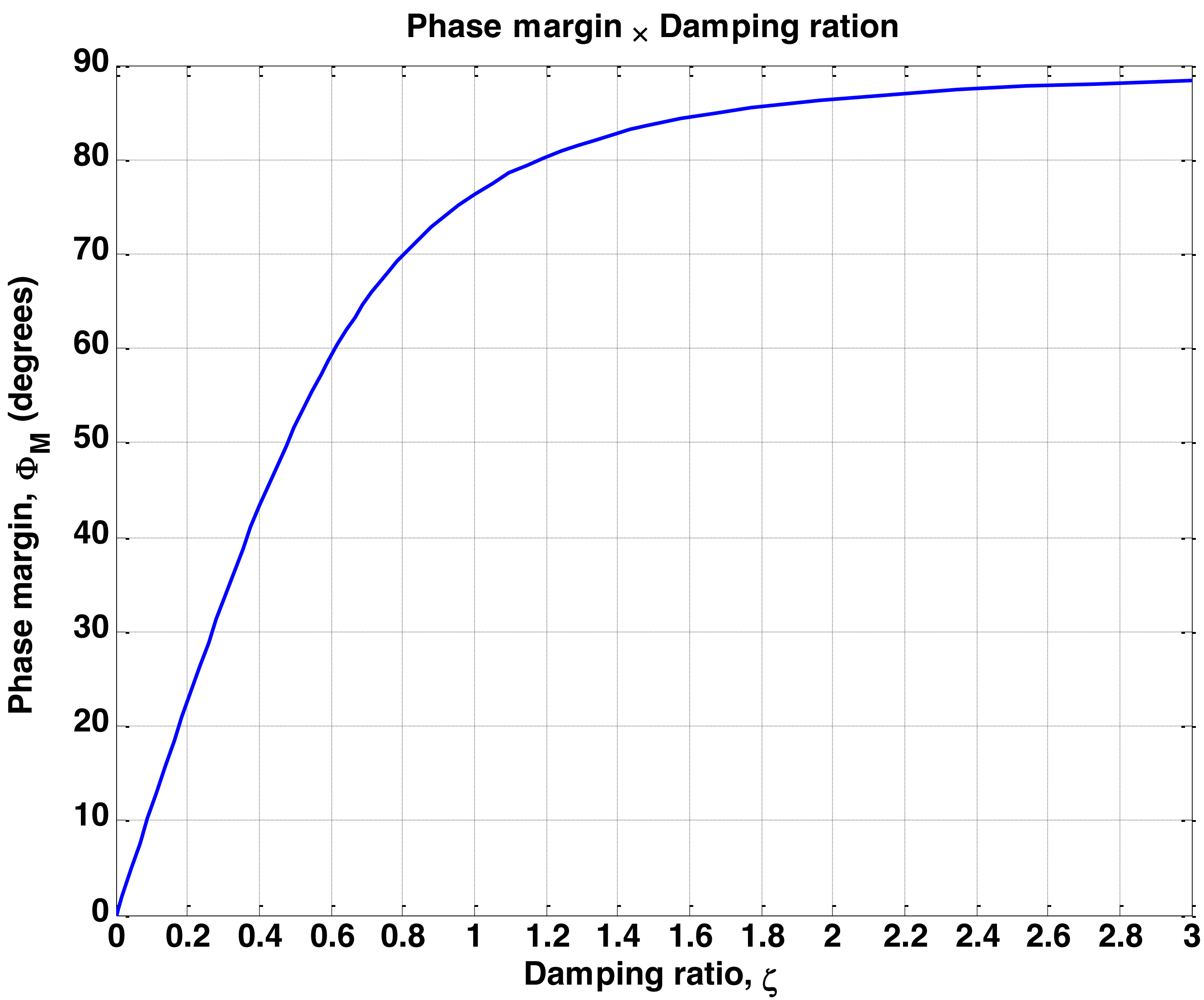
$$\Phi_M = 90 - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{-2\zeta^2+\sqrt{4\zeta^4+1}}}{2\zeta}\right)$$

$$\Phi_M = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2+\sqrt{4\zeta^4+1}}}\right)$$

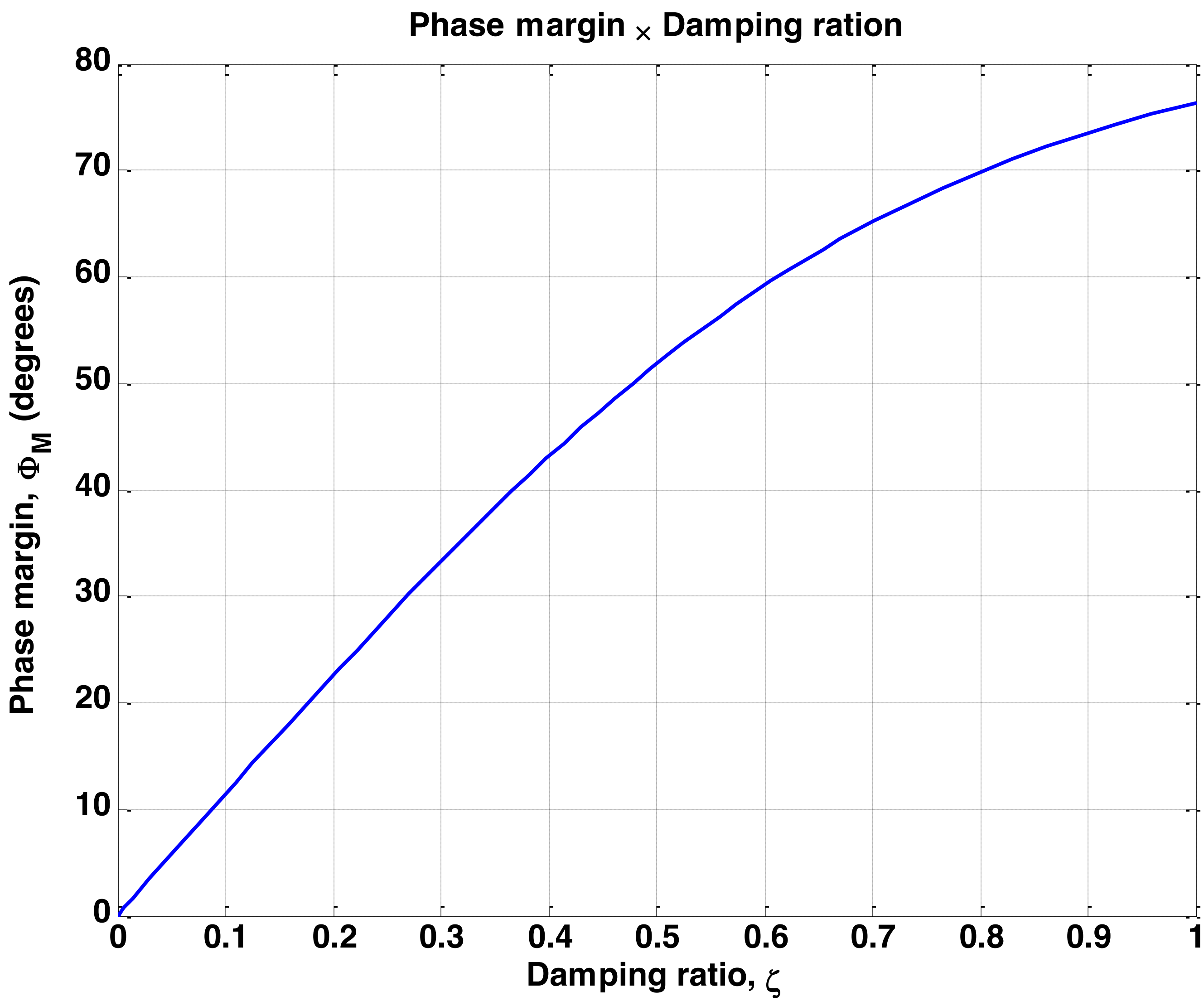



```
>> fplot(@(zeta) atan2(2*zeta,sqrt(-2*zeta*zeta+sqrt(1+4*zeta^4)))*180/pi, [0 3] )
>> grid
>> title('Phase margin \times Damping ration')
>> xlabel('Damping ratio, \zeta')
>> ylabel('Phase margin, \Phi_M (degrees)')
```

Relação entre Transitório de Malha Fechada e Resposta em Frequência de malha aberta



Relação entre Transitório de Malha Fechada e Resposta em Frequência de malha aberta

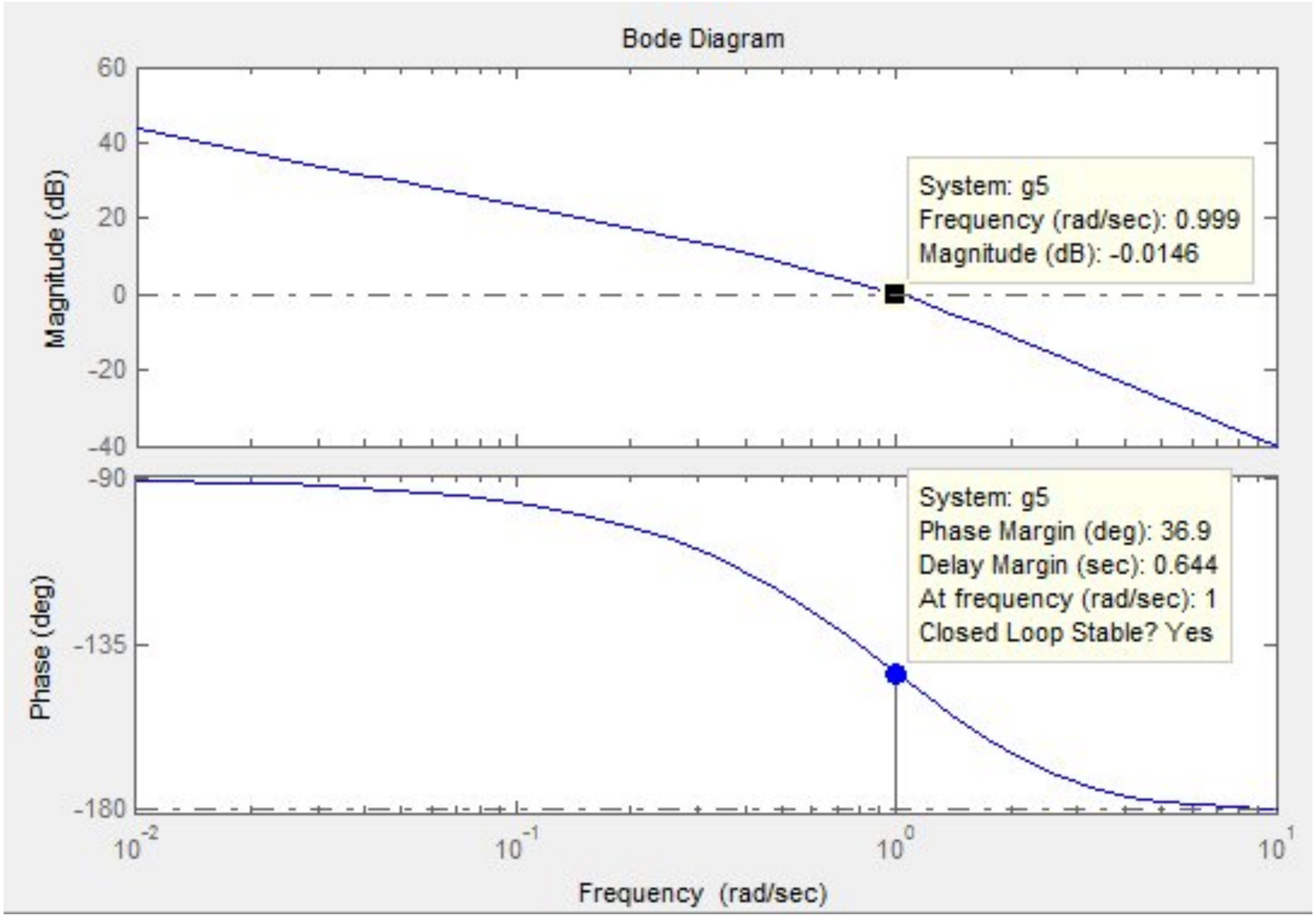


Outros Exemplos:

$$G_5(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{3\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s(s+1)\cdot 2\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s(s+1)\cdot\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$



Compensador de Atraso de Fase (*Lag*)

1. Melhorar constante de erro estático sem comprometer a estabilidade do sistema;
2. Aumentar a Margem de Fase do sistema de forma a satisfazer a resposta transitória desejada.