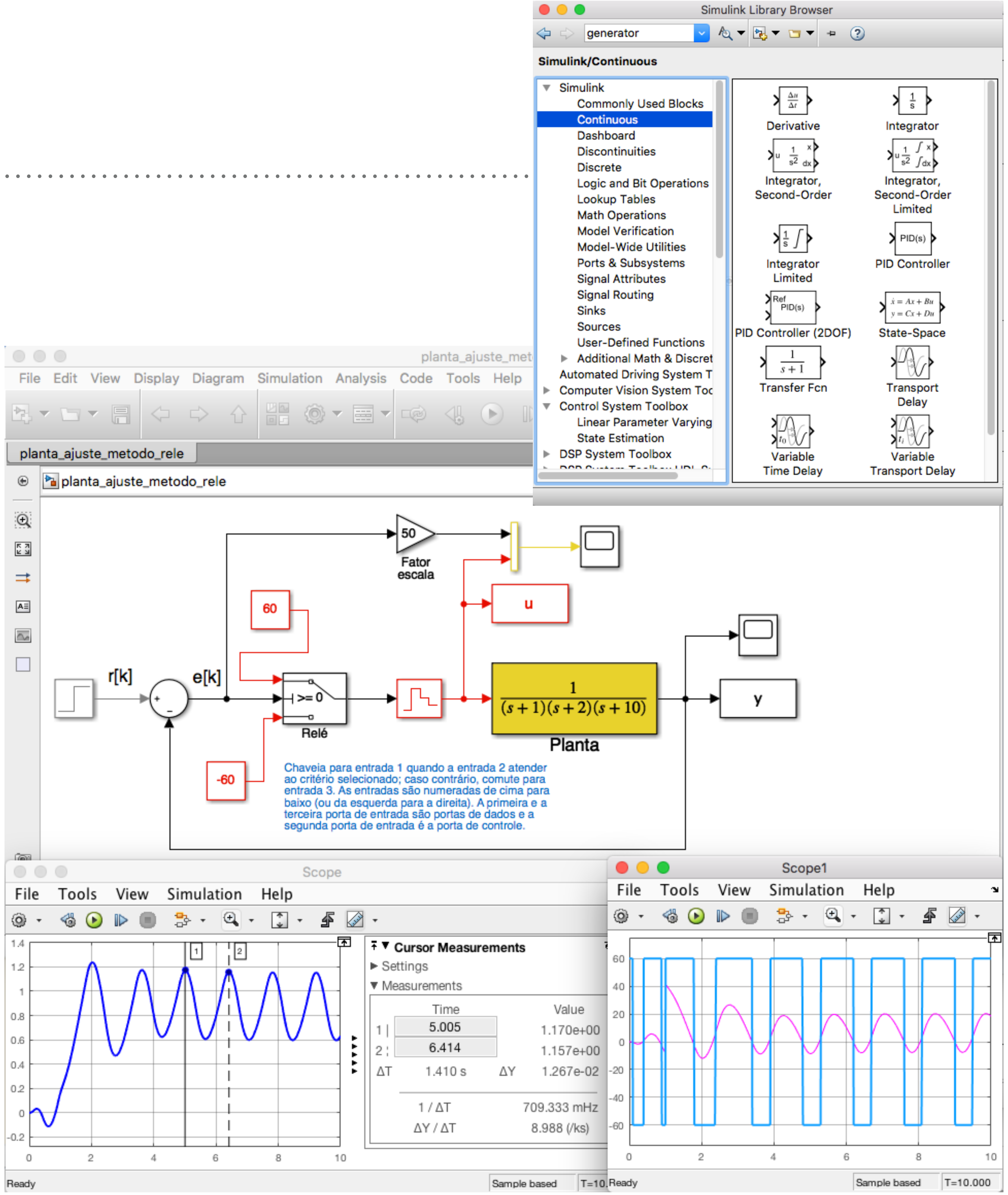
4) MODELAGEM USANDO MATLAB/SIMULINK

Controle Automático I
Prof. Fernando Passold
2022

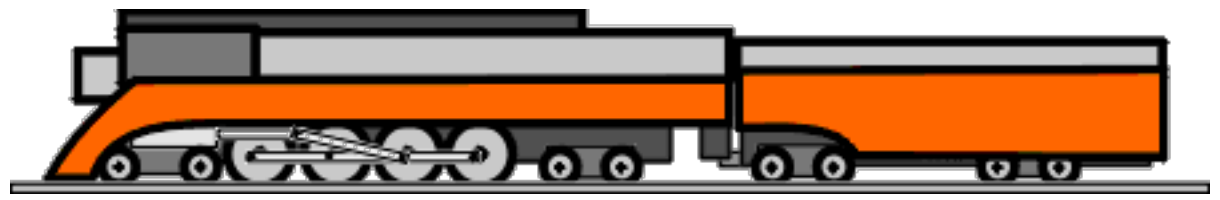
MODELAGEM USANDO (MATLAB) SIMULINK

- No Simulink, os modelos são representados graficamente como diagramas de blocos.
- Uma ampla variedade de blocos está disponível para o usuário em bibliotecas fornecidas para representar vários fenômenos e modelos em uma variedade de formatos.
- Uma das principais vantagens de empregar Simulink (e simulação em geral) para a análise de sistemas dinâmicos é que nos permite analisar rapidamente a resposta de sistemas complicados que podem ser proibitivamente difíceis de analisar analiticamente.
- O Simulink é capaz de aproximar numericamente as soluções de modelos matemáticos que não podemos ou não desejamos resolver "à mão".
- Em geral, as equações matemáticas que representam um determinado sistema que servem de base para um modelo Simulink podem ser derivadas de leis físicas.



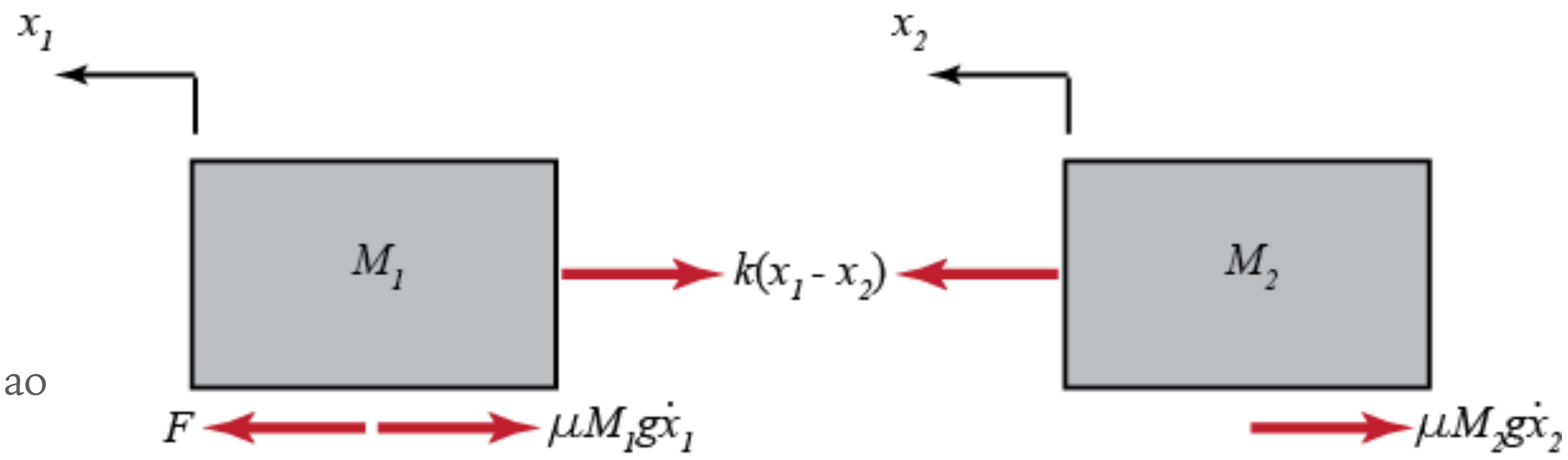
SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM

- Consideraremos um trem de brinquedo composto por uma locomotiva e um carro. Assumindo que o trem viaja apenas em uma dimensão (ao longo dos trilhos), queremos aplicar controle ao trem para que ele parta e pare suavemente, e para que ele possa seguir um comando de velocidade constante com erro mínimo em regime permanente.



- As massas do motor e do carro serão representadas por M_1 e M_2, respectivamente. Além disso, o motor e o carro são conectados por meio de um acoplamento com rigidez k. Em outras palavras, o acoplamento é modelado como uma mola com constante elástica k. A força F representa a força gerada entre as rodas do motor e a pista, enquanto μ representa o coeficiente de atrito de rolamento.

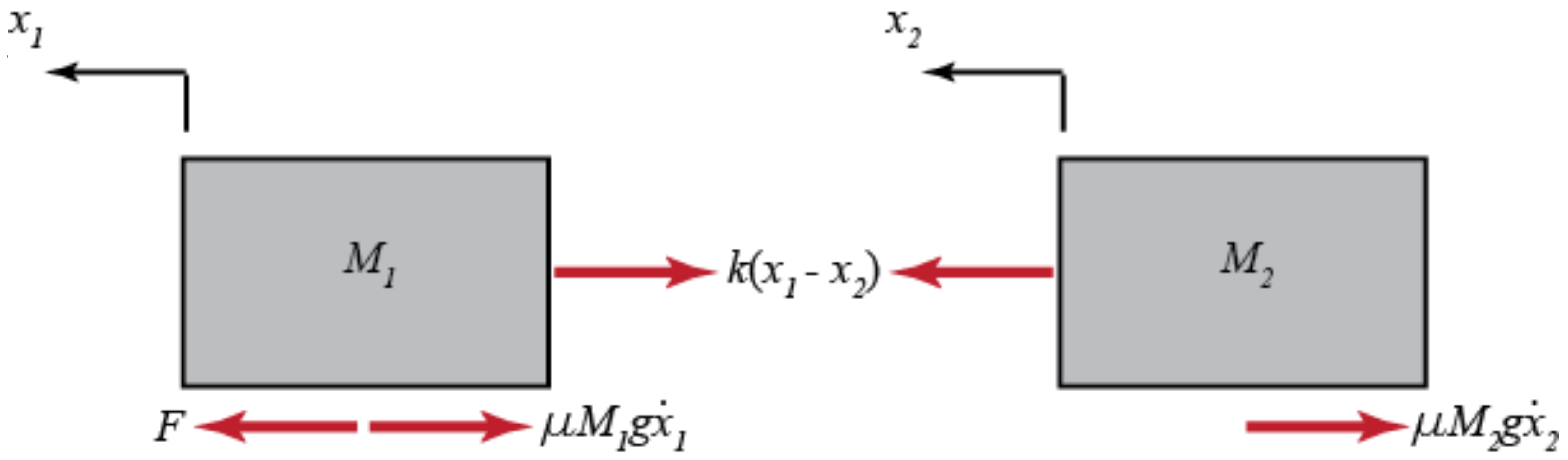
- O primeiro passo para derivar as equações matemáticas que governam o sistema físico é desenhar o(s) diagrama(s) de corpo livre que representam o sistema. Isso é mostrado na figura ao lado para o nosso sistema de trens.



SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM

$$\sum F_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g \dot{x}_1 = M_1 \ddot{x}_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_s g \dot{x}_2 = M_2 \ddot{x}_2 \qquad (2)$$

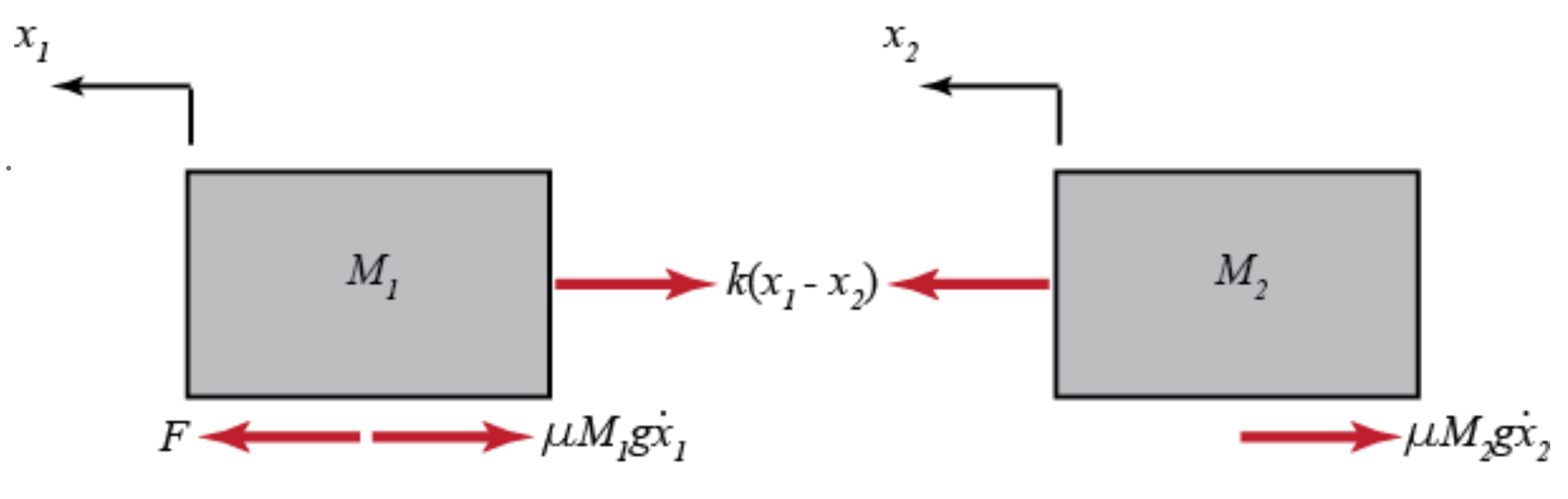


- Pela segunda lei de Newton, sabemos que a soma das forças que atuam sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo e sua aceleração. Neste caso, as forças que atuam no motor (M_1) na direção horizontal são a força da mola, a resistência ao rolamento e a força gerada na interface roda/lagarta. As forças que atuam no vagão (M_2) na direção horizontal são a força da mola e a resistência ao rolamento. Na direção vertical, as forças do peso são equilibradas pelas forças normais aplicadas pelo solo ($N = m\,g$). Portanto, não haverá aceleração na direção vertical.
- Vamos modelar a mola como gerando uma força que é linearmente proporcional à deformação da mola, $k(x_1 - x_2)$, onde x_1 e x_2 são os deslocamentos do motor e do carro, respectivamente. Aqui assume-se que a mola não é deformada quando x_1 e x_2 são iguais a zero. As forças de resistência ao rolamento são modeladas como sendo linearmente proporcionais ao produto das velocidades correspondentes e forças normais (que são iguais às forças de peso).

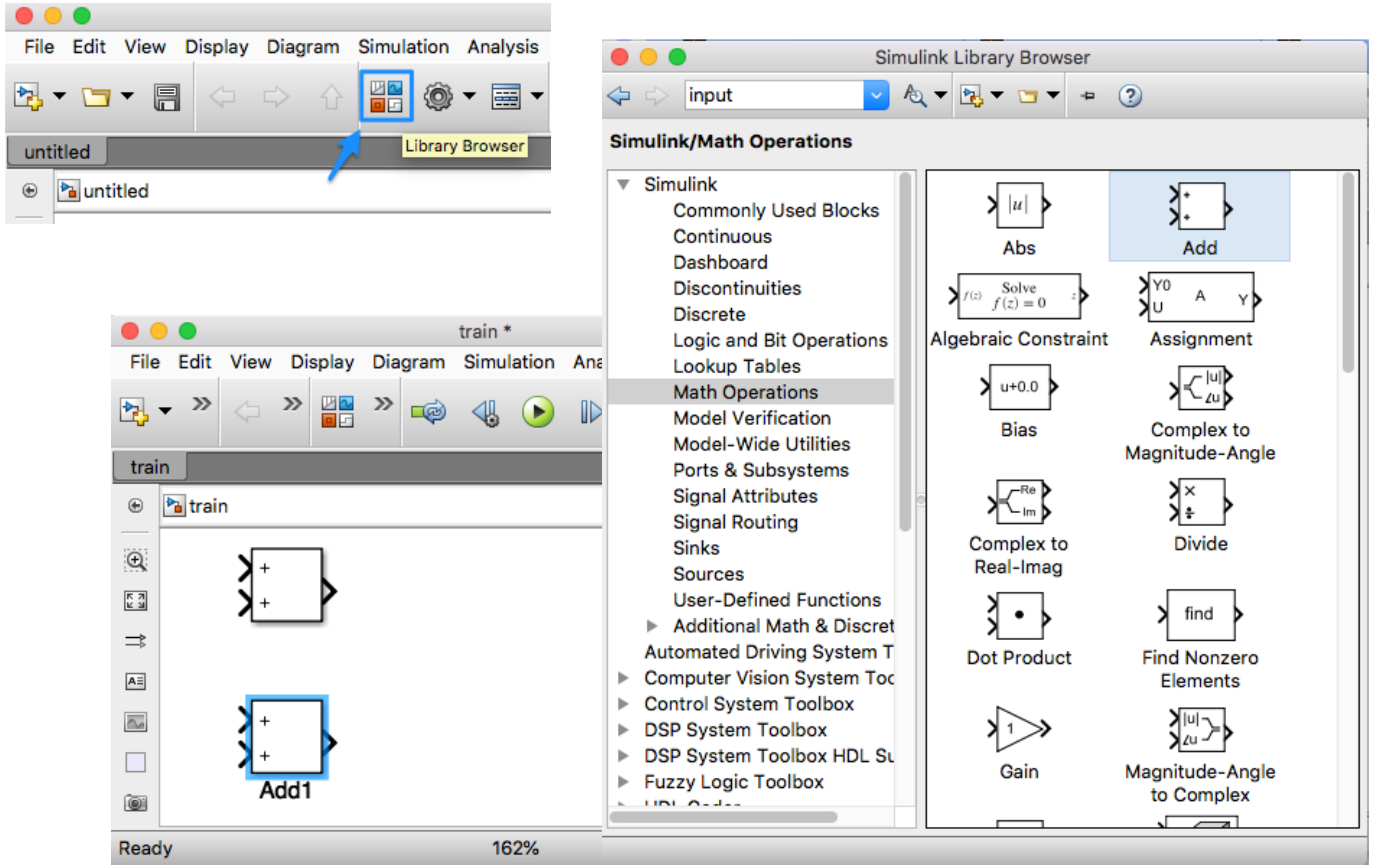
SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM

$$\sum F_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g \dot{x}_1 = M_1 \ddot{x}_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_s g \dot{x}_2 = M_2 \ddot{x}_2 \qquad (2)$$



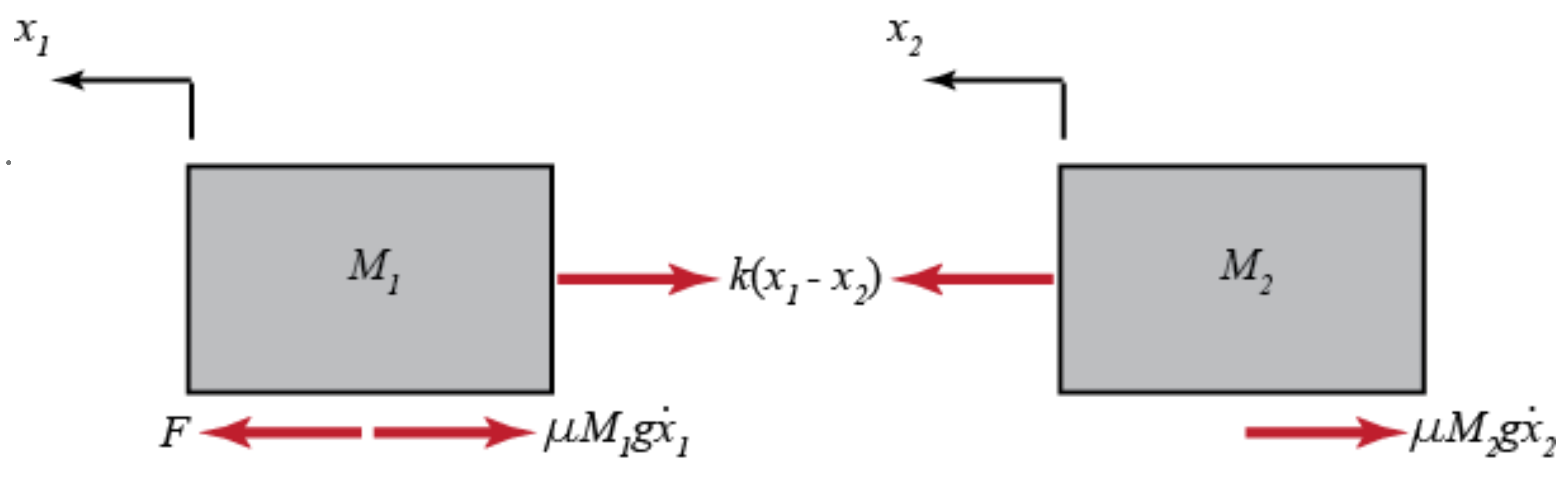
- Este conjunto de equações do sistema pode agora ser representado graficamente sem manipulação adicional. Especificamente, construiremos duas cópias (uma para cada massa) da expressão geral $\sum F = m\,a$ ou $a = \left(\sum F\right)/m$.
- Usaremos 2 blocos Sum (da biblioteca Math Operations) para a janela do seu modelocomo mostrado na figura ao lado



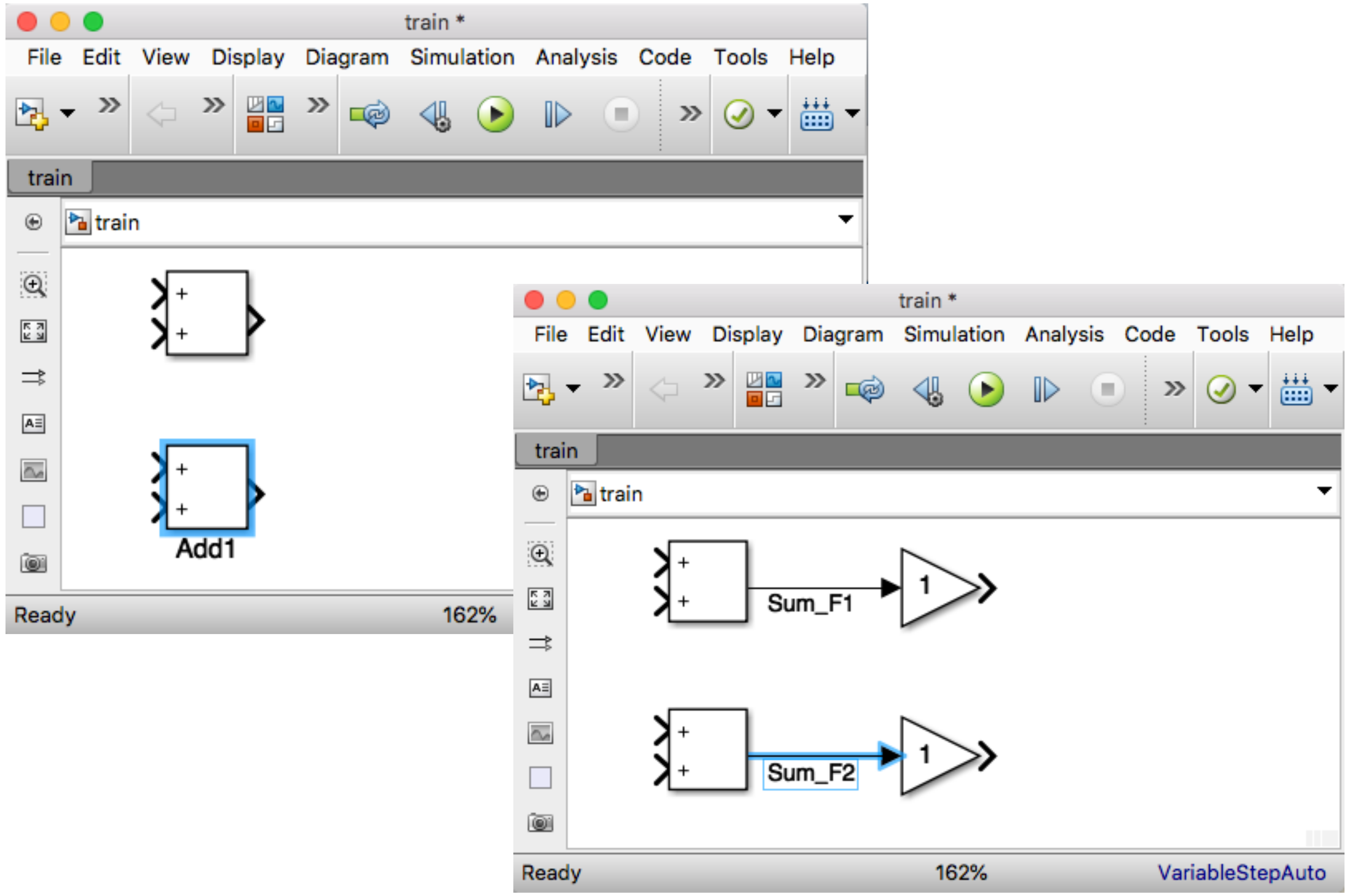
SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM

$$\sum F_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g \dot{x}_1 = M_1 \ddot{x}_1 \qquad (1)$$

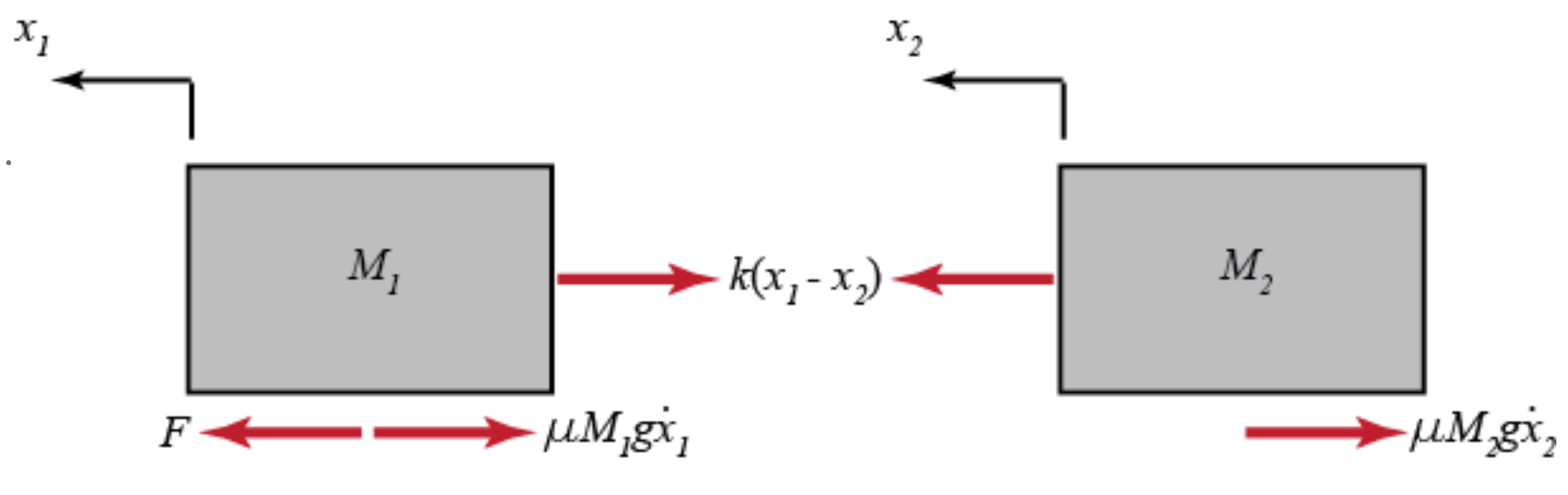
$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_s g \dot{x}_2 = M_2 \ddot{x}_2 \qquad (2)$$



- As saídas de cada um desses blocos Sum representam a soma das forças que atuam em cada massa.
- Multiplicando cada sinal de saída por $1/M$ nos dará a aceleração correspondente de cada massa.
- Arraste dois blocos Gain (da Biblioteca de Operações Matemáticas) para o seu modelo e anexe cada um com uma linha da saída de um dos blocos Sum. Rotule esses dois sinais como "Sum_F1" e "Sum_F2" para tornar seu modelo mais claro. Isso é feito clicando duas vezes no espaço acima de cada uma das duas linhas de sinal e inserindo o rótulo desejado.



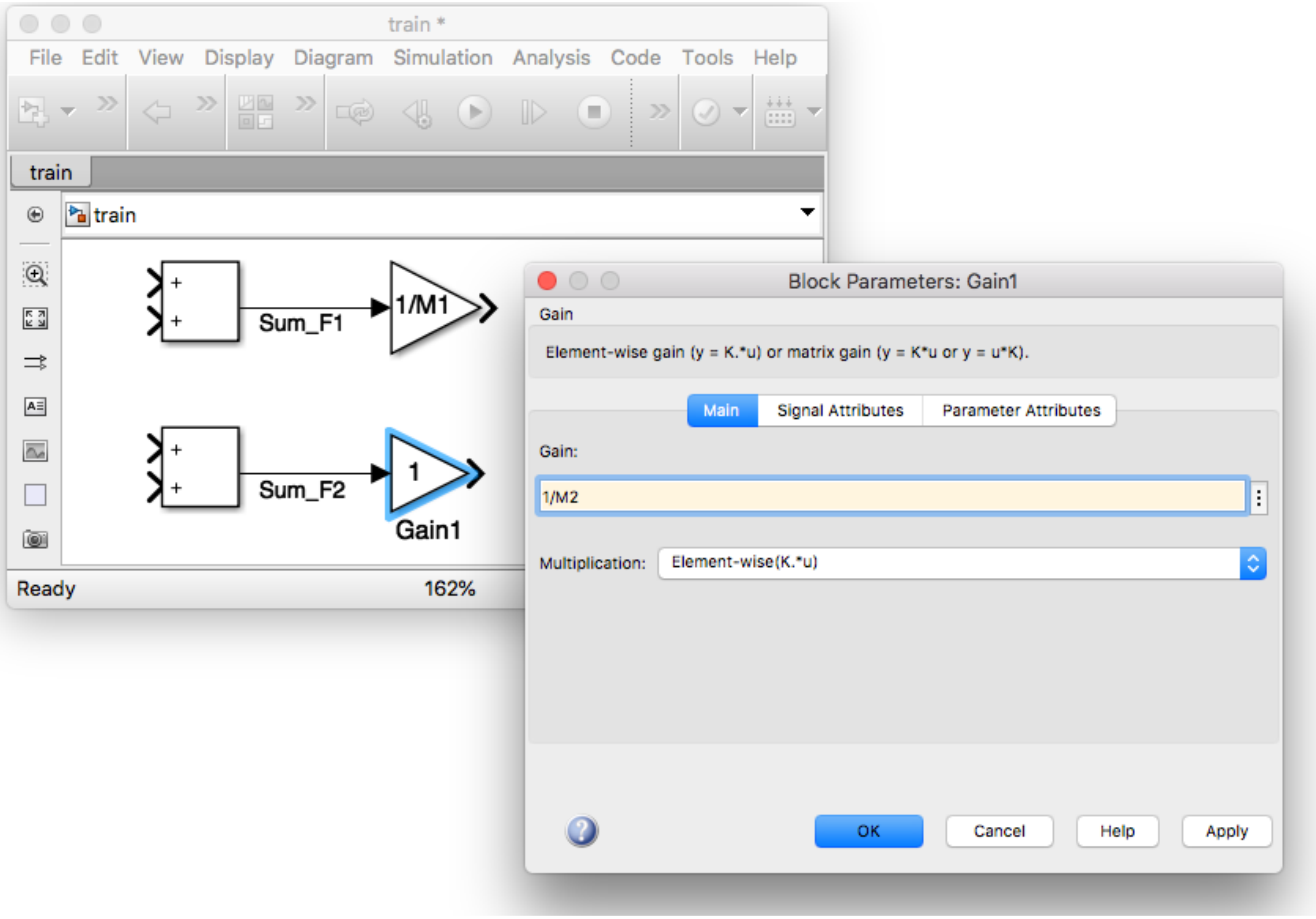
SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM



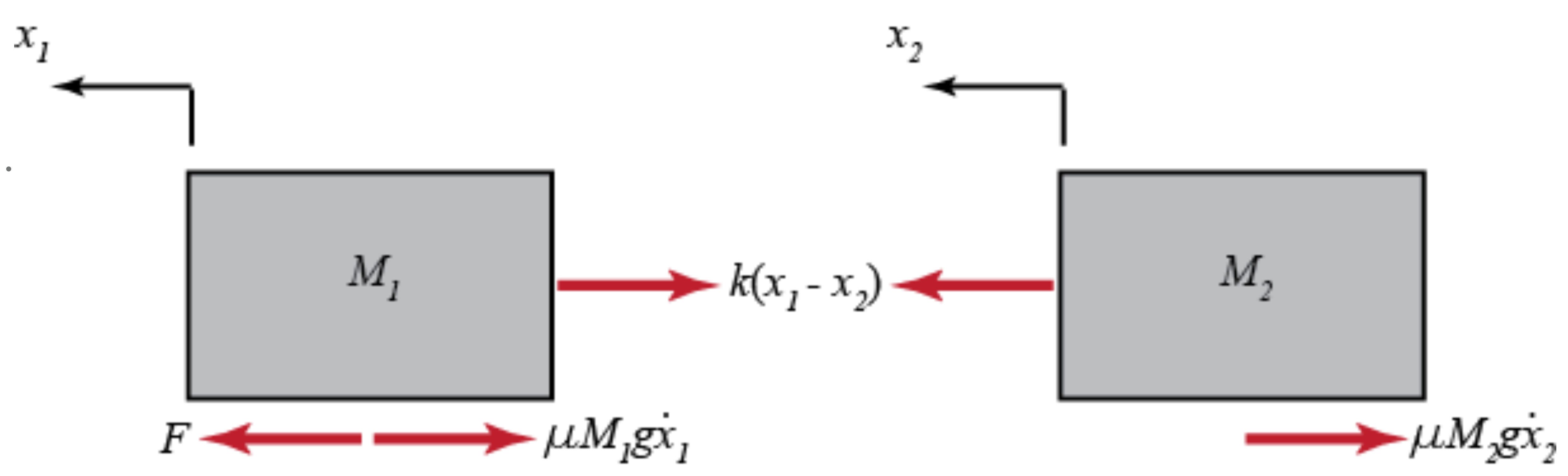
$$\sum F_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g\dot{x}_1 = M_1\ddot{x}_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_s g\dot{x}_2 = M_2\ddot{x}_2 \qquad (2)$$

- Esses blocos de ganho devem conter $1/M$ para cada uma das massas. Vamos definir as variáveis M1 e M2 na área de trabalho do MATLAB, então podemos apenas inserir os nomes das variáveis correspondentes em cada um dos blocos Gain. Clique duas vezes no bloco Ganho superior e digite "1/M1" no campo Ganho . Da mesma forma, insira "1/M2" no campo Ganho do segundo bloco Ganho.
- Você notará que os ganhos não aparecem na imagem dos blocos Gain, mas os blocos exibem um valor de -K- . Isso ocorre porque os blocos são muito pequenos na tela para mostrar o nome completo da variável dentro do triângulo. Os blocos podem ser redimensionados para que o valor real do ganho possa ser visto. Para redimensionar um bloco, selecione-o clicando nele uma vez. Pequenos quadrados aparecerão nos cantos. Arraste um desses quadrados para esticar o bloco. Seu modelo deve ficar como ao lado.



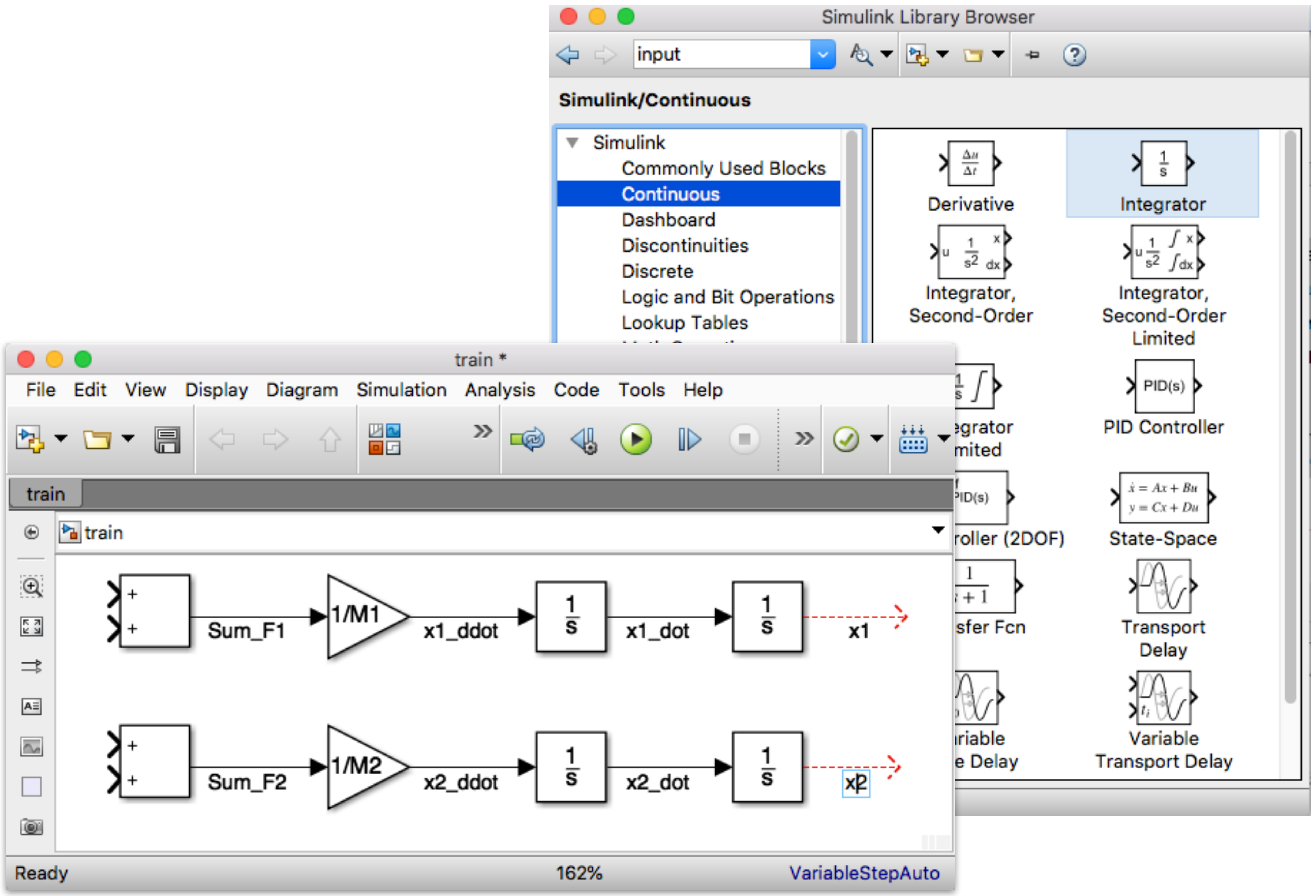
SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM



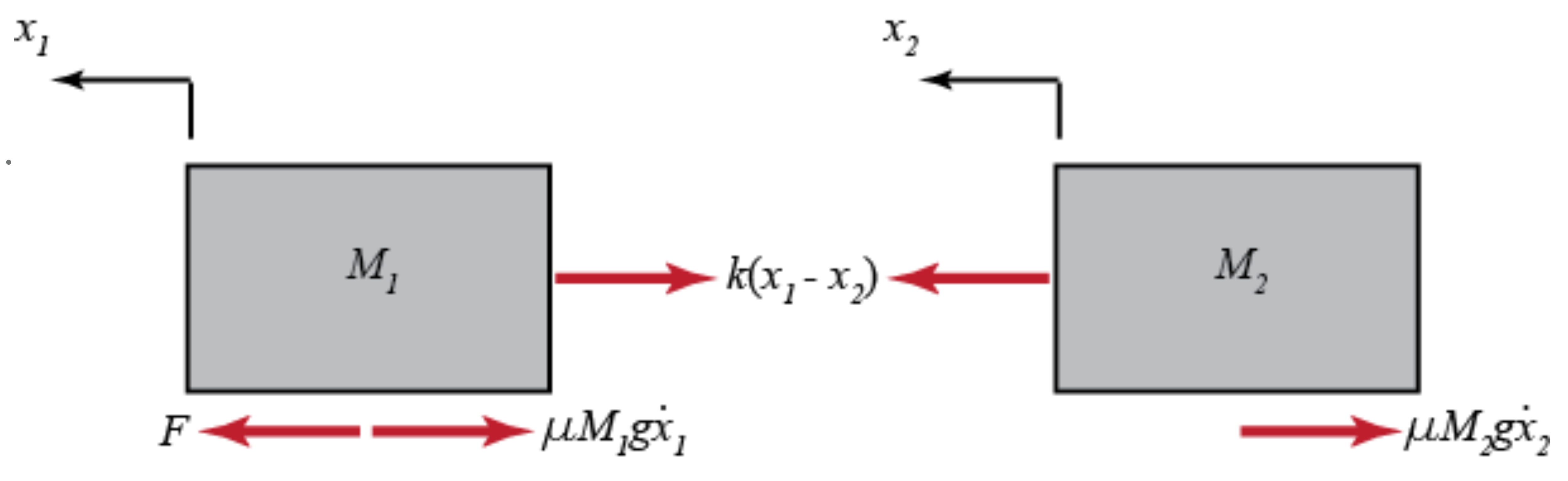
$$\sum F_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g \dot{x}_1 = M_1 \ddot{x}_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_s g \dot{x}_2 = M_2 \ddot{x}_2 \qquad (2)$$

- As saídas desses blocos de ganho são as acelerações de cada uma das massas (a locomotiva e o vagão). As equações governantes que derivamos acima dependem das velocidades e deslocamentos das massas. Como a velocidade pode ser determinada pela integração da aceleração e a posição pode ser determinada pela integração da velocidade, podemos gerar esses sinais empregando blocos integradores. Arraste um total de quatro blocos Integradores da biblioteca Contínua para seu modelo, dois para cada uma de nossas duas acelerações. Conecte esses blocos e rotule os sinais conforme mostrado abaixo. Especificamente, o primeiro integrador recebe a aceleração de massa 1 ("x1_ddot") como entrada e gera a velocidade de massa 1 ("x1_dot"). O segundo integrador então pega essa velocidade e produz o deslocamento da primeira massa ("x1"). O mesmo padrão vale para os integradores para a segunda massa (guiar-se pelas figuras ao lado).



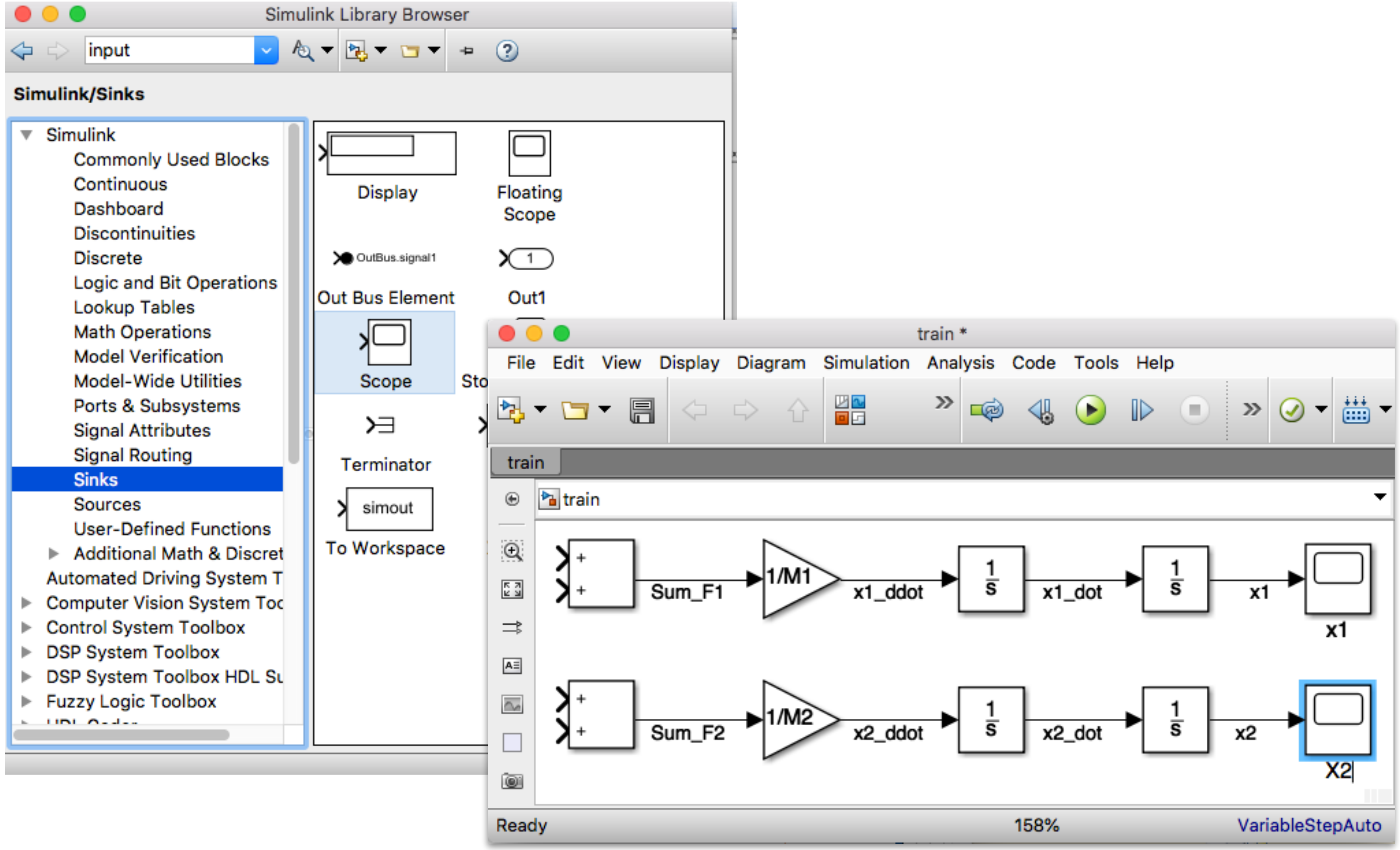
SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM



$$\sum F_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g \dot{x}_1 = M_1 \ddot{x}_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_s g \dot{x}_2 = M_2 \ddot{x}_2 \qquad (2)$$

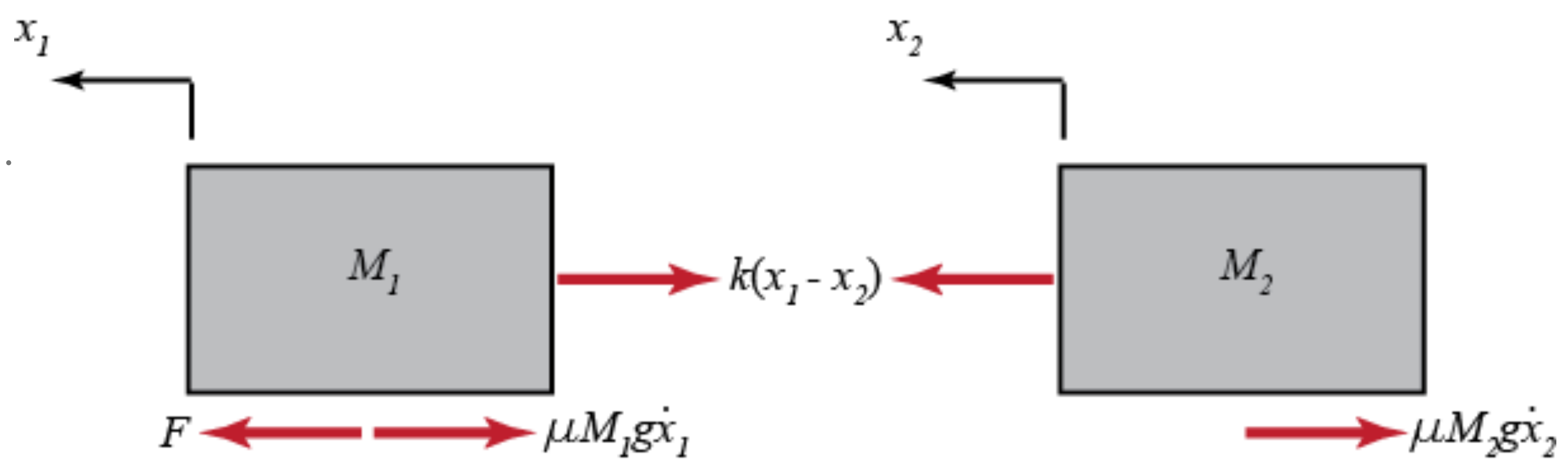
➤ Agora, arraste dois Scopes da biblioteca Sinks para o seu modelo e conecte-os às saídas desses integradores. Rotule-os como "x1" e "x2".



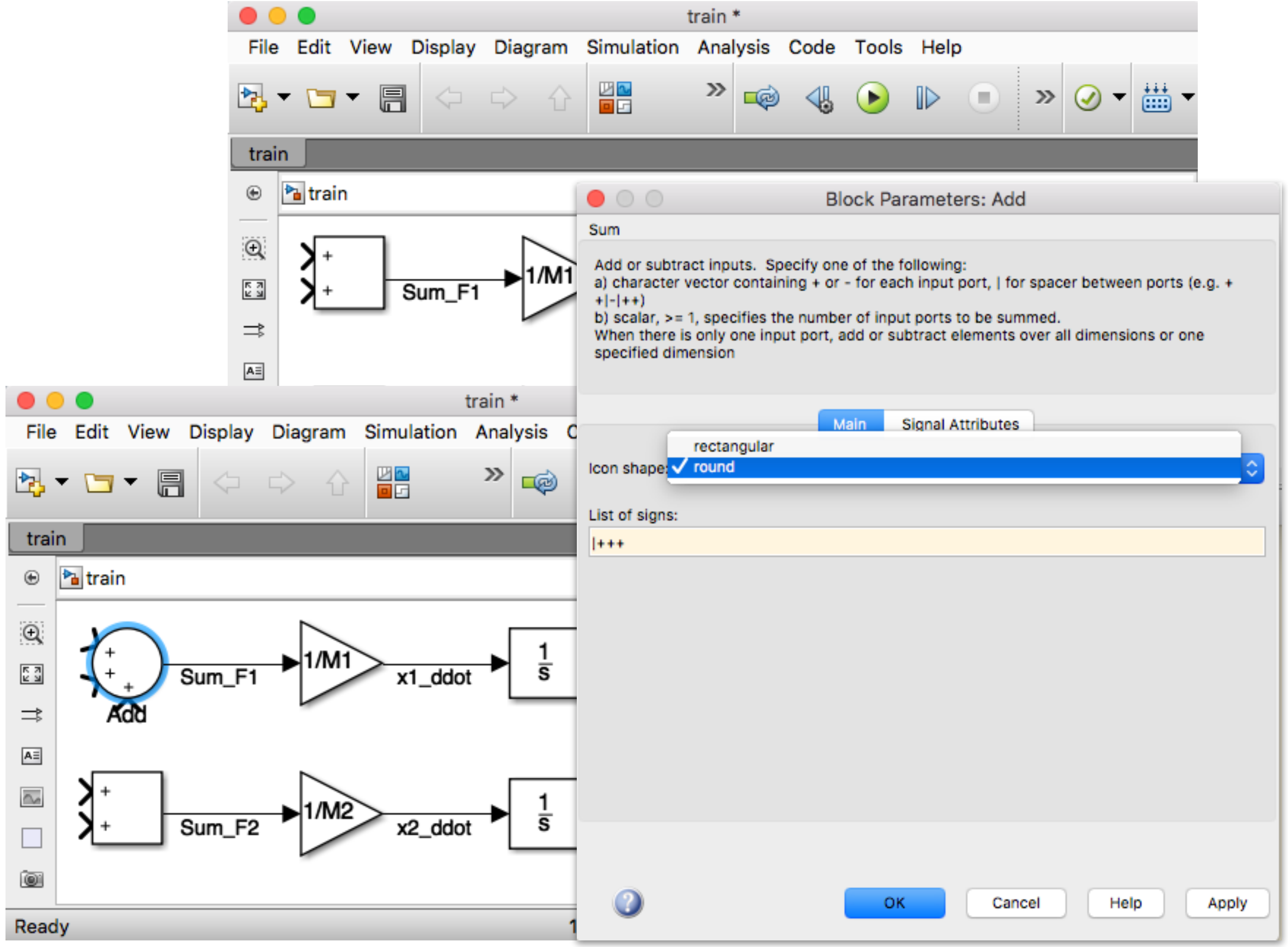
SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM

$$\sum F_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g \dot{x}_1 = M_1 \ddot{x}_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_s g \dot{x}_2 = M_2 \ddot{x}_2 \qquad (2)$$



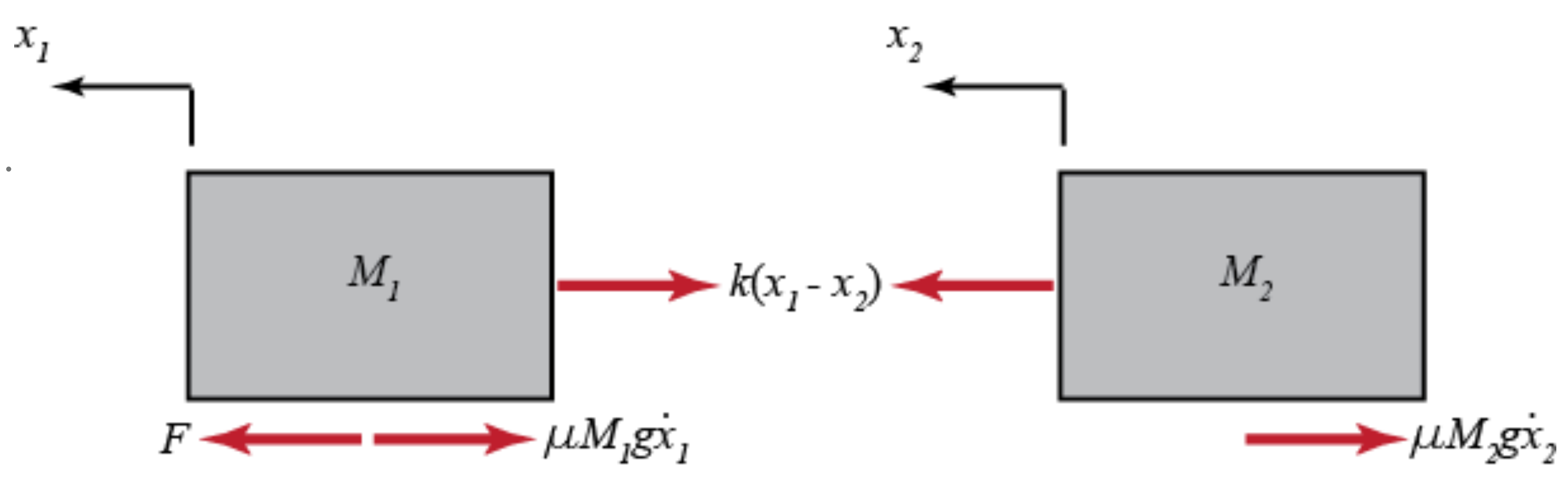
- Agora estamos prontos para somar as forças que atuam em cada massa. Primeiro, precisamos ajustar as entradas em cada bloco Sum para representar o número adequado de forças (nos preocuparemos com os sinais mais tarde). Como há um total de três forças atuando na massa 1, clique duas vezes no bloco Sum correspondente e altere o campo Lista de sinais para "|+++". O símbolo "|" serve como espaçador. Existem apenas 2 forças atuando na massa 2, portanto, podemos deixar esse bloco Sum em paz por enquanto.



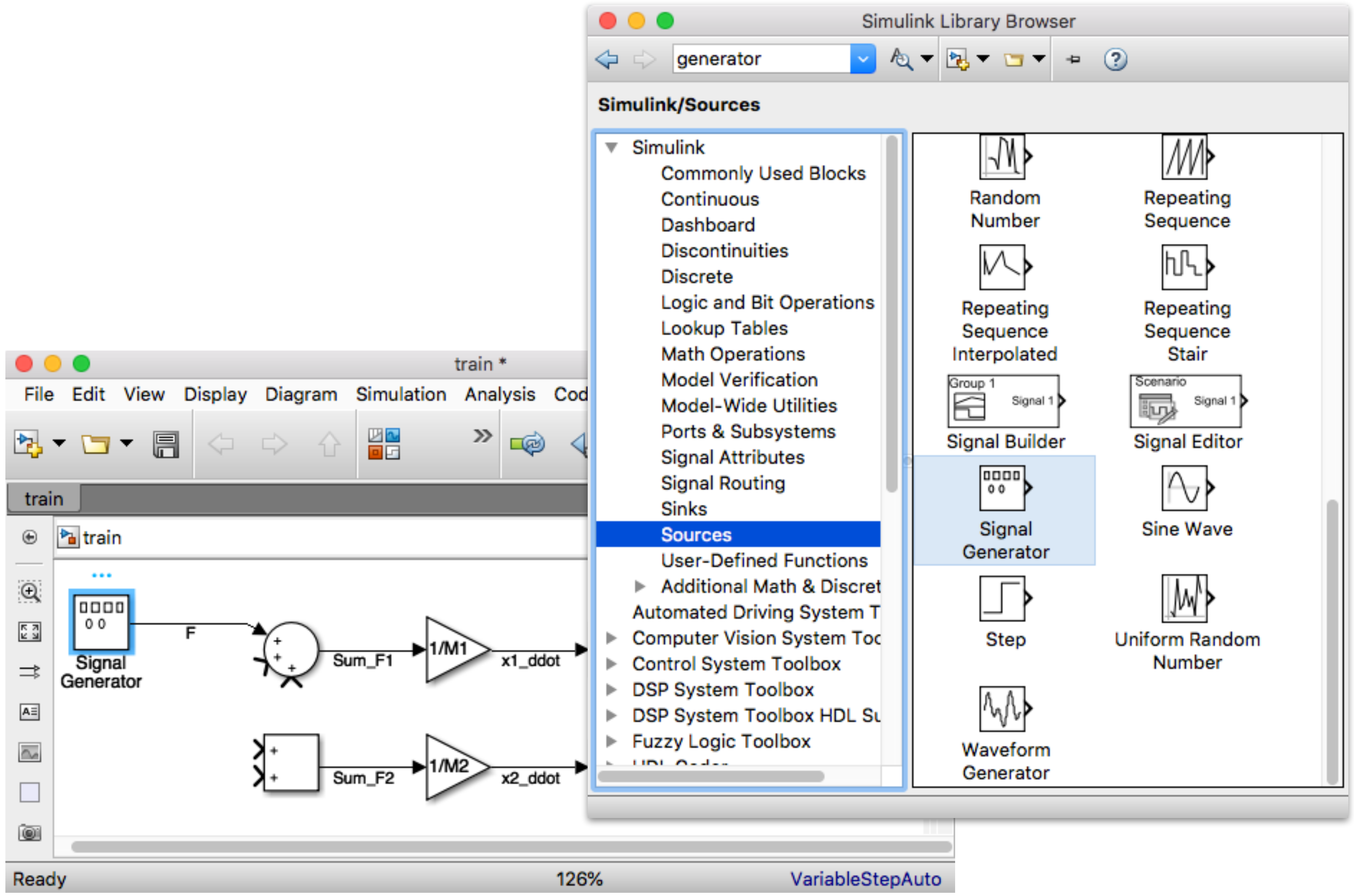
SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM

$$\sum F_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g \dot{x}_1 = M_1 \ddot{x}_1 \qquad (1)$$

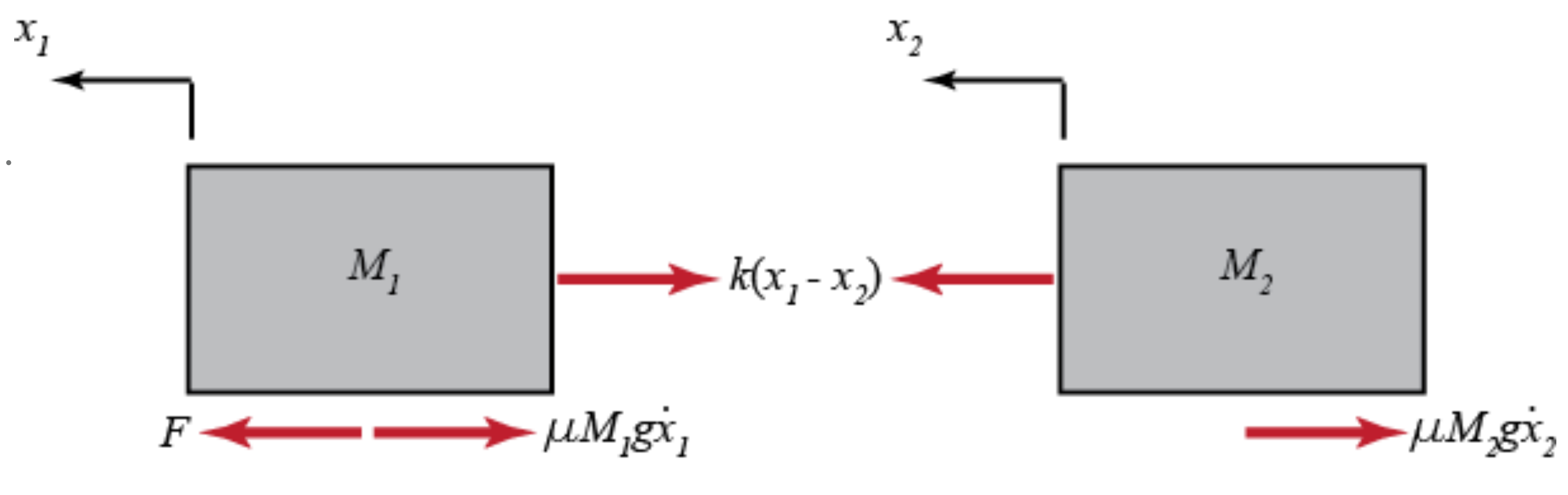
$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_s g \dot{x}_2 = M_2 \ddot{x}_2 \qquad (2)$$



- A primeira força agindo na massa 1 é apenas a força de entrada, *F*. Arraste um bloco Signal Generator da biblioteca Sources e conecte-o à entrada superior do bloco Sum correspondente. Rotule este sinal como "F".



SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM



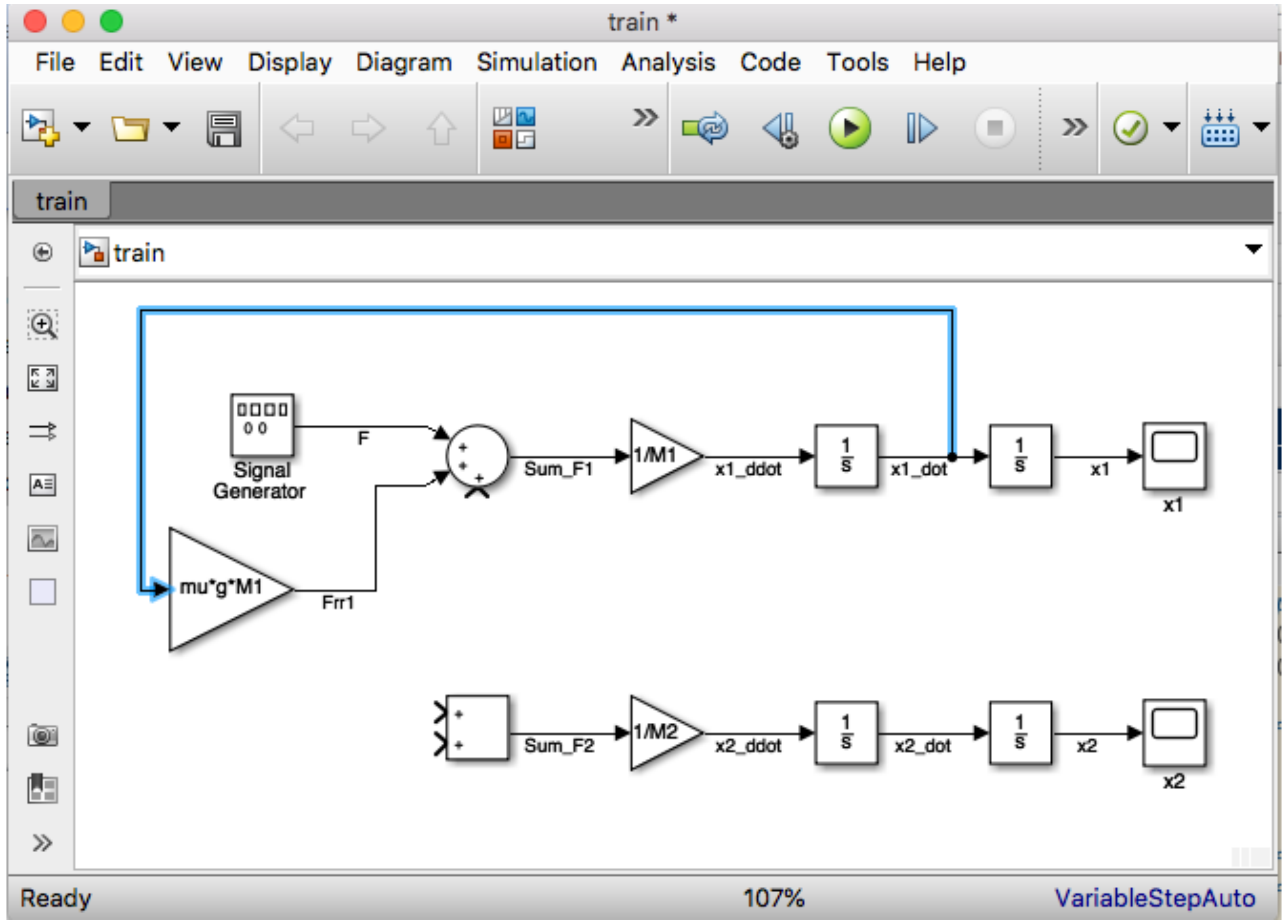
$$\sum F_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g \dot{x}_1 = M_1 \ddot{x}_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_s g \dot{x}_2 = M_2 \ddot{x}_2 \qquad (2)$$

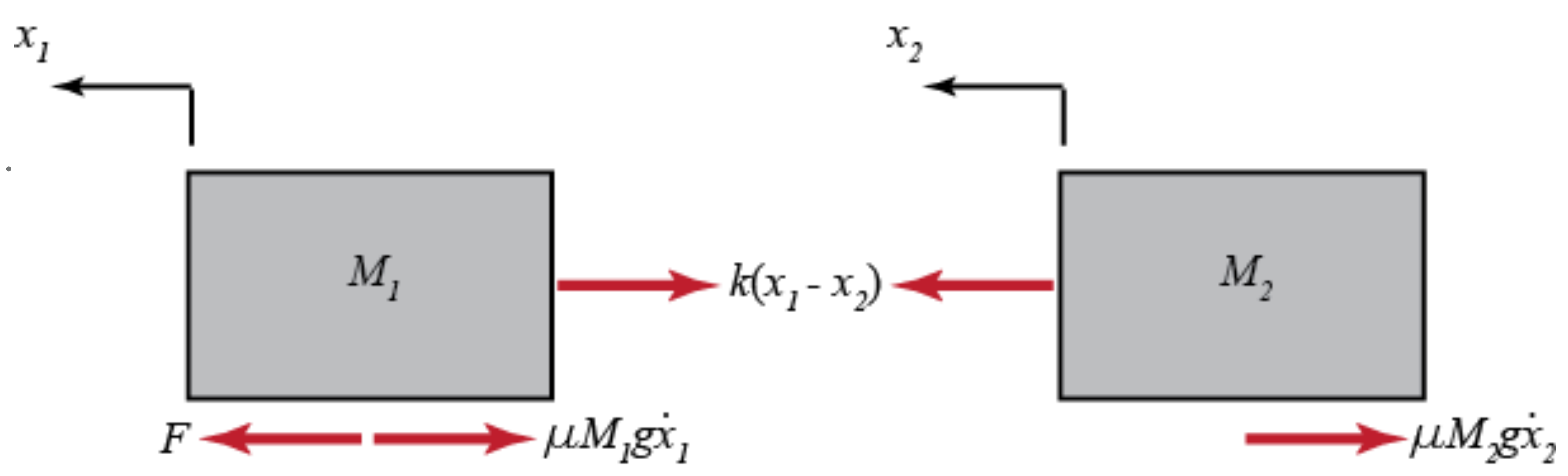
- A próxima força que atua na massa 1 é a força de resistência ao rolamento. Lembre-se de que essa força é modelada da seguinte forma:

  $F_{rr,1} = \mu g M_1 \dot{x}_1 \qquad (3)$

- Para gerar essa força, podemos extrair o sinal de velocidade e multiplicar por um ganho apropriado. Arraste um bloco Gain para a janela do seu modelo. Toque no sinal "x1_dot" e conecte-o à entrada deste novo bloco Gain (desenhe esta linha em várias etapas, se necessário). Conecte a saída do bloco Gain à segunda entrada do bloco Sum. Clique duas vezes no bloco Ganho e digite "mu*g*M1" no campo Ganho . A força de resistência ao rolamento, no entanto, atua na direção negativa. Portanto, altere a lista de sinais do bloco Sum para "|+-+". Em seguida, redimensione o bloco Gain para exibir o ganho total e rotule a saída do bloco Gain "Frr1". Seu modelo agora deve aparecer como mostrado na figura ao lado.



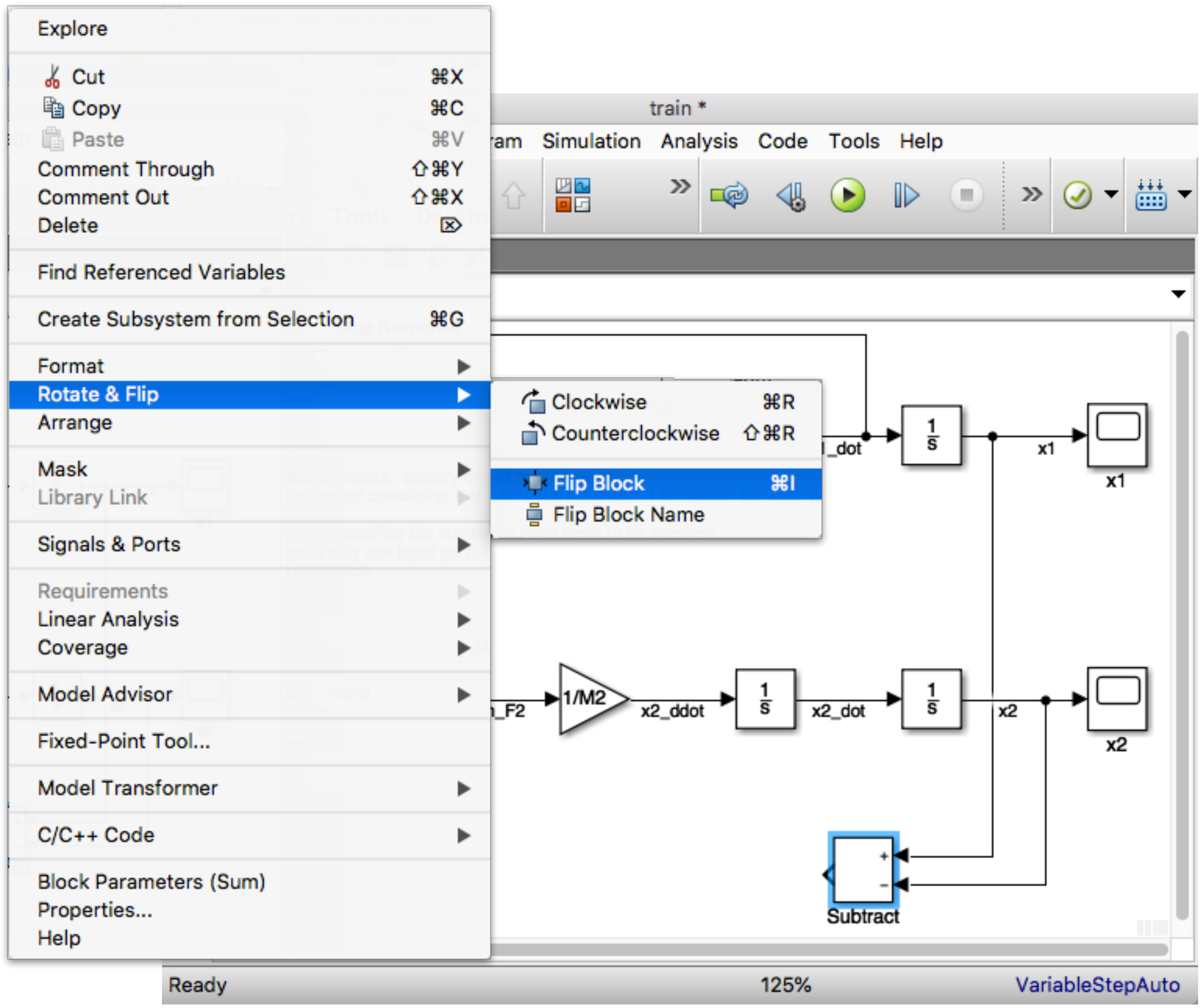
SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM



$$\sum F_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g\dot{x}_1 = M_1\ddot{x}_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_s g\dot{x}_2 = M_2\ddot{x}_2 \qquad (2)$$

- A última força que atua na massa 1 é a força da mola. Lembre-se de que essa força é igual ao seguinte:
  $F_s = k(x_1 - x_2) \qquad (4)$
- Portanto, precisamos gerar um sinal $(x_1 - x_2)$ que pode ser multiplicado por um ganho para criar a força. Arraste um bloco de subtração (ou um bloco de soma ou um bloco de adição) abaixo do resto do seu modelo. Para alterar a direção deste bloco, clique com o botão direito do mouse no bloco e escolha **Girar e Virar > Virar bloco** no menu resultante. Alternativamente, você pode selecionar o bloco e pressionar **Ctrl-I**. Agora, desligue o sinal "x2" e conecte-o à entrada negativa do bloco Subtract. Além disso, desligue o sinal "x1" e conecte-o à entrada positiva. Isso fará com que as linhas de sinal se cruzem. As linhas podem se cruzar, mas elas só são realmente conectadas onde um pequeno círculo aparece (como em um ponto de toque).

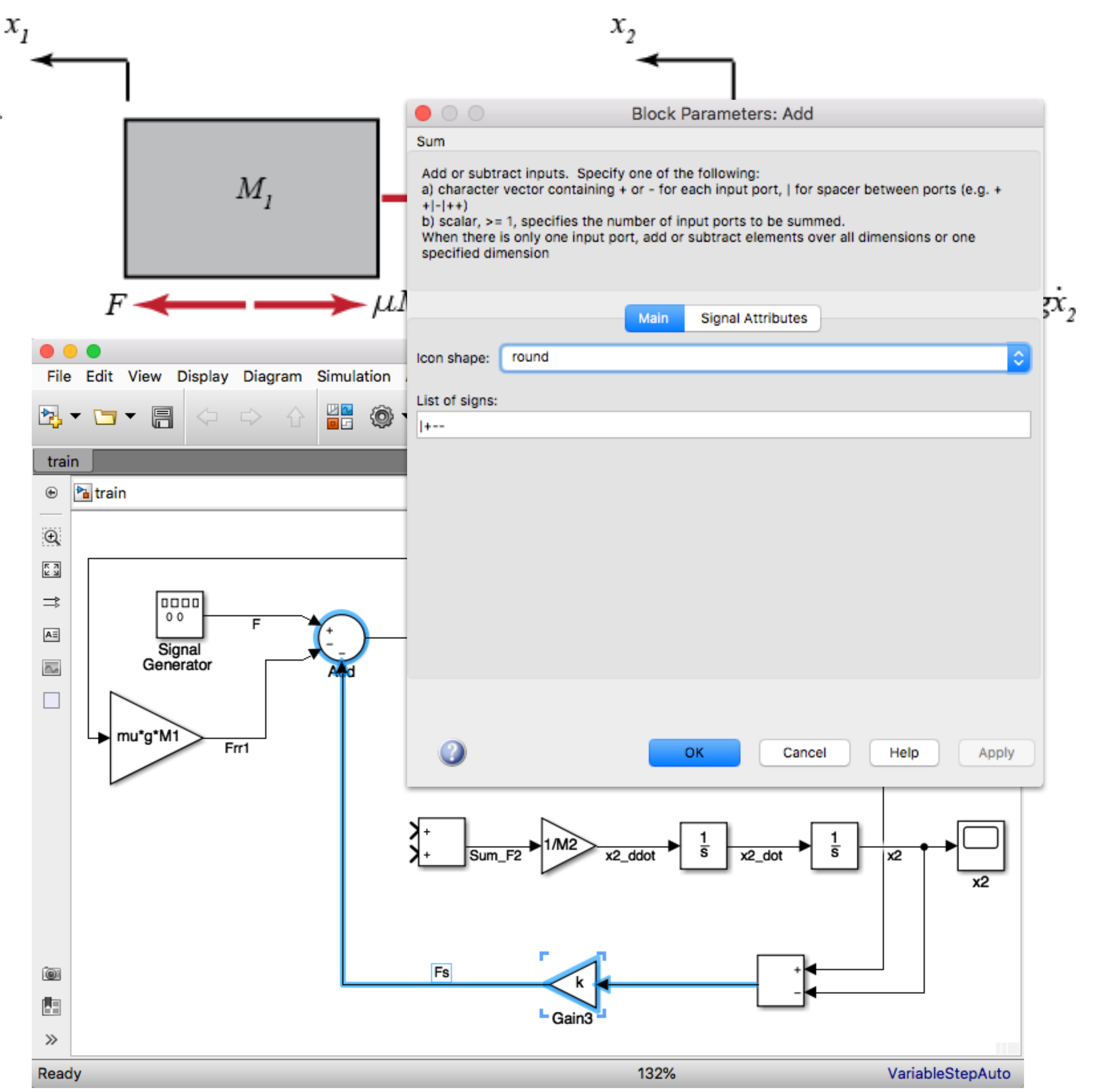


SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM

$$\sum F_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g \dot{x}_1 = M_1 \ddot{x}_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_s g \dot{x}_2 = M_2 \ddot{x}_2 \qquad (2)$$

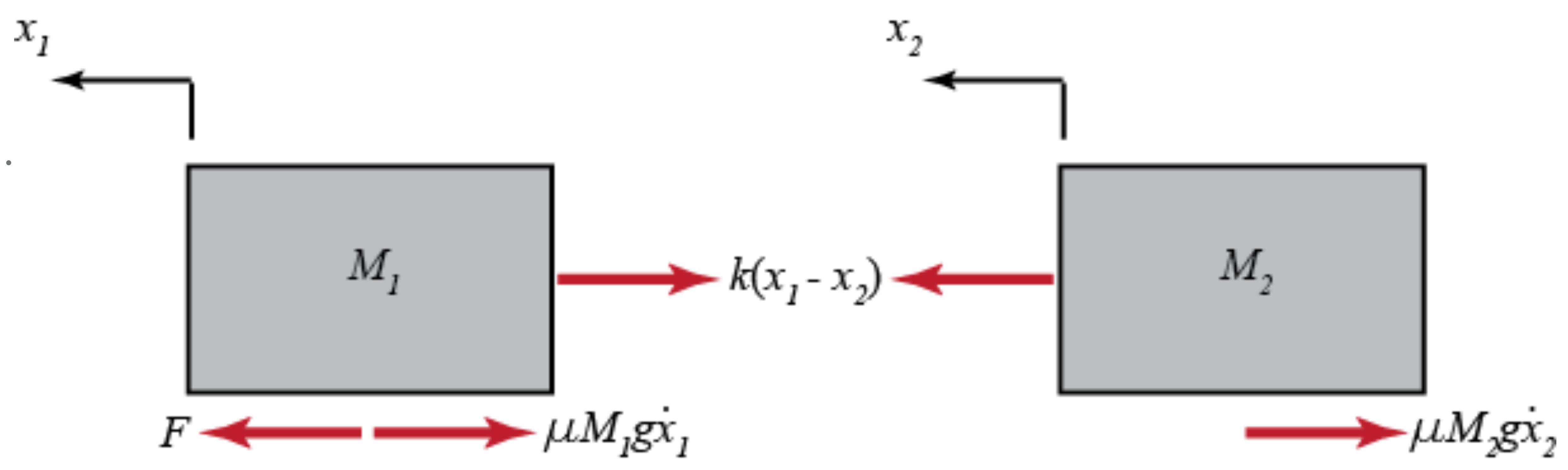
- Agora, podemos multiplicar essa diferença pela constante da mola para gerar a força da mola. Arraste um bloco de ganho para o seu modelo à esquerda do bloco de subtração. Altere o valor do bloco Gain para "k" e conecte a saída do bloco Subtract à sua entrada. Em seguida, conecte a saída do bloco Gain à terceira entrada do bloco Sum para massa 1 e rotule o sinal "Fs". Como a força da mola atua na massa 1 no sentido negativo, é necessário alterar novamente a lista de sinais do bloco Sum para "|+--". Seu modelo deve ficar como mostrado na figura ao lado.



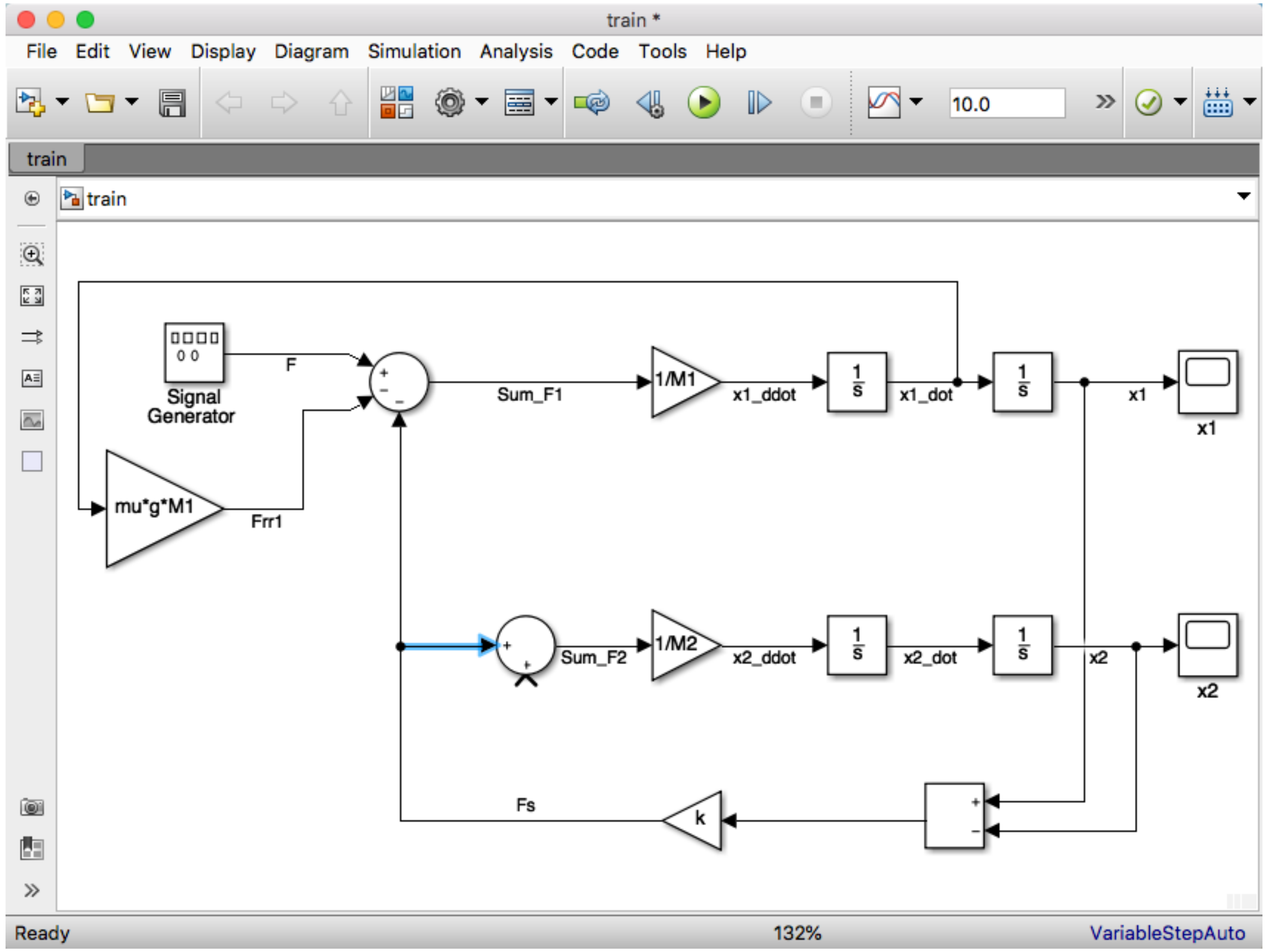
SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM

$$\sum F_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g \dot{x}_1 = M_1 \ddot{x}_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_s g \dot{x}_2 = M_2 \ddot{x}_2 \qquad (2)$$



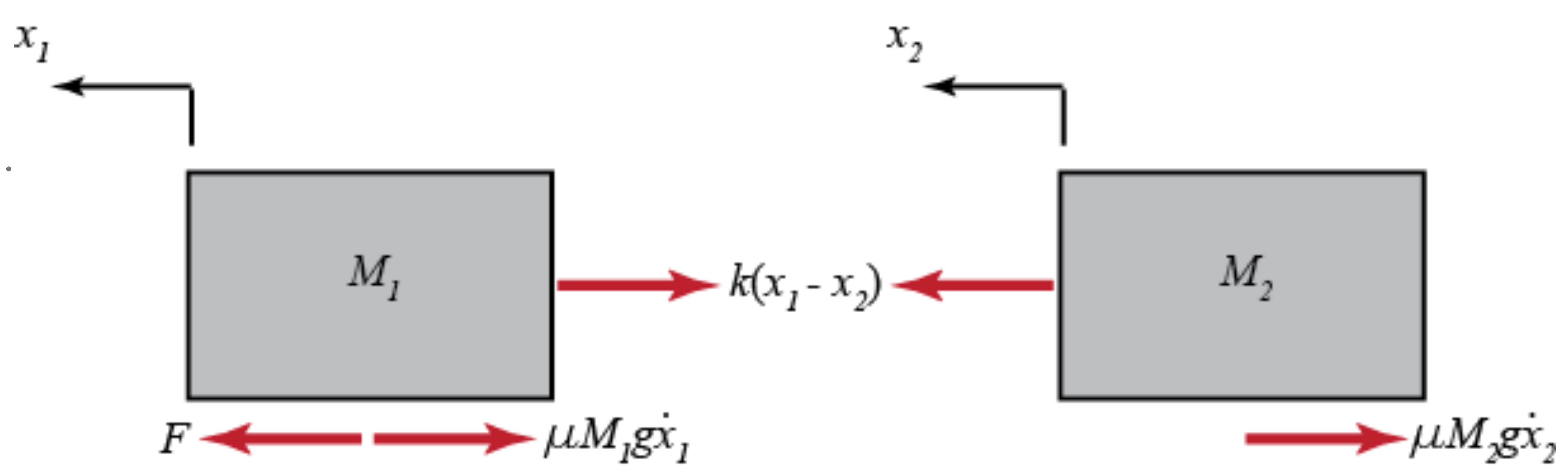
➤ Agora podemos aplicar forças à massa 2. Para a primeira força, usaremos a mesma força de mola que acabamos de gerar, exceto que ela é aplicada à massa 2 no sentido positivo. Simplesmente toque no sinal de força da mola "Fs" e conecte-o à primeira entrada do bloco Sum para massa 2.



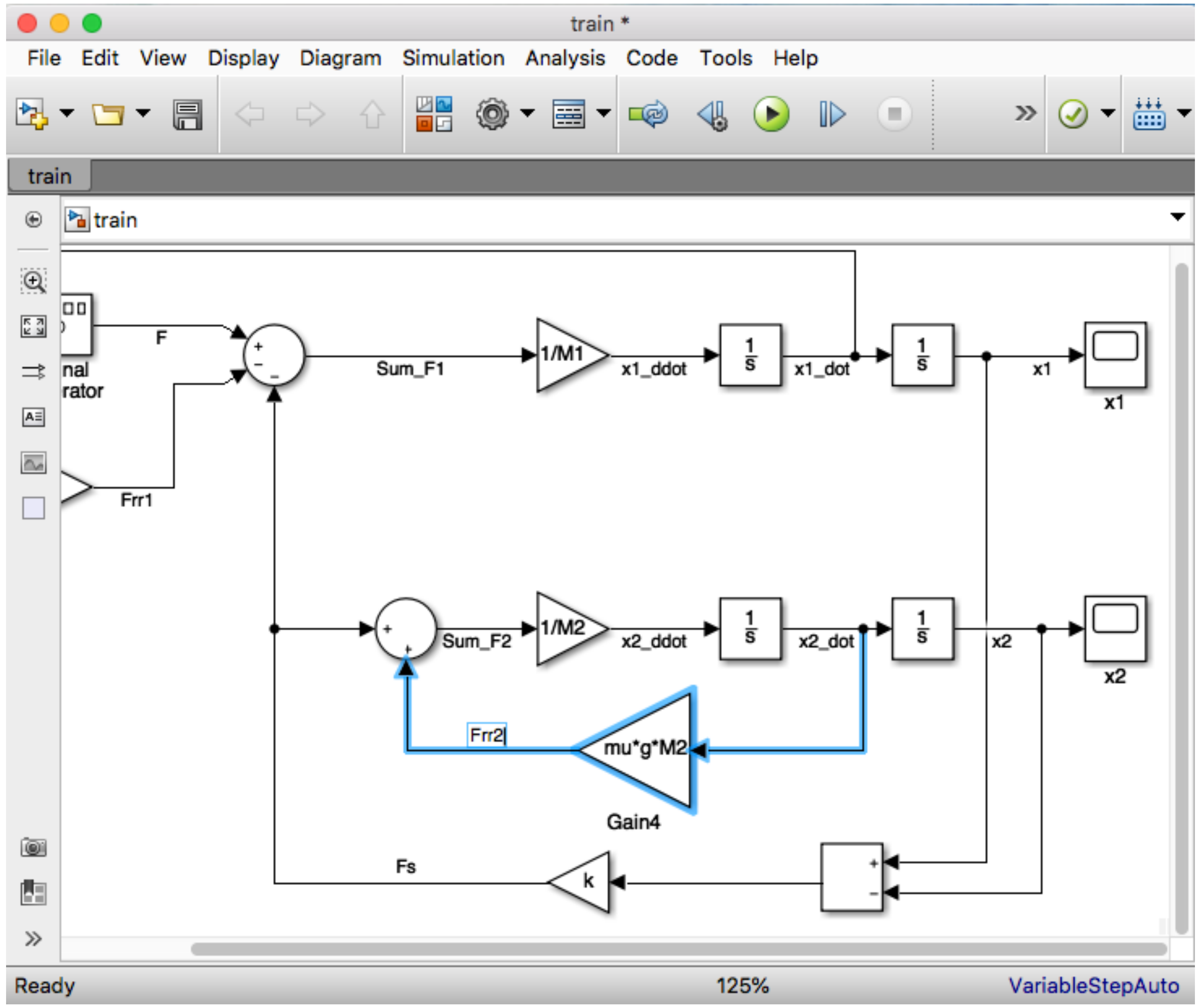
SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM

$$\sum F_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g \dot{x}_1 = M_1 \ddot{x}_1 \qquad (1)$$

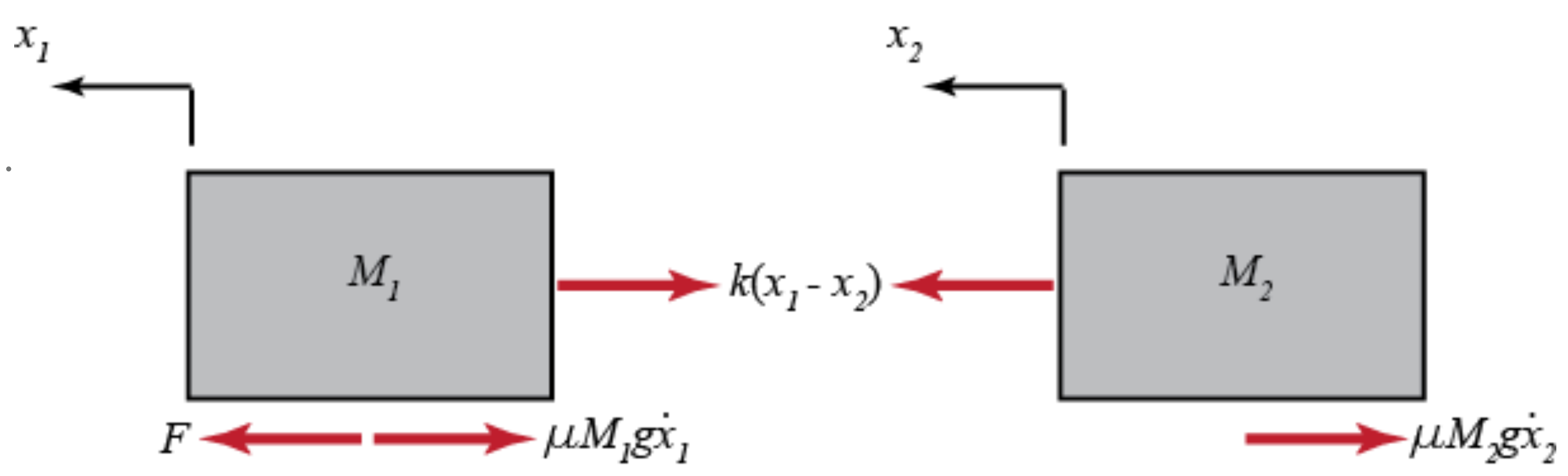
$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_s g \dot{x}_2 = M_2 \ddot{x}_2 \qquad (2)$$



- A última força aplicada à massa 2 é sua força de resistência ao rolamento. Esta força é gerada de forma análoga à força de resistência ao rolamento aplicada à massa 1. Toque no sinal "x2_dot" e multiplique-o por um bloco Gain com valor "mu*g*M2". Em seguida, conecte a saída do bloco Gain4 à segunda entrada do bloco Sum correspondente e rotule o sinal "Frr2". Alterar a segunda entrada do bloco Sum para negativo levará ao seguinte modelo.



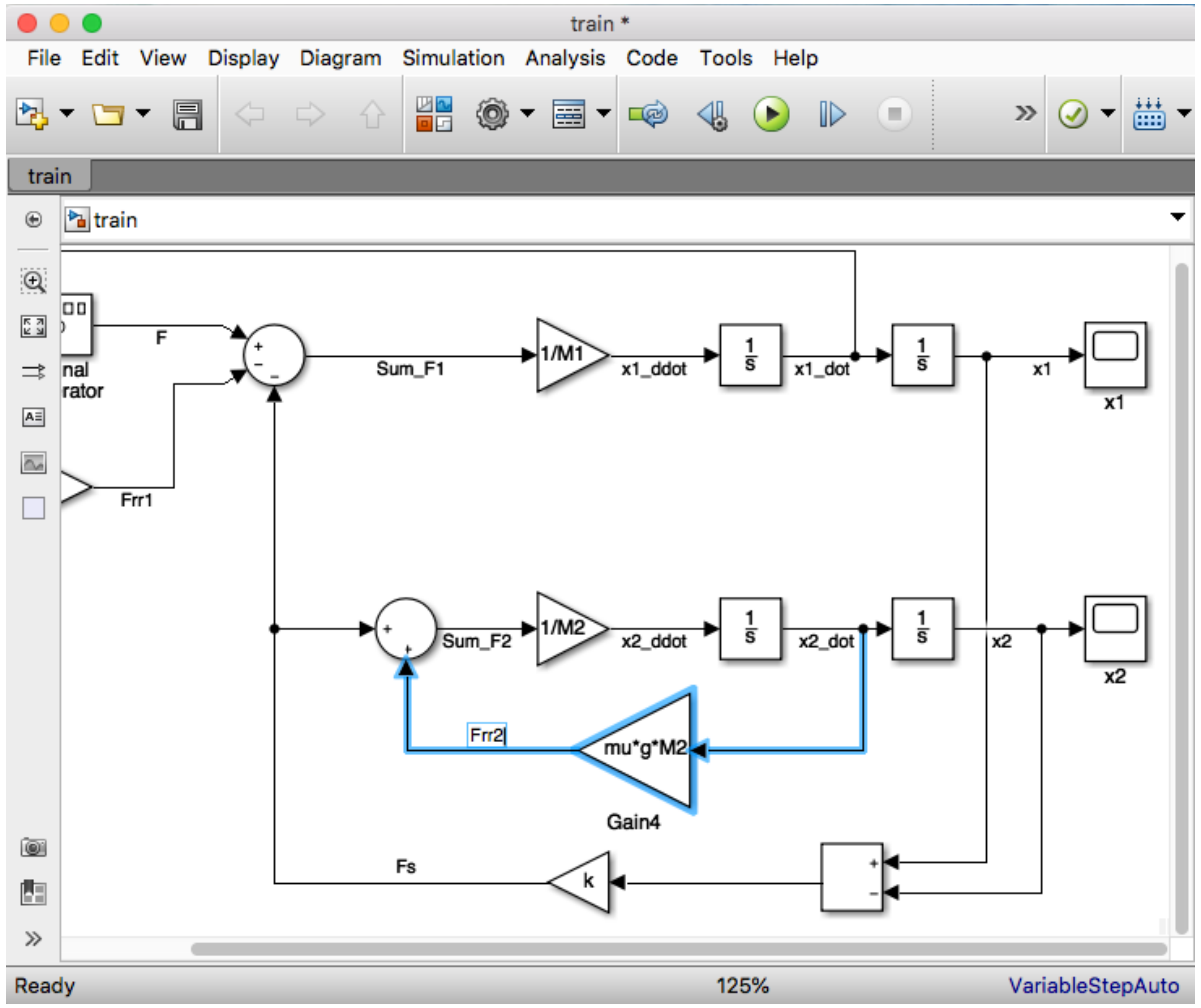
SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM



$$\sum F_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g \dot{x}_1 = M_1 \ddot{x}_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_s g \dot{x}_2 = M_2 \ddot{x}_2 \qquad (2)$$

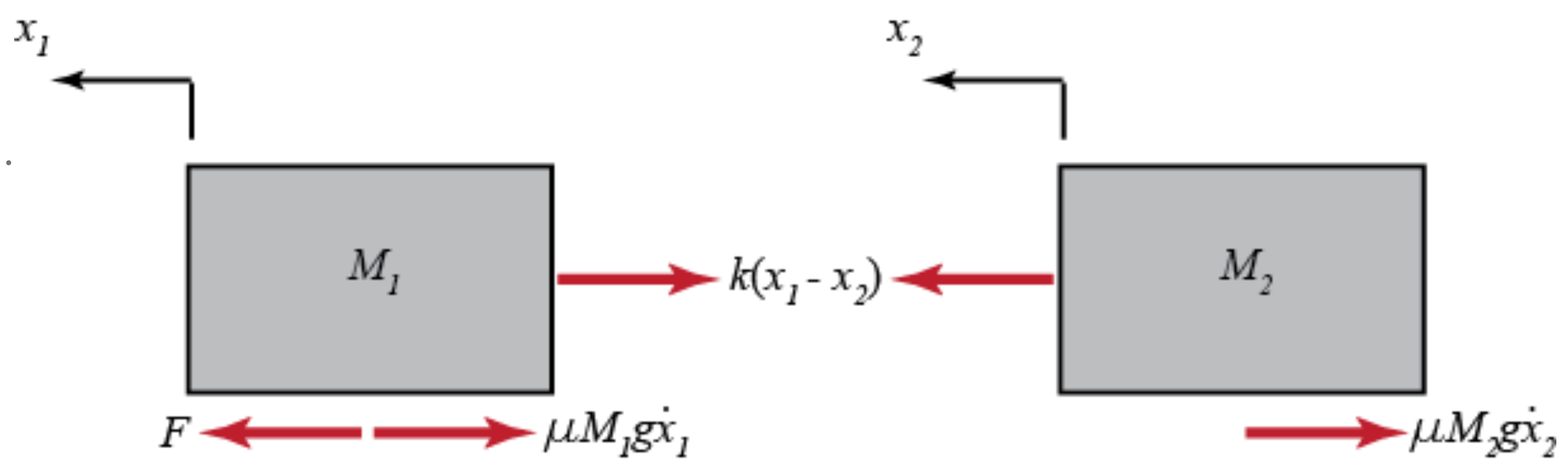
➤ Agora o modelo está completo. Nós simplesmente precisamos fornecer a entrada adequada e definir a saída de interesse. A entrada para o sistema é a força F gerada pelo motor. Dentro do modelo Simulink, já definimos a força F a ser a saída de um bloco Gerador de Sinais. A saída do sistema, que observaremos e tentaremos controlar, será a velocidade da locomotiva do trem. Adicione outro bloco Scope ao seu modelo da biblioteca Sinks. Toque em uma linha do sinal "x1_dot" e conecte-o ao bloco Scope. Rotule este escopo como "x1_dot" e seu modelo deve aparecer como mostrado na figura ao lado.



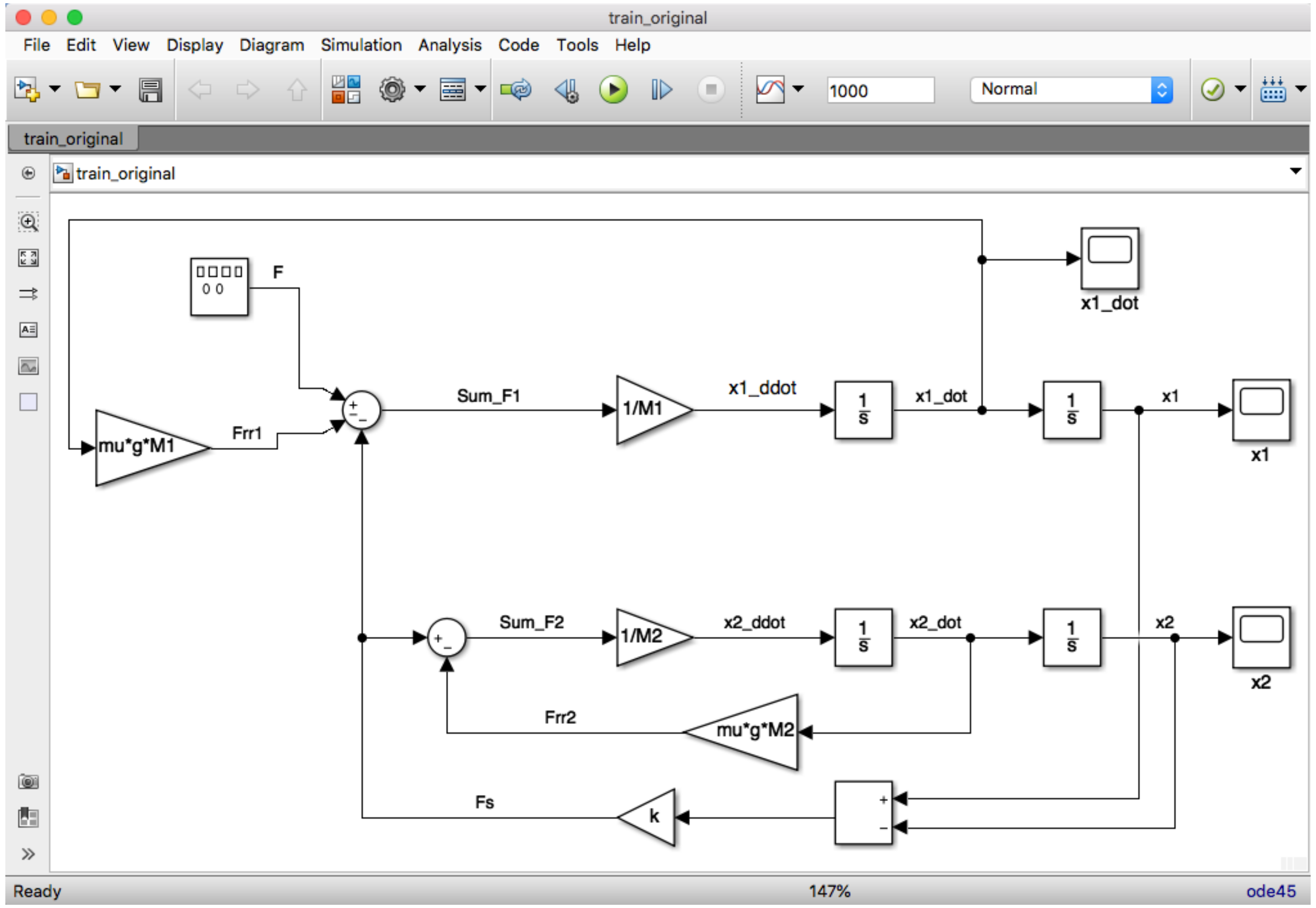
SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM

$$\sum F_1 = F - k(x_1 - x_2) - \mu M_1 g\dot{x}_1 = M_1\ddot{x}_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_2 = k(x_1 - x_2) - \mu M_s g\dot{x}_2 = M_2\ddot{x}_2 \qquad (2)$$



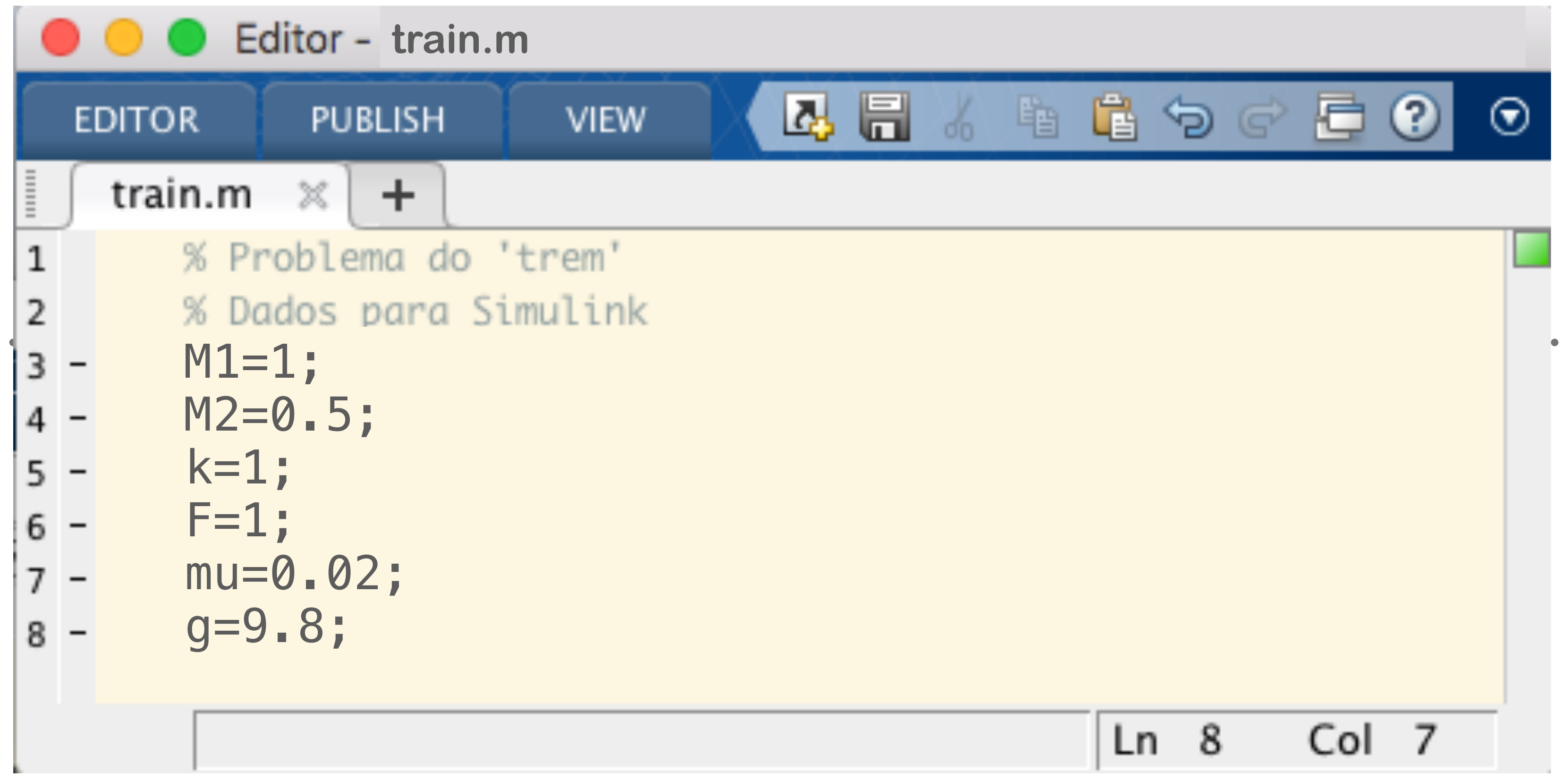
- Agora o modelo está completo. Nós simplesmente precisamos fornecer a entrada adequada e definir a saída de interesse. A entrada para o sistema é a força F gerada pelo motor. Dentro do modelo Simulink, já definimos a força F a ser a saída de um bloco Gerador de Sinais. A saída do sistema, que observaremos e tentaremos controlar, será a velocidade da locomotiva do trem. Adicione outro bloco Scope ao seu modelo da biblioteca Sinks. Toque em uma linha do sinal "x1_dot" e conecte-o ao bloco Scope. Rotule este Scope como "x1_dot" e seu modelo deve aparecer como mostrado na figura ao lado.

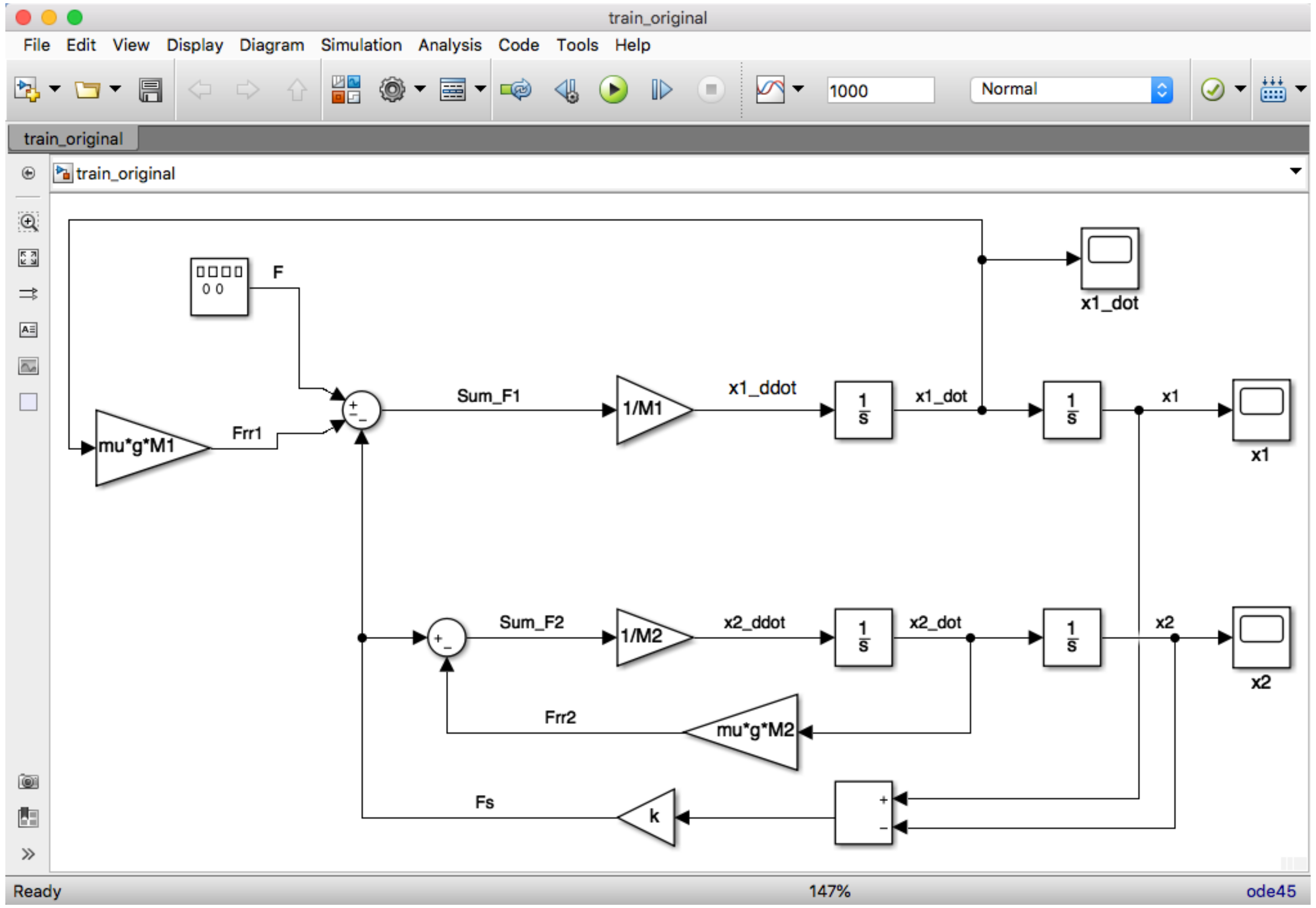


SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM

Executando o modelo:

- Antes de executar o modelo, precisamos atribuir valores numéricos a cada uma das variáveis usadas no modelo. Para o sistema de trens, empregaremos os seguintes valores:
  $M_1 = 1\ (Kg)$
  $M_2 = 0{,}5\ (Kg)$
  $k = 1\ (N/s)$
  $F = 1\ (N)$
  $\mu = 0{,}02\ (s/m)$
  $g = 9{,}8\ (m/s^2)$
- Crie um novo arquivo train.m e digitar estes dados.
- Execute seu arquivo m na janela de comando do MATLAB para definir esses valores. O Simulink reconhecerá essas variáveis MATLAB para uso no modelo.



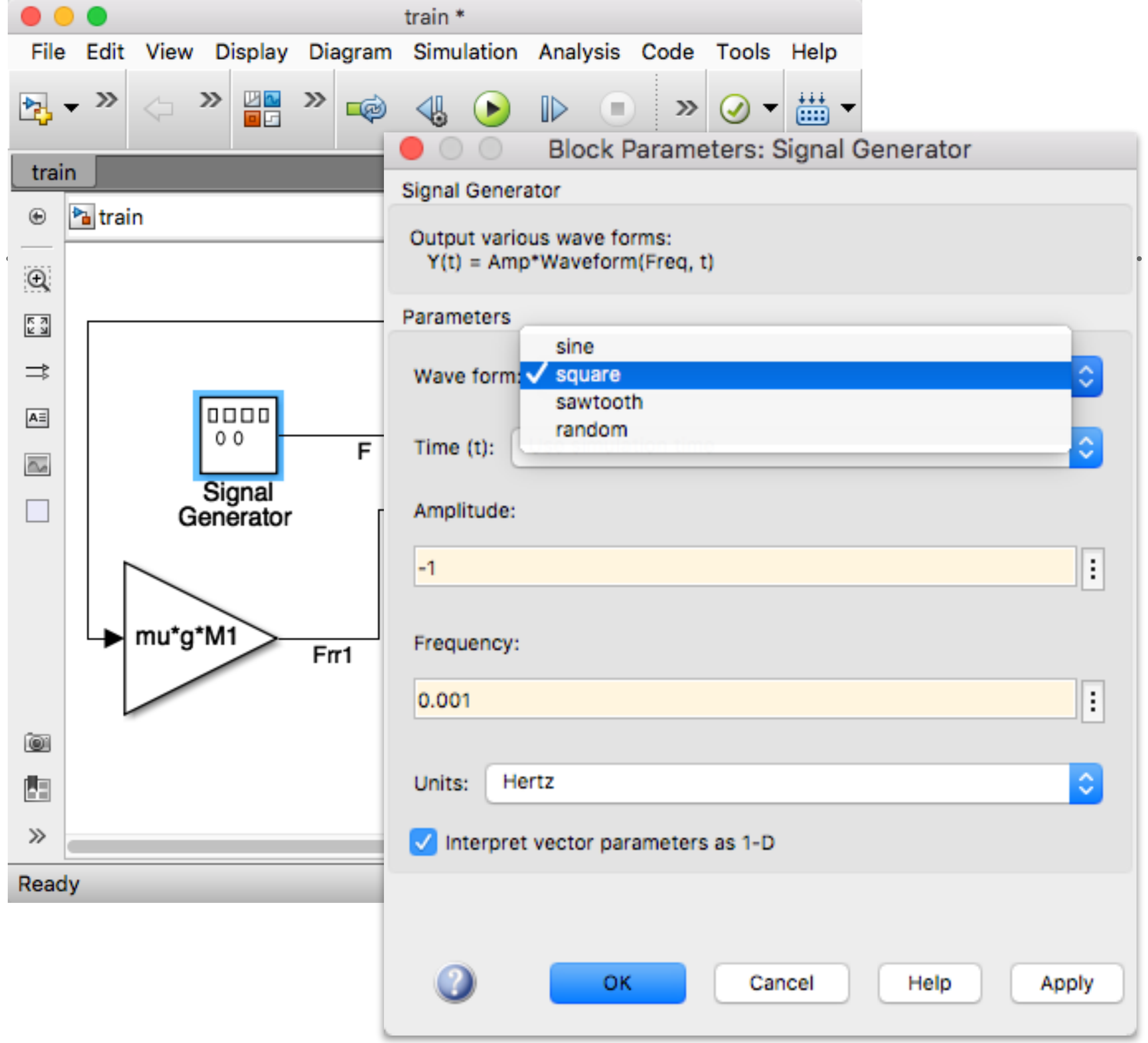


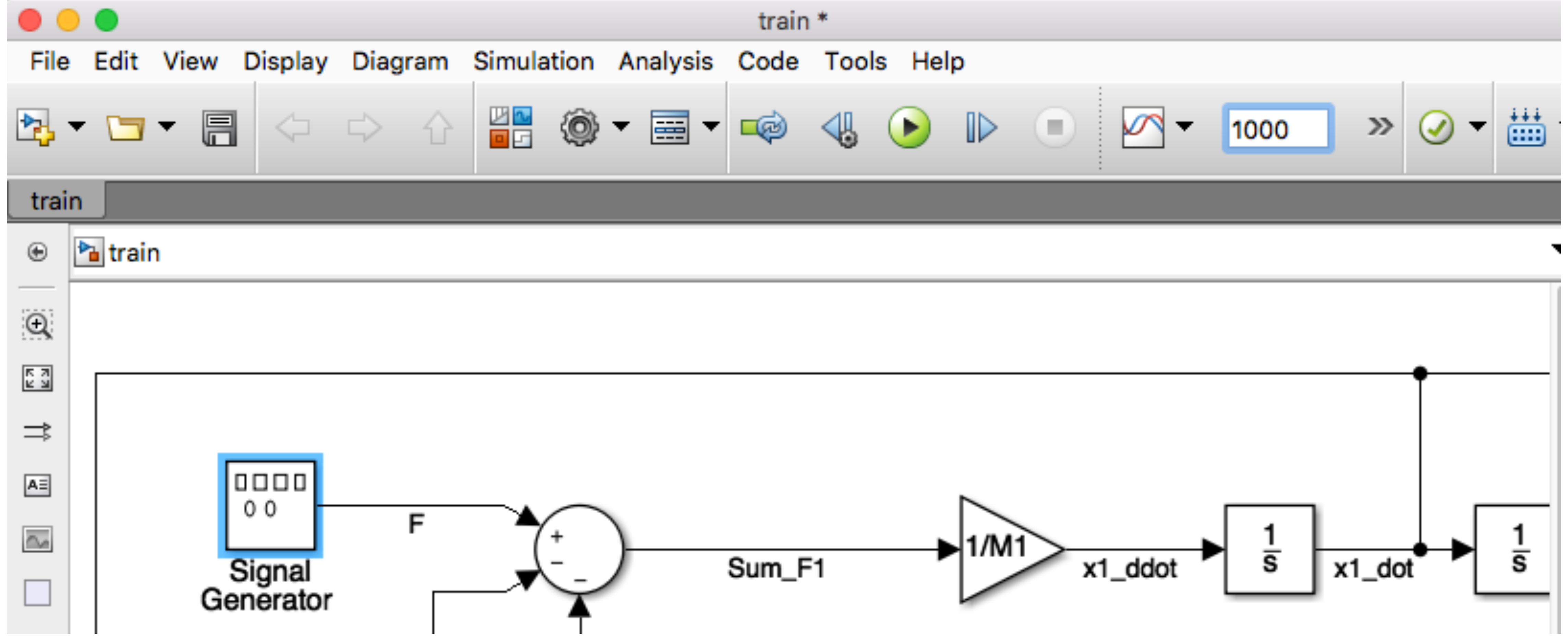
SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM

Executando o modelo:

➤ Agora, precisamos dar uma entrada apropriada para o motor. Clique duas vezes no bloco Signal Generator (saídas "F"). Selecione quadrado no menu suspenso Forma de **onda** e defina o campo **Frequência** para igual a “0.001". Você pode deixar as **Unidades** como Hertz padrão. Também digite "-1" no campo **Amplitude** (amplitude positiva passa para negativo antes de passar para positivo).

➤ O último passo antes de executar a simulação é selecionar um tempo de simulação apropriado. Para visualizar um ciclo da onda quadrada de 0,001 Hz, devemos simular o modelo por 1000 segundos. Selecione Parâmetros de configuração do modelo no menu Simulação na parte superior da janela do modelo e altere o campo Tempo de parada para "1000". Feche a caixa de diálogo.





SIMULINK EXEMPLO: SISTEMA DE TREM

Executando o modelo:

- Agora, execute a simulação e abra o escopo "x1_dot" para examinar a saída de velocidade. A entrada foi uma onda quadrada com duas etapas, uma positiva e outra negativa. Fisicamente, isso significa que o motor primeiro foi para frente, depois para trás. A saída de velocidade reflete isso.