Cap 10) Técnicas de Resposta em Frequência

Controle Automático

Prof. Fernando Passold

Criado: Nov-2009

atualizado: May-2020

$$G_c(s) = \underbrace{\frac{(1+\alpha T_1 s)}{(1+T_1 s)}}_{\text{Avanço de Fase}} \cdot \underbrace{\frac{(1+T_2 s)}{(1+\beta T_2 s)}}_{\text{Atraso de Fase}}$$

Objetivos

- Como usar resposta en freqüência:
  - Para ajustar o ganho de forma a respeitar especificações para la resposta transitória;
  - Como usar a resposta em frequência para melhorar o erro estacionário do sistema;
  - Como usar a resposta em frequência para melhorar a resposta transitória do sistema;
  - Como usar a resposta em frequência para melhorar tanto o erro estacionário quanto a resposta transitória.

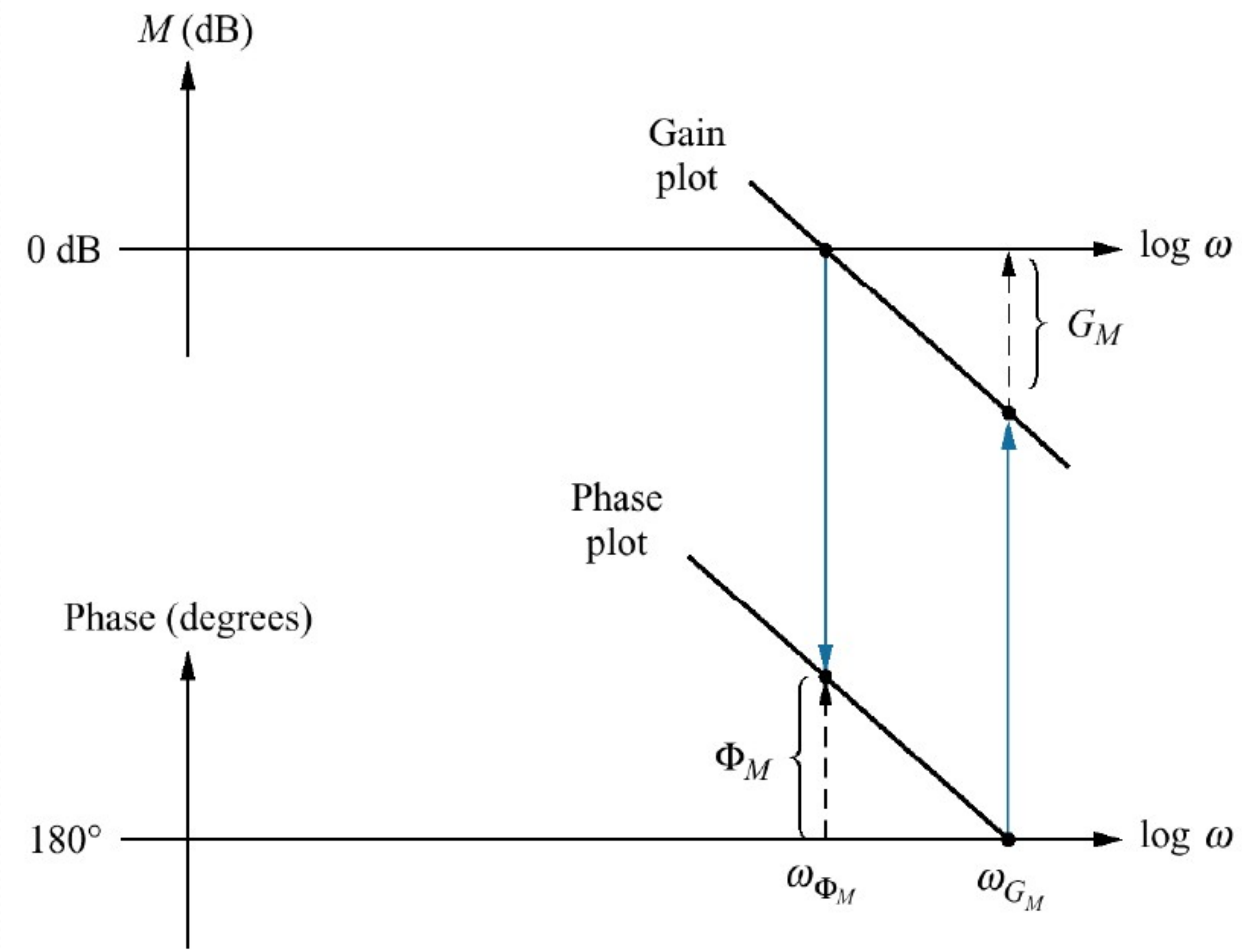
Introdução

- Estabilidade e projeto da resposta transitória mediante ajuste de ganho:
  - Métodos baseados em resposta em frequência, diferentes do método baseado em RL, podem ser realizados sem a obrigatoriedade de uma ferramenta computacional, usando aproximações assintóticas.

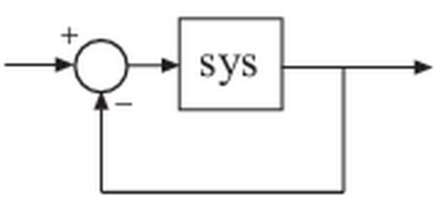
- O projeto da resposta transitória mediante compensação em cascata:
  - Métodos baseados em resposta em frequência não são tão intuitivos como os baseados em RL.

- Projeto dos erros de estado estacionário mediante compensação em cascata:
  - Métodos baseados em resposta em frequência facilitam o projecto de compensadores derivativos de forma a acelerar a resposta do sistema ao mesmo tempo respeitando requisitos de erros de estado estacionário.

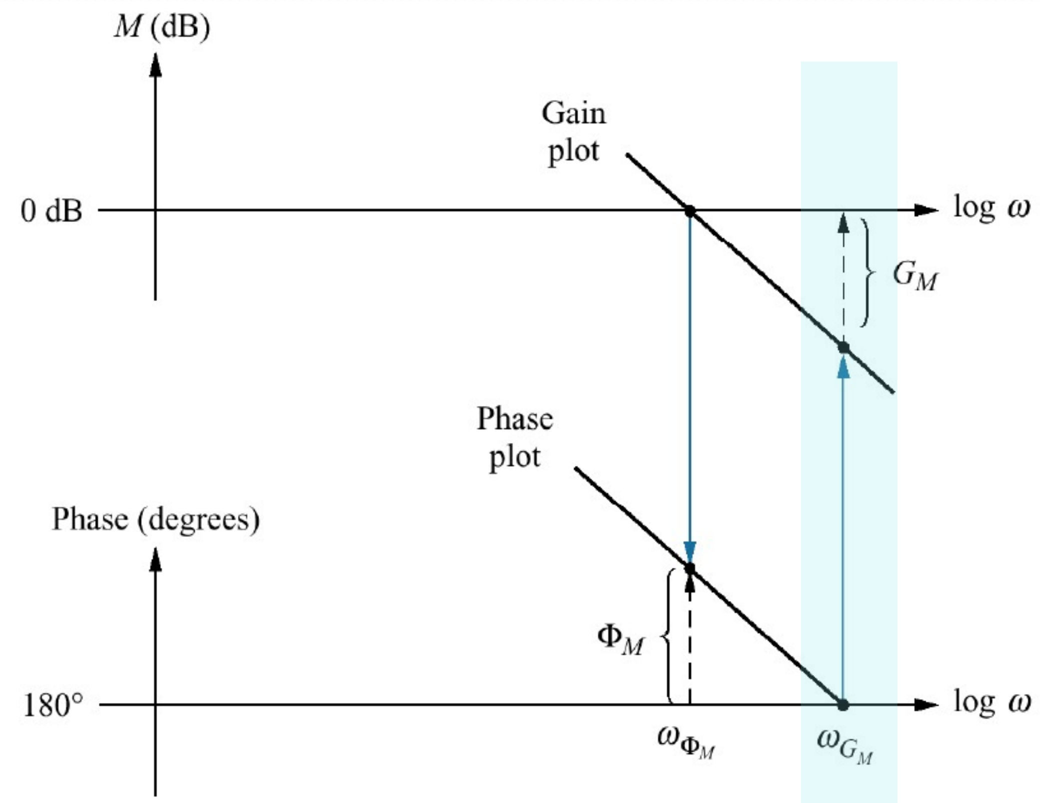
Estabilidade, Margem de Ganho e Margem de Fase através do **Diagrama de Bode**…



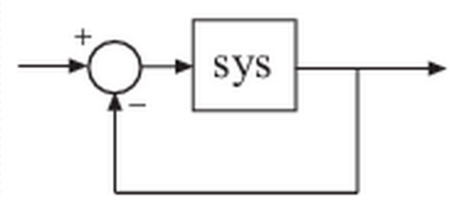
O ganho e a margem de fase de um sistema indica a estabilidade relativa do sistema em malha fechada formado pela aplicação de realimentação negativa unitária.



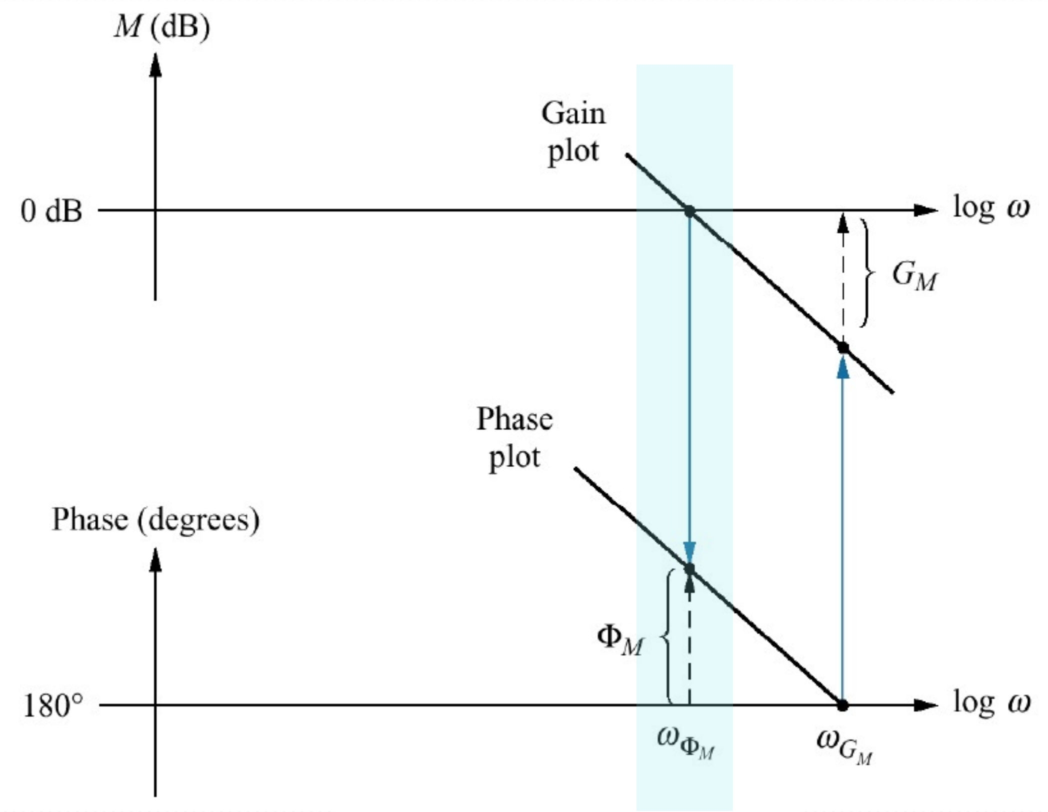
Estabilidade, Margem de Ganho e Margem de Fase através do **Diagrama de Bode**…

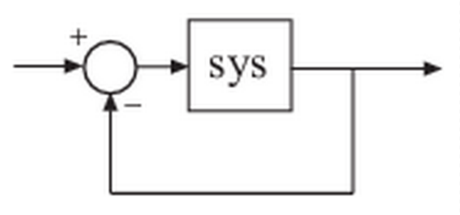


A **margem de ganho**, G_M, é a quantidade de aumento ou diminuição de ganho necessária para fazer com que o loop inverta seu sinal (ângulo de fase se torna −180° = realimentação positiva ⇛ instável) na freqüência ω_{G_M}. Em outras palavras, a margem de ganho é $1/g$ se g é o ganho na frequência de fase de −180°.



Estabilidade, Margem de Ganho e Margem de Fase através do **Diagrama de Bode**…





A **margem de fase**, Pm (ou ϕ_M), é a diferença entre a fase da resposta e −180° quando o ganho do loop é 1.0 (ou 0 dB).

A freqüência ω_{Φ_M} na qual a magnitude é 1,0 (0 dB) é chamada de freqüência de ganho unitário ou **frequência de cruzamento de ganho**.

Geralmente, verifica-se que as margens de ganho ≥ 3; combinado com margens de fase entre 30º e 60º graus resultam em compensações razoáveis entre a largura de banda e a estabilidade.

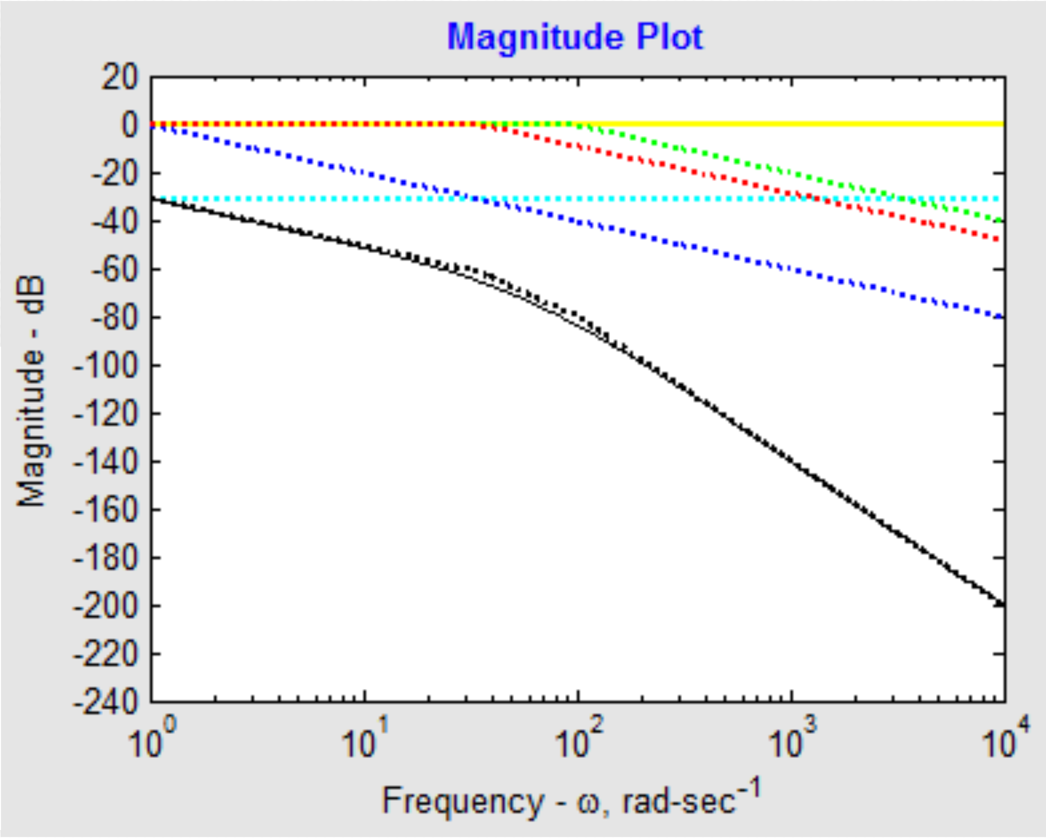
Estabilidad

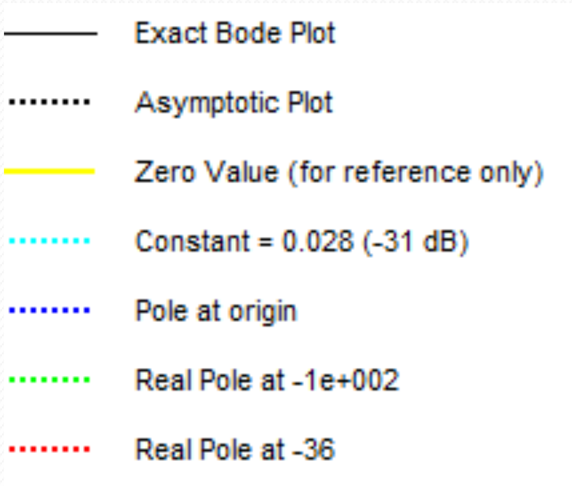
- **Ejemplo:** $G(s) = \dfrac{100}{s(s+100)(s+36)}$

$$G(s) = \frac{100}{s \cdot 100 \cdot \left(\dfrac{s}{100}+1\right) \cdot 36 \cdot \left(\dfrac{s}{36}+1\right)}$$

$$20\log(36^{-1}) = -20\log(36)$$

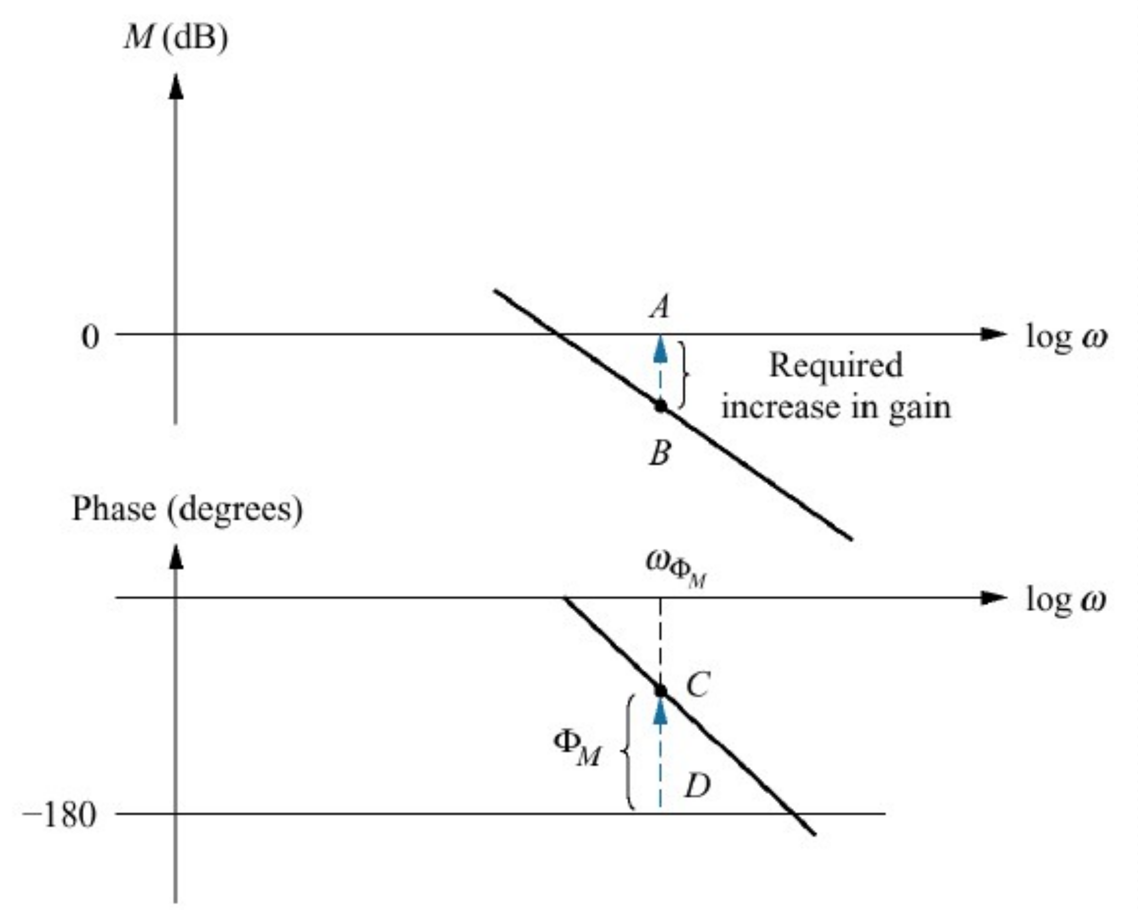
$$= -31{,}1261\ \text{dB}$$





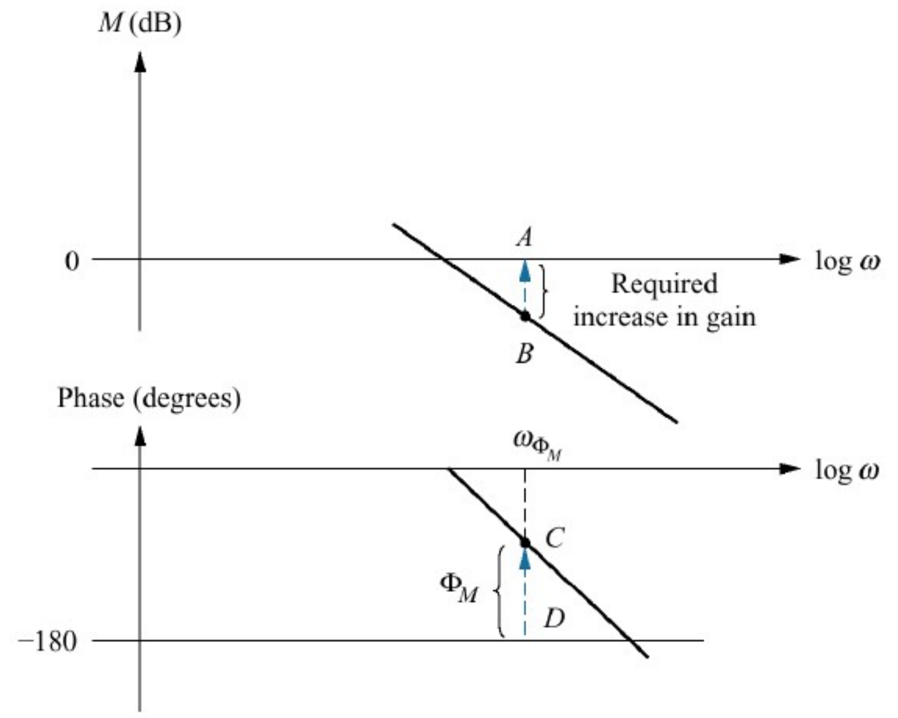
Ajuste da Resposta Transitória via ajuste de ganho

- Determinando o ganho obedecendo certa especificação de sobressinal:



Ajuste da Resposta Transitória via ajuste de ganho

- Determinando o ganho obedecendo certa especificação de sobressinal:



$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\%OS/100)}}$$

(4.39)

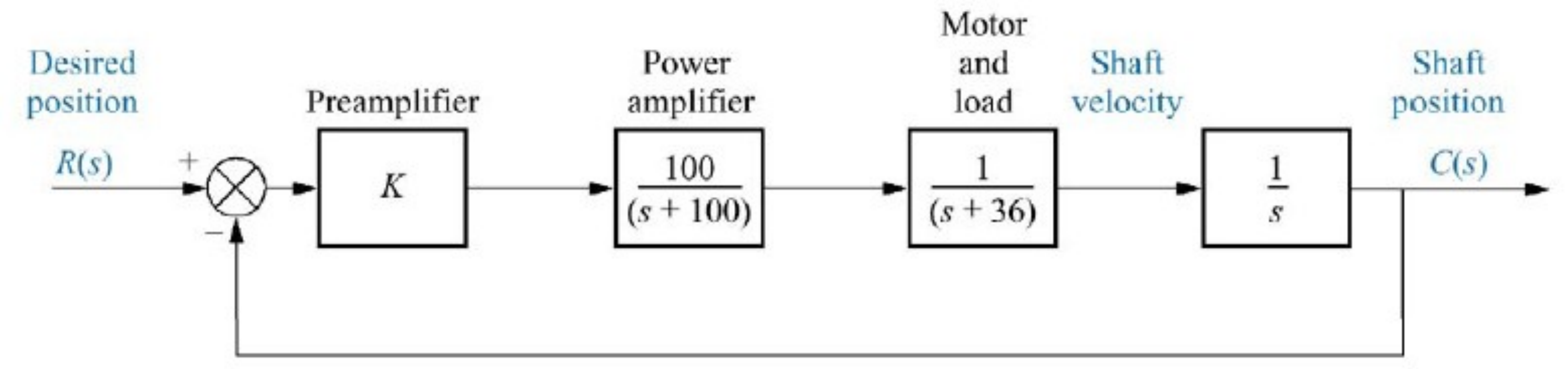
$$\Phi_M = \tan^{-1}\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}$$

(10.73)

- Procedimento:

1. Desenhar o diagrama de Bode (magnitude e fase) adotando um valor conveniente de ganho.
2. Usando as equações (4.39) e (10.73) determinar a margem de fase desejada de forma a obedecer o porcentual de sobressinal especificado para o sistema.
3. Encontrar la frecuencia, ω_{Φ_m} no diagrama de fase do Bode que permite alcançar a margen de fase desejada (ver figura ao lado).
4. Modificar o ganho de uma quantidade AB de forma a forçar que a curva de magnitude passe através de 0 dB na frequência ω_{Φ_M}.

Exemplo 11.1) Encontrar K para obter %OS= 9,5% para entrada degrau.



1. Escolher K=3.6 para iniciar o diagrama de Bode em 0 dB em ω = 0,1 rad/s:

$$G(s) = K\frac{100}{s(s+100)(s+36)} = \frac{K\cdot 100}{s\cdot 100\cdot\left(\frac{s}{100}+1\right)\cdot 36\cdot\left(\frac{s}{36}+1\right)} = \frac{K\cdot 100}{3600s\left(\frac{s}{100}+1\right)\left(\frac{s}{36}+1\right)}$$

Se *K*=3,6 então:

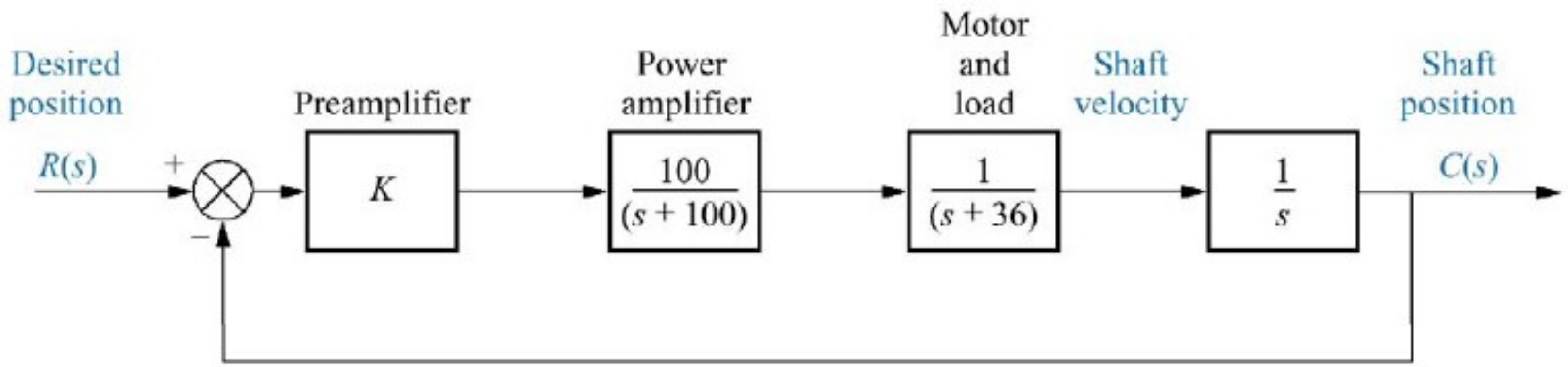
$$G(s) = \frac{1}{s\left(\frac{s}{100}+1\right)\left(\frac{s}{36}+1\right)}$$

2. Para sobressinal de 9,5%, o fator de amortecimento e Φ_M devem ser de:

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2+\ln^2(\%OS/100)}} = \frac{-\ln(9,5/100)}{\sqrt{\pi^2+\ln^2(9,5/100)}} = 0,5996$$

$$\Phi_M = \tan^{-1}\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2+\sqrt{1+4\zeta^4}}} = \tan^{-1}\frac{2\cdot 0,5996}{\sqrt{-2\cdot 0,5996^2+\sqrt{1+4\cdot 0,5996^4}}} = 59,1621^o$$

Exemplo 11.1) Encontrar K para obter %OS= 9,5% para entrada degrau.



1. Escolher K=3.6 para iniciar o diagrama de Bode em 0 dB em ω = 0,1 rad/s:

$$G(s)=K\frac{100}{s(s+100)(s+36)}=\frac{K\cdot 100}{s\cdot 100\cdot\left(\frac{s}{100}+1\right)\cdot 36\cdot\left(\frac{s}{36}+1\right)}=\frac{K\cdot 100}{3600s\left(\frac{s}{100}+1\right)\left(\frac{s}{36}+1\right)}$$

Se K=3,6 então: $$G(s)=\frac{1}{s\left(\frac{s}{100}+1\right)\left(\frac{s}{36}+1\right)}$$

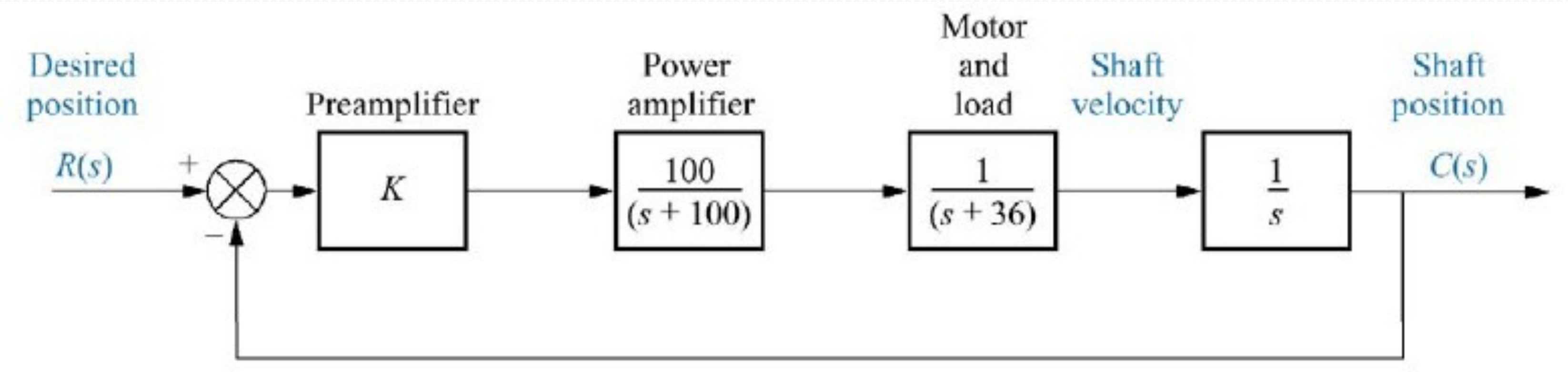
2. Para sobressinal de 9,5%, o fator de amortecimento e Φ_M devem ser de:

$$\zeta=\frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2+\ln^2(\%OS/100)}}=\frac{-\ln(9,5/100)}{\sqrt{\pi^2+\ln^2(9,5/100)}}=0,5996$$

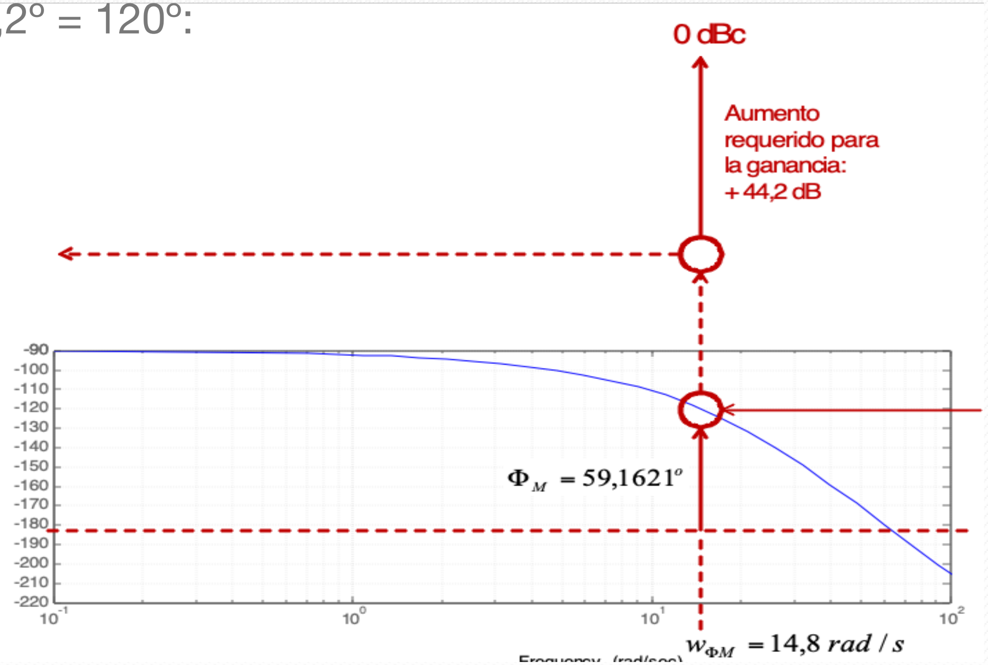
$$\Phi_M=\tan^{-1}\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2+\sqrt{1+4\zeta^4}}}=\tan^{-1}\frac{2\cdot 0,5996}{\sqrt{-2\cdot 0,5996^2+\sqrt{1+4\cdot 0,5996^4}}}=59,1621^o$$

```
clear                    % Clear variables
numg=[100];       % Define numerator of
G(s).
deng=poly([0 -36 -100]);
% Define denominator of G(s).
G=tf(numg,deng)    % Create and display
G(s).
pos=input('Type %OS  ');
% Input desired percent overshoot.
z=(-log(pos/100))/(sqrt(pi^2+log(pos/
100)^2));
% Calculate required damping ratio.
Pm=atan(2*z/
(sqrt(-2*z^2+sqrt(1+4*z^4))))*(180/pi);
% Calculate required phase
margin.
```

Exemplo 11.1) Encontrar K para obter %OS= 9,5% para entrada degrau.

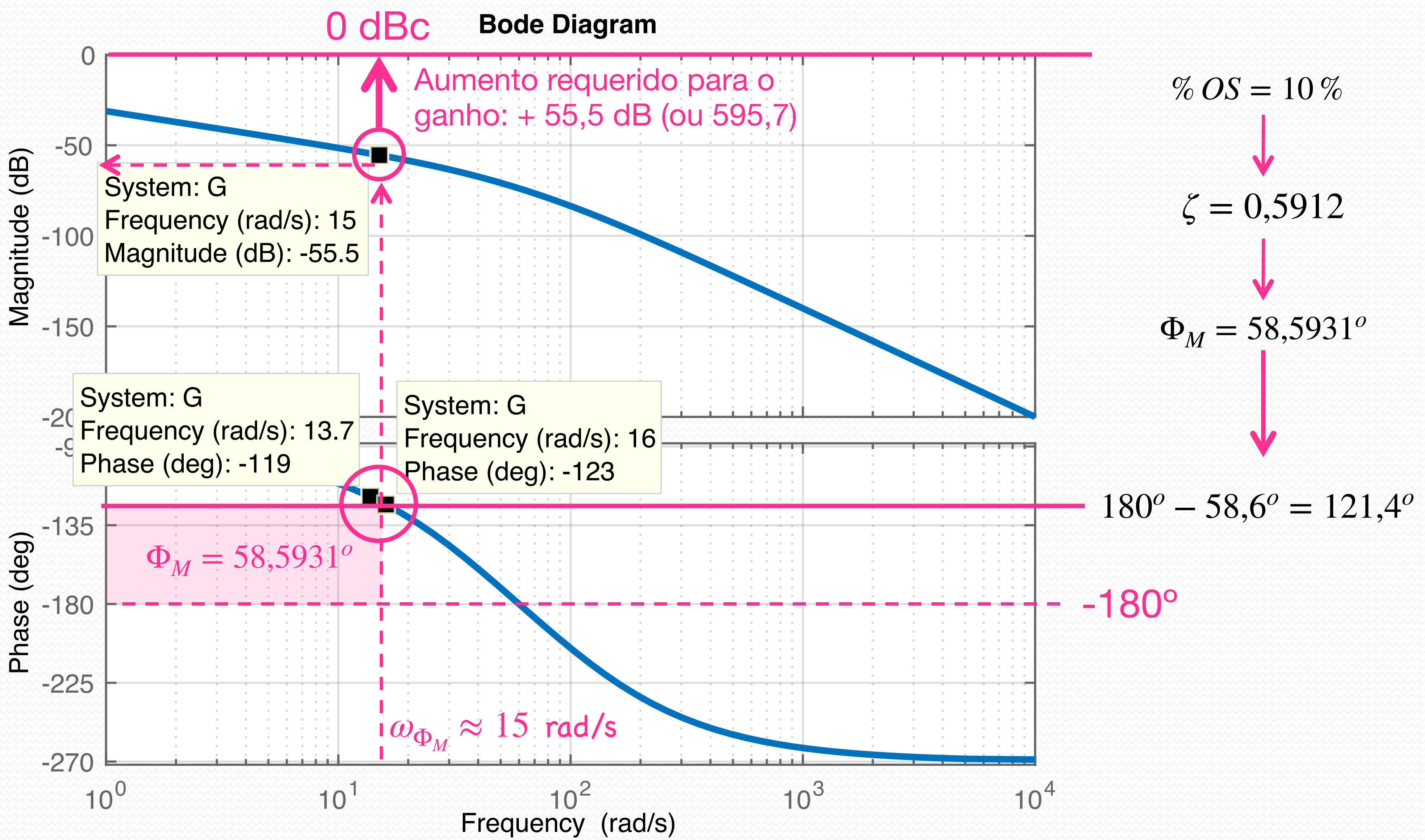


3. Desenhando o diagrama de Bode e localizando o ponto no qual a diferença entre 180º e Φ_M = 180º - 59,2º = 120º:

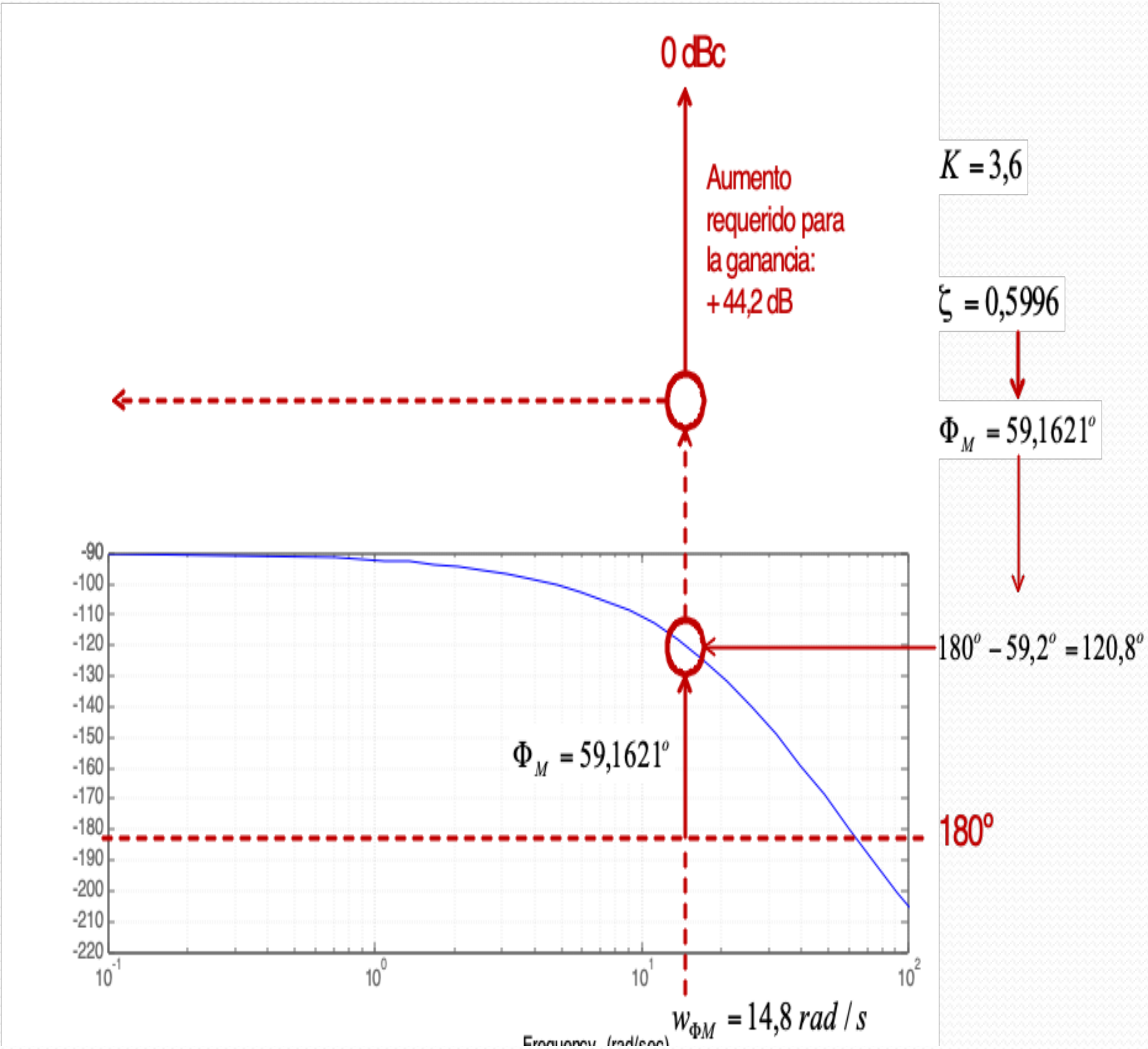



```
clear                 % Clear variables
numg=[100];       % Define numerator of G(s).
deng=poly([0 -36 -100]);
% Define denominator of G(s).
G=tf(numg,deng)    % Create and display G(s).
pos=input('Type %OS  ');
% Input desired percent overshoot.
z=(-log(pos/100))/(sqrt(pi^2+log(pos/100)^2));
% Calculate required damping ratio.
Pm=atan(2*z/(sqrt(-2*z^2+sqrt(1+4*z^4))))*(180/pi);
% Calculate required phase margin.
```

Exemplo 11.1) Encontrar K para obter %OS= 9,5% para entrada degrau.

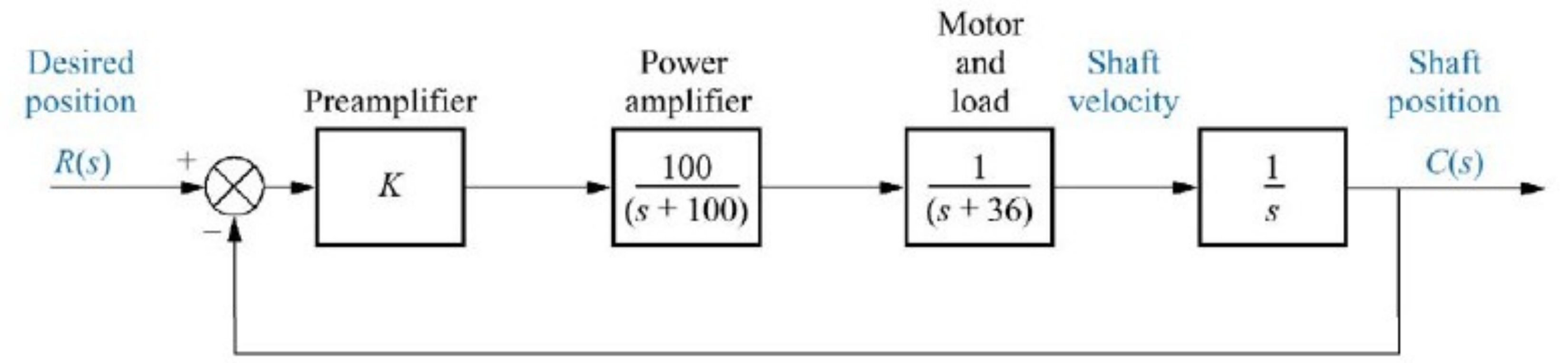


Exemplo 11.1) Encontrar K para obter %OS= 9,5% para entrada degrau.




```
w=0.01:0.01:1000;
% Set range of frequency from 0.01 to
% 1000 in steps of 0.01.
[M,P]=bode(G,w);          % Get Bode data.
Ph=-180+Pm;      % Calculate required phase
angle.
for k=1:1:length(P);
    % Search Bode data for required phase
angle.
    if P(k)-Ph<=0;
    % If required phase angle is found,
                                % find the value of
        M=M(k); % magnitude at the same
frequency.
        'Required K'       % Display label.
         K=1/M             % Calculate the required
gain.
         break             % Stop the loop.
     end                   % End if.
end                        % End for.
```

Exemplo 11.1) Encontrar K para obter %OS= 9,5% para entrada degrau.



4. A diferença entre 180º e Φ_M = 180º - 59,2º = 120º se produz para w=14,8 rad/s, ocasião na qual, pelo diagrama de magnitude se percebe que um ganho de -44,2 dB, é o que falta acrescentar ao sistema para que alcance a margem de fase desejada:

```
clear                    % Clear variables
numg=[100];       % Define numerator of
G(s).
deng=poly([0 -36 -100]);
% Define denominator of G(s).
G=tf(numg,deng)    % Create and display
G(s).
pos=input('Type %OS  ');
% Input desired percent overshoot.
z=(-log(pos/100))/(sqrt(pi^2+log(pos/
100)^2));
% Calculate required damping ratio.
Pm=atan(2*z/
(sqrt(-2*z^2+sqrt(1+4*z^4))))*(180/pi);
% Calculate required phase
margin.
```

Relação entre Transitórios de Malha Fechada & Resposta em Freqüência de malha aberta

- Através do Diagrama de Bode de um sistema ainda em malha aberta, G(s), se pode prever o porcentual de sobressinal, %OS, do mesmo sistema em malha fechada, T(s):
  - Este valor se pode obter a partir da margem de fase do sistema em malha aberta:

$$
\begin{tikzcd}
 & G(s) \arrow[r, "\text{Bode}"] & \Phi_M \arrow[d] \arrow[d, bend left] & \\
FTMF(s) & & \zeta \arrow[ll] \arrow[r] & \%OS = e^{-\left(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}\right)} \times 100
\end{tikzcd}
$$

Se é possível variar ΦM, então se pode variar %OS!

$$\Phi_M = \tan^{-1}\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2+\sqrt{1+4\zeta^4}}}$$

$$\zeta = \frac{-\ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2+\ln^2(\%OS/100)}}$$

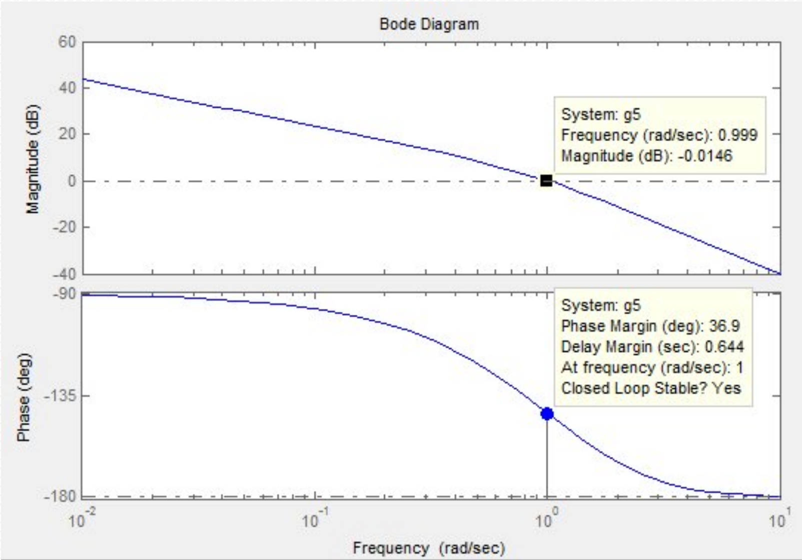
Relação entre Transitórios de Malha Fechada & Resposta em Freqüência de malha aberta

Sistema lazo abierto:

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s(s+2\zeta w_n)}$$

Sistema lazo cerrado:

$$T(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n + w_n^2}$$



Encontrando frecuencia w_1 donde $|G(jw)| = 1$

$$|G(jw)| = \frac{w_n^2}{\left|-w^2 + j2\zeta w_n w\right|} = 1$$

$$w_1 = w_n\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}$$

$$\angle G(jw) = -90 - \tan^{-1}\left(\frac{w_1}{2\zeta w_n}\right)$$

$$= -90 - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}}{2\zeta}\right)$$

Como $\Phi M = \angle G(jw) - 180^o$:

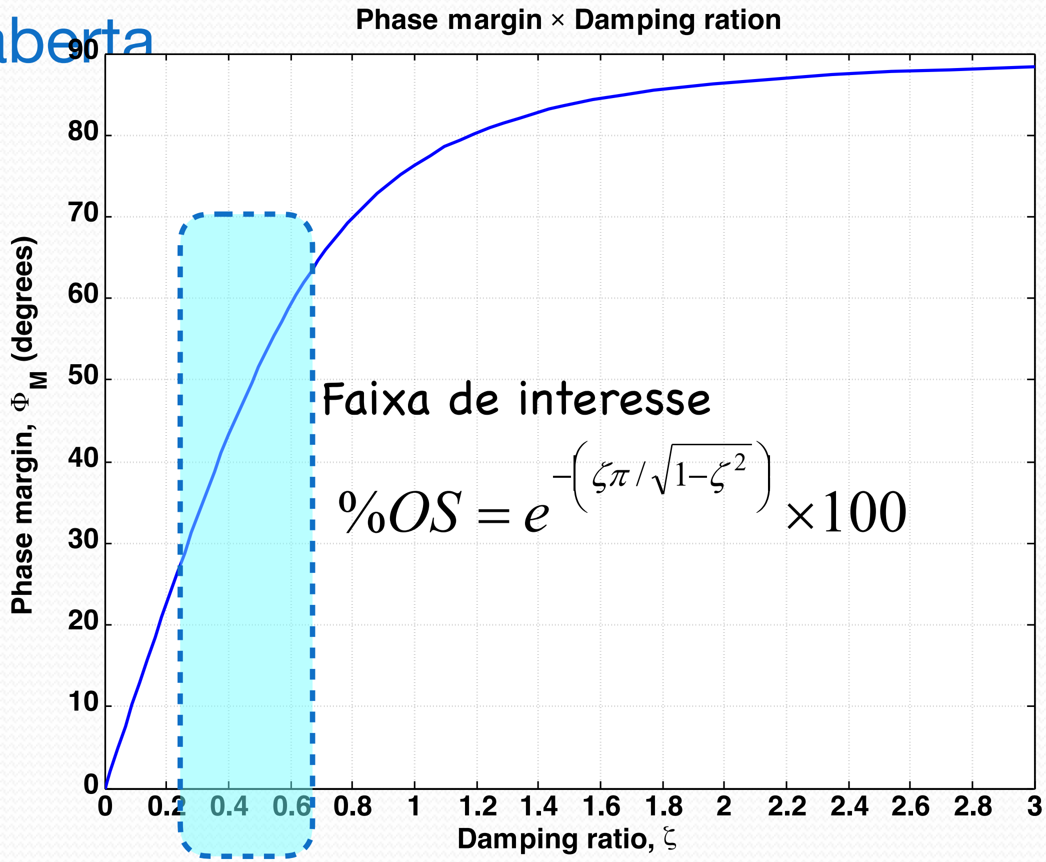
$$\Phi_M = 90 - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}}{2\zeta}\right)$$

$$\Phi_M = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}}\right)$$

Relação entre Transitórios de Malha Fechada & Resposta em Freqüência de malha aberta

$$\Phi_M = 90 - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}}{2\zeta}\right)$$

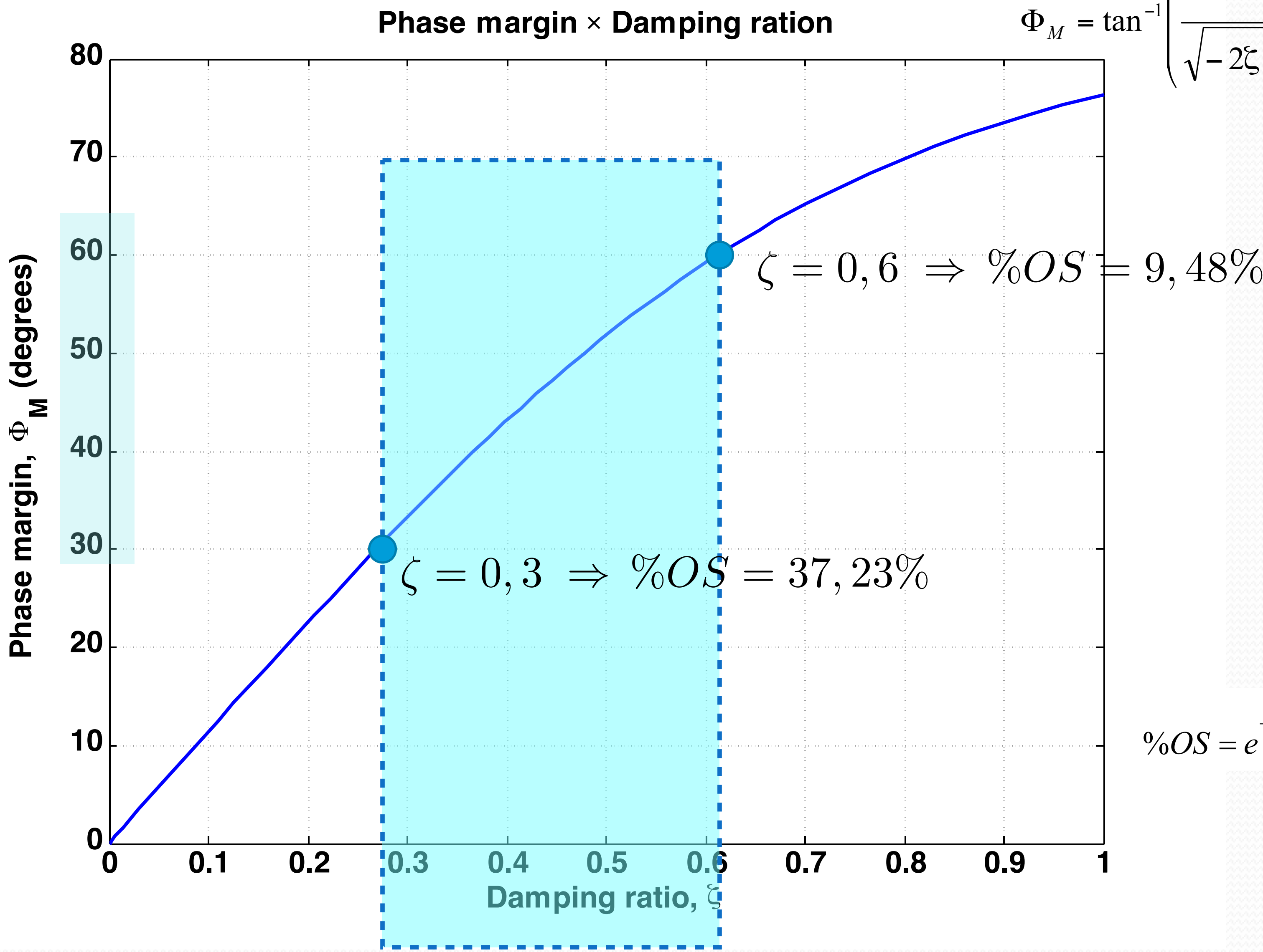
$$\Phi_M = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}}\right)$$




```
>> fplot(@(zeta) atan2(2*zeta,sqrt(-2*zeta*zeta+sqrt(1+4*zeta^4)))*180/pi, [0 3] )
>> grid
>> title('Phase margin \times Damping ration')
>> xlabel('Damping ratio, \zeta')
>> ylabel('Phase margin, \Phi_M (degrees)')
```

Relação entre Transitórios de Malha Fechada & Resposta em Freqüência de malha aberta

$$\Phi_M = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2+\sqrt{4\zeta^4+1}}}\right)$$



$$\%OS = e^{-\left(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}\right)} \times 100$$

Compensador de Atraso de Fase (*Lag*)

1. Melhorar a constante do erro estático sem impactar na estabilidade do sistema;
2. Aumentar a Margen de Fase do sistema de forma a satisfazer a desejada resposta transitória.