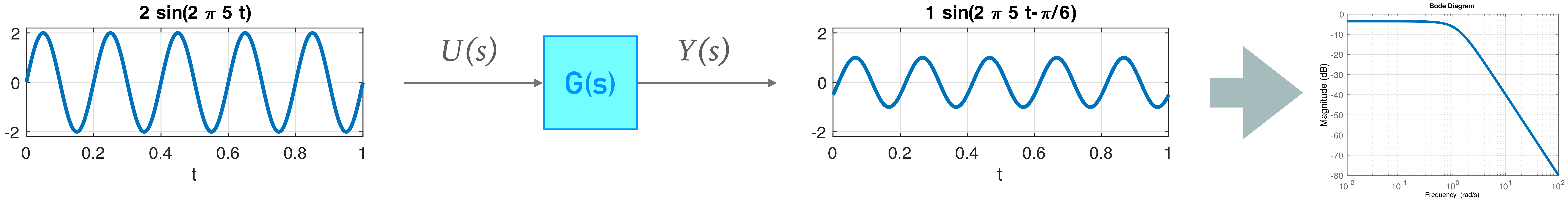
4) MODELAGEM USANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE

Controle Automático I
Prof. Fernando Passold
2022

FUNÇÕES TRANSFERÊNCIA

- Sistemas lineares contínuos invariantes no tempo (LTI) têm a propriedade extremamente importante de que, se a entrada do sistema for senoidal, a saída também será senoidal com a mesma frequência da entrada, mas com magnitude e fase possivelmente diferentes. Essas diferenças de magnitude e fase são uma função da frequência e capturam o que é conhecido como a **resposta em frequência do sistema**.



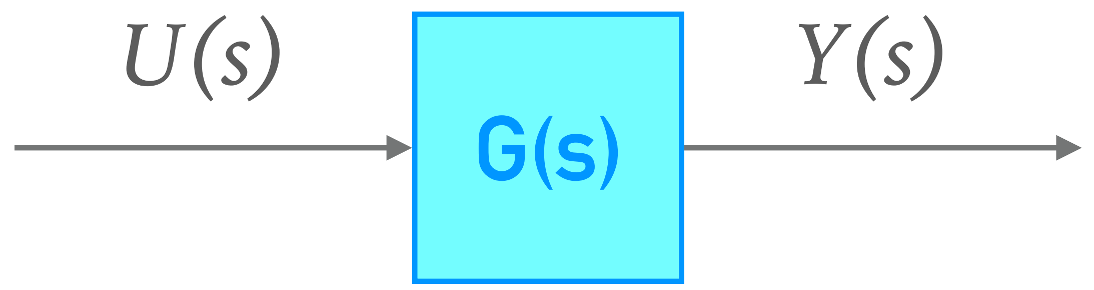
- Usando a **transformada de Laplace**, é possível converter a representação no domínio do tempo de um sistema em uma representação de entrada/saída no domínio da frequência, conhecida como função de transferência. Ao fazê-lo, também transforma a equação diferencial governante em uma equação algébrica que geralmente é mais fácil de analisar.

- A transformada de Laplace da *n*-ésima derivada de uma função é particularmente importante:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) + \ldots + f^{n-1}(0)$$

FUNÇÕES TRANSFERÊNCIA

- Os métodos de domínio de frequência são mais frequentemente usados para analisar sistemas LTI de entrada única/saída única (SISO), por exemplo, aqueles governados por uma equação diferencial de coeficiente constante, conforme mostrado abaixo:
$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t)$$



- A transformada de Laplace desta equação é dada abaixo:
$$a_n s^n Y(s) + \ldots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \ldots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$
- onde $Y(s)$ e $U(s)$ são as Transformadas de Laplace de $y(t)$ e $u(t)$, respectivamente. Observe que ao encontrar funções de transferência, sempre assumimos que cada uma das condições iniciais, $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $u(0)$, etc. é zero. A função de transferência da entrada $U(s)$ para a saída $Y(s)$ é, portanto:
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$
- É útil fatorar o numerador e o denominador da função de transferência no que é chamado de forma de ganho de pólo zero:
$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_{m-1})(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_{n-1})(s - p_n)}$$
- Os **zeros** da função de transferência, $z_1, \ldots, z_m$, são as raízes do polinômio numerador, ou seja, os valores de s tal que $N(s) = 0$. Os **pólos** da função de transferência, $p_1, \ldots, p_n$, são as raízes do polinômio denominador, ou seja, os valores de s tal que $D(s) = 0$. Tanto os zeros quanto os pólos podem ter valores complexos (têm partes reais e imaginárias). O **ganho** do sistema é $K = b_m / a_n$.

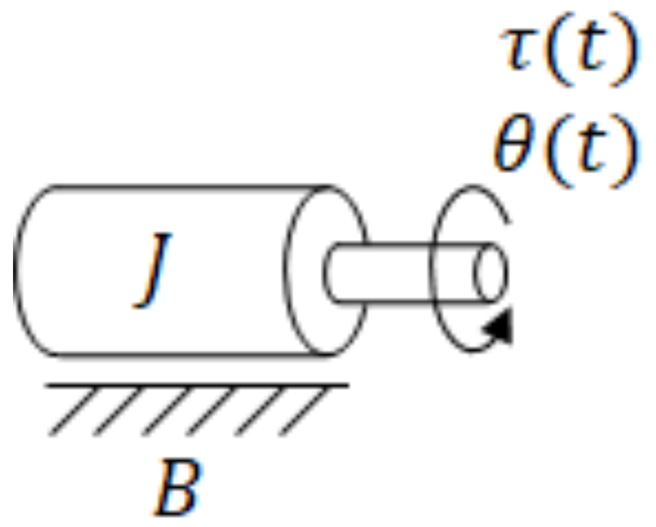
MODELAGEM DE SISTEMAS MECÂNICOS

- As leis do movimento de Newton formam a base para a análise de sistemas mecânicos. A **segunda lei de Newton**, eq. (1), afirma que a soma das forças que atuam sobre um corpo é igual ao produto de sua massa e aceleração. A t**erceira lei de Newton**, para nossos propósitos, afirma que se dois corpos estão em contato, então eles experimentam a mesma força de contato de magnitude, apenas agindo em direções opostas:

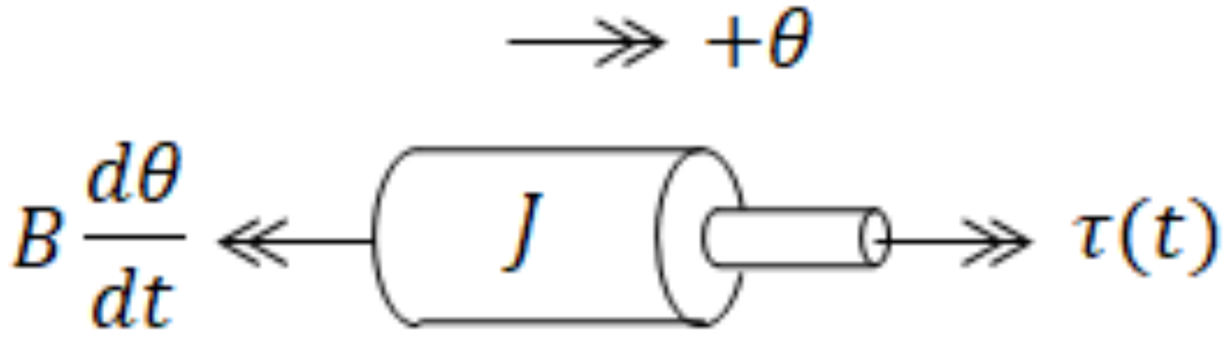
$$\sum \overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a} = m \, \frac{d^2 \, \overrightarrow{x}}{dt^2} \qquad (1)$$

- Ao aplicar esta equação, é melhor construir um **diagrama de corpo livre** (FBD) do sistema mostrando todas as forças aplicadas.

EXEMPLO_1: MASSA COM ATRITO ROTACIONAL.



(a) Diagrama do sistema.



(b) Diagrama do corpo livre.

- **Parâmetros:**

(entrada)	$\tau(t) =$	torque aplicado;	
(saída)	$\theta(t) =$	ângulo da rotação;	(desconhecido)
	$J =$	inércia;	
	$B =$	coeficiente de atrito..	

- **Equação diferencial:**

  2a-Lei de Newton: $\tau(t) - B\dfrac{d\,\theta}{dt} = J\dfrac{d^2\,\theta}{dt^2}$

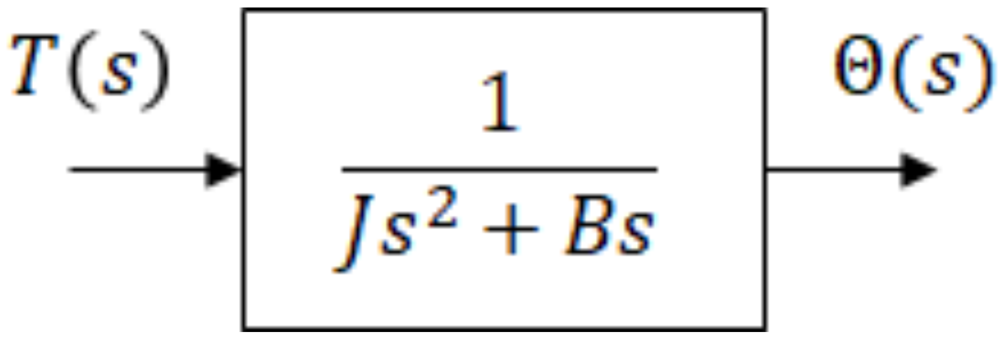
- **Transformada de Laplace:**

  $T(s) - Bs\Theta(s) = ms^2\Theta(s)$

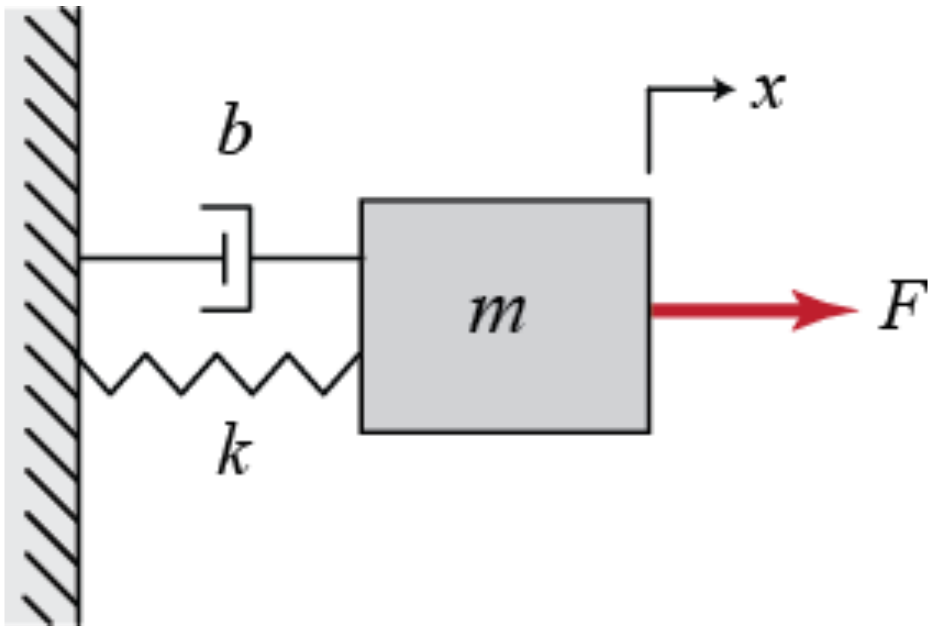
- **Função Transferência**: encontrando saída/entrada:

$$\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs}$$

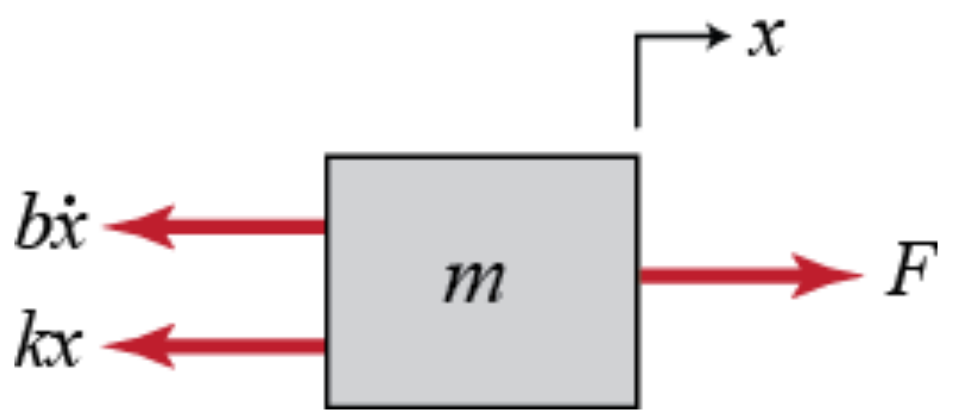
- **Diagrama de Blocos:**



EXEMPLO_2: SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR



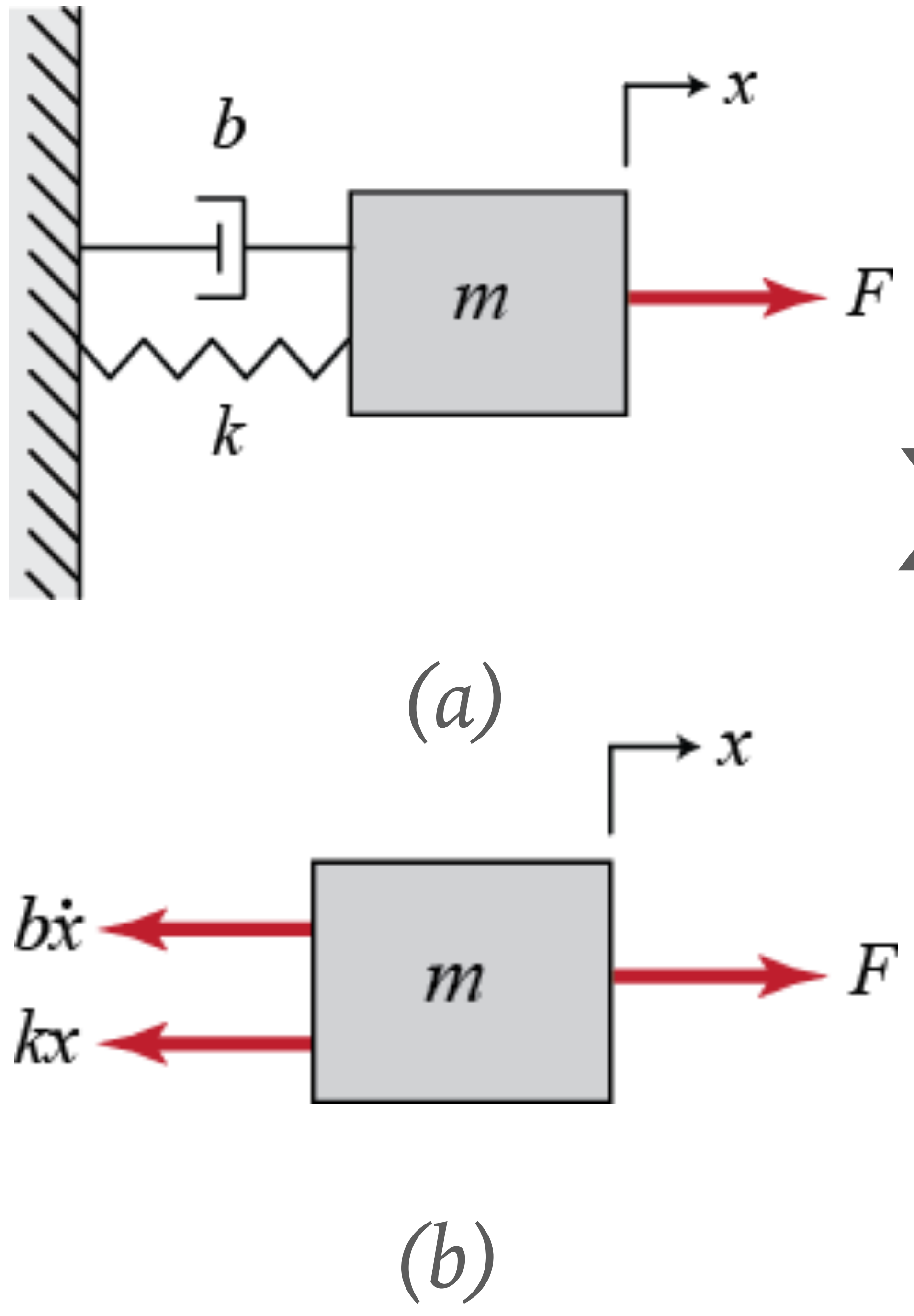
(a)



(b)

- O diagrama de corpo livre do sistema da fig. (a) para este sistema é mostrado na fig. (b). A força da mola é proporcional ao deslocamento da massa, x, e a força de amortecimento viscosa é proporcional à velocidade da massa, $v = \dot{x}$. Ambas as forças se opõem ao movimento da massa e são, portanto, mostradas na direção negativa x. Observe também que $x = 0$ corresponde à posição da massa quando a mola não está esticada.
- Agora vamos somar as forças e aplicar a segunda lei de Newton, eq. (1), em cada direção. Nesse caso, não há forças atuando na direção y; no entanto, na direção $x$temos:
$$\sum F_x = F(t) - b\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$
- Essa equação, conhecida como **equação governante**, caracteriza completamente o estado dinâmico do sistema. Mais tarde, veremos como usar isso para calcular a resposta do sistema a qualquer entrada externa, $F(t)$, bem como analisar propriedades do sistema, como estabilidade e desempenho.
- A transformada de Laplace para este sistema assumindo condições iniciais zero é:
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

EXEMPLO_2: SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR



$$\sum F_x = F(t) - b\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

➤ Dados:

Massa	m	1.0 Kg
Constante mola	k	1.0 N/m
Constante amortecimento	b	0.2 Ns/m
Força (excitação)	F	1.0 N

➤ Matlab:

```
m = 1;
k = 1;
b = 0.2;
F = 1;
s = tf('s');
sys = 1/(m*s^2+b*s+k)
```

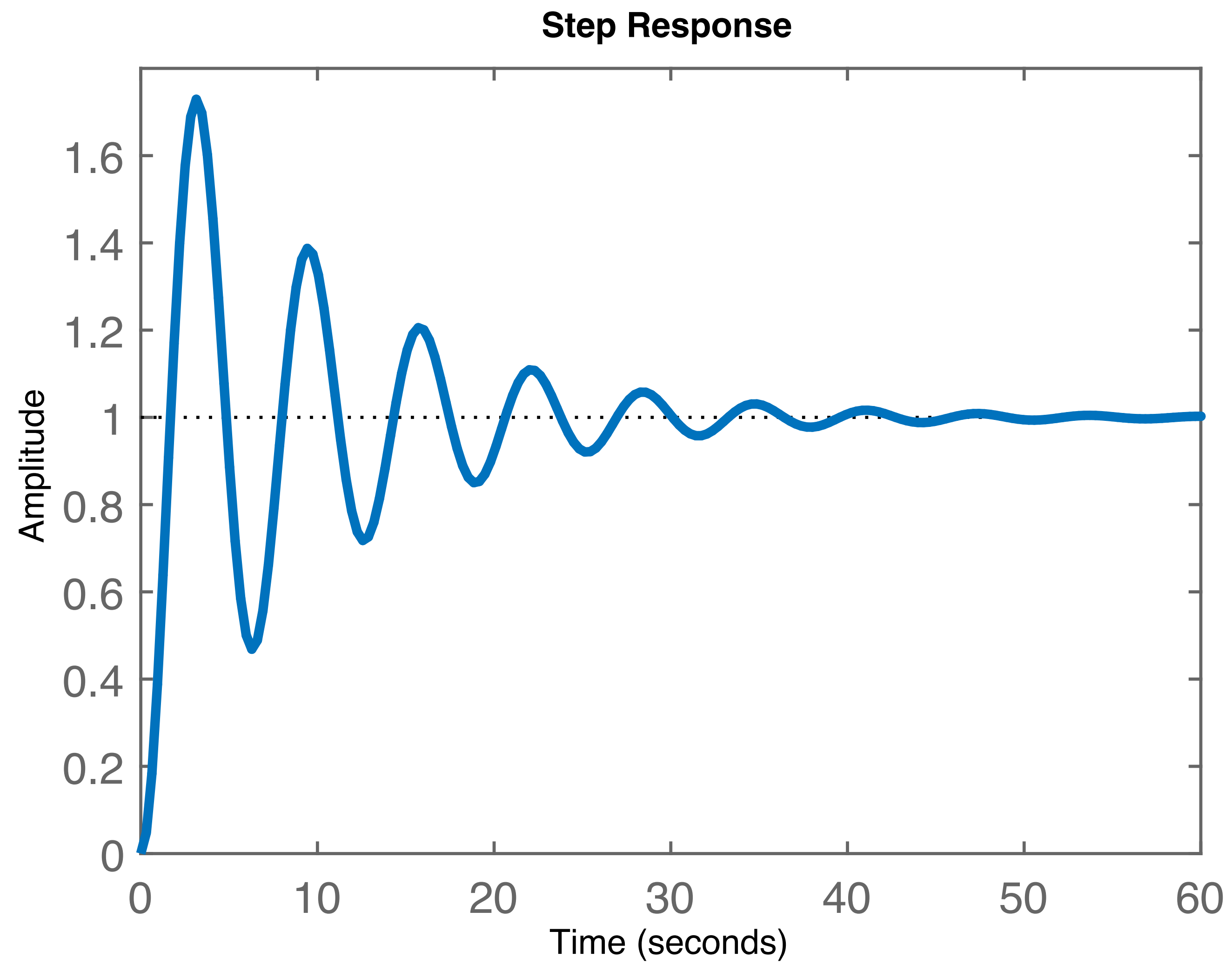
Ou:

```
num = [1];
den = [m b k];
sys = tf(num,den)
```

Excitando sistema com entrada degrau, teremos:

```
step(sys)
```

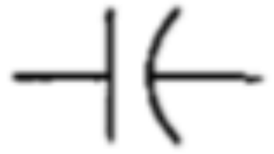
O que gera o gráfico ao lado:



MODELAGEM DE SISTEMAS ELÉTRICOS

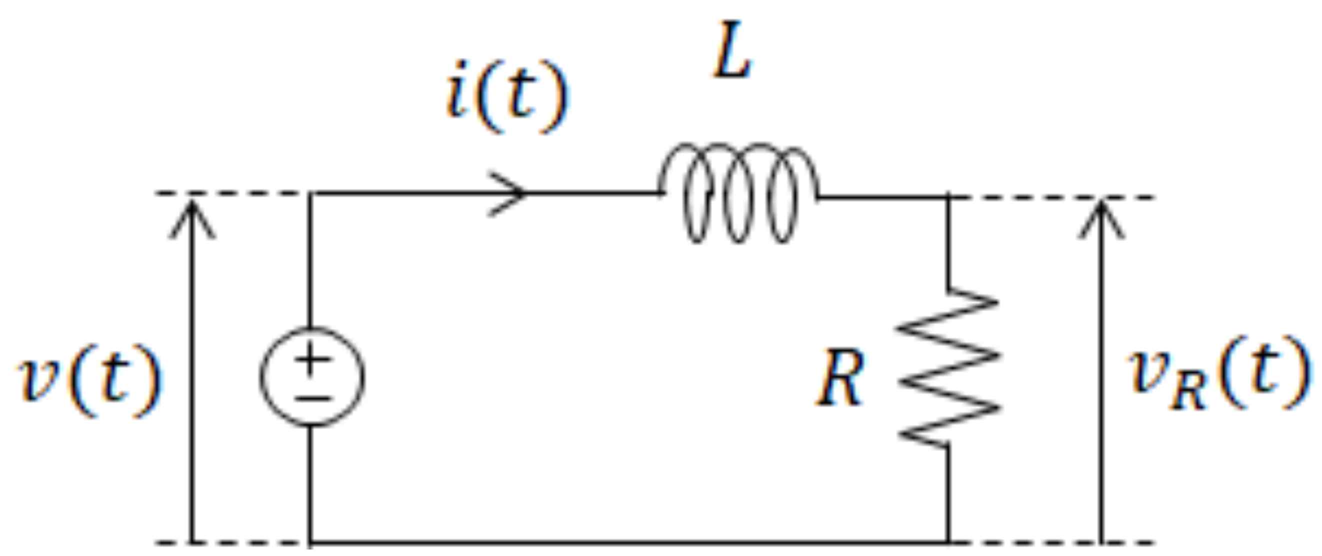
Assim como as leis de Newton para sistemas mecânicos, as leis de circuitos de Kirchoff são ferramentas analíticas fundamentais para a modelagem de sistemas elétricos. A **lei dos nós (corrente) de Kirchoff (KCL)** afirma que a soma das correntes elétricas que entram em um nó em um circuito deve ser igual à soma das correntes elétricas que saem do nó. A **lei das malhas (tensão) de Kirchoff (KVL)** afirma que a soma das diferenças de tensão em torno de qualquer circuito fechado em um circuito é zero. Ao aplicar KVL, as tensões da fonte são normalmente consideradas positivas e as tensões de carga são consideradas negativas.

TABLE 2.3 Voltage-current, voltage-charge, and impedance relationships for capacitors, resistors, and inductors

Component	Voltage-current	Current-voltage	Voltage-charge	Impedance $Z(s) = V(s)/I(s)$	Admittance $Y(s) = I(s)/V(s)$
 Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^1 i(\tau)d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
 Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
 Inductor	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^1 v(\tau)d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $v(t)$ – V (volts), $i(t)$ – A (amps), $q(t)$ – Q (coulombs), C – F (farads), R – Ω (ohms), G – Ω (mhos), L – H (henries).

EXEMPLO_3: CIRCUITO RL



- **Parâmetros:**

(entrada) $v(t) =$ tensão de entrada;
(saída) $v_R(t) =$ tensão no resistor; (desconhecido)
$i(t) =$ corrente; (desconhecido)
$L =$ indutância;
$R =$ resistência.

- **Equações diferenciais:**

2 incógnitas: 2 equações necessárias:

(1) Lei das (malhas) de tensão de Kirchoff: $v(t) - L\dfrac{di}{dt} - Ri(t) = 0$

(2) Tensão sobre resistor: $v_R(t) = R\,i(t)$

- **Função Transferência:**

(1) $V(s) - LsI(s) - RI(s) = 0$
(2) $V_R(s) = RI(s)$

- **Solução para as incógnitas:**

(3) $I(s) = \dfrac{V(s)}{Ls + R}$
(4) $V_R(s) = \dfrac{R\,V(s)}{Ls + R}$

- **Encontrando $V_R(s) \big/ V(s)$:**

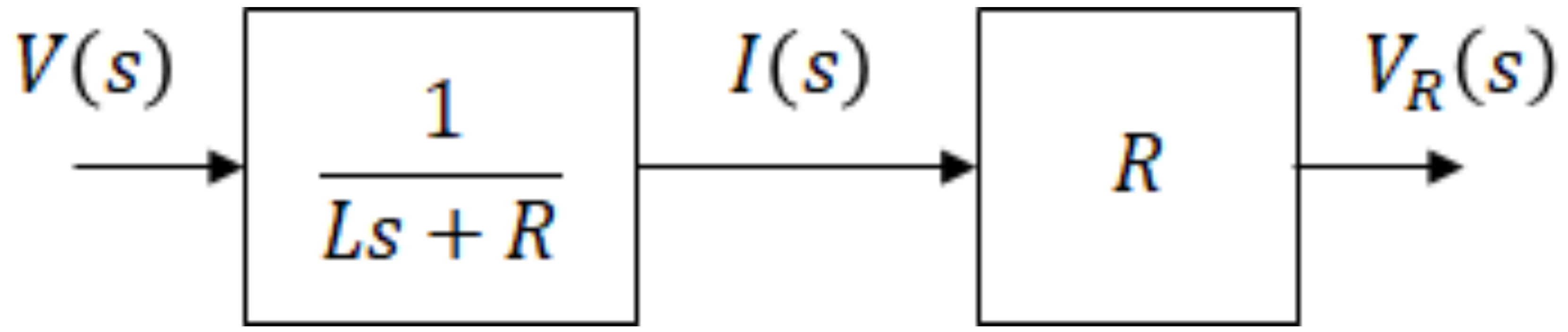
$$\frac{V_R(s)}{V(s)} = \frac{R}{Ls + R}$$

- **Diagrama de Blocos:**

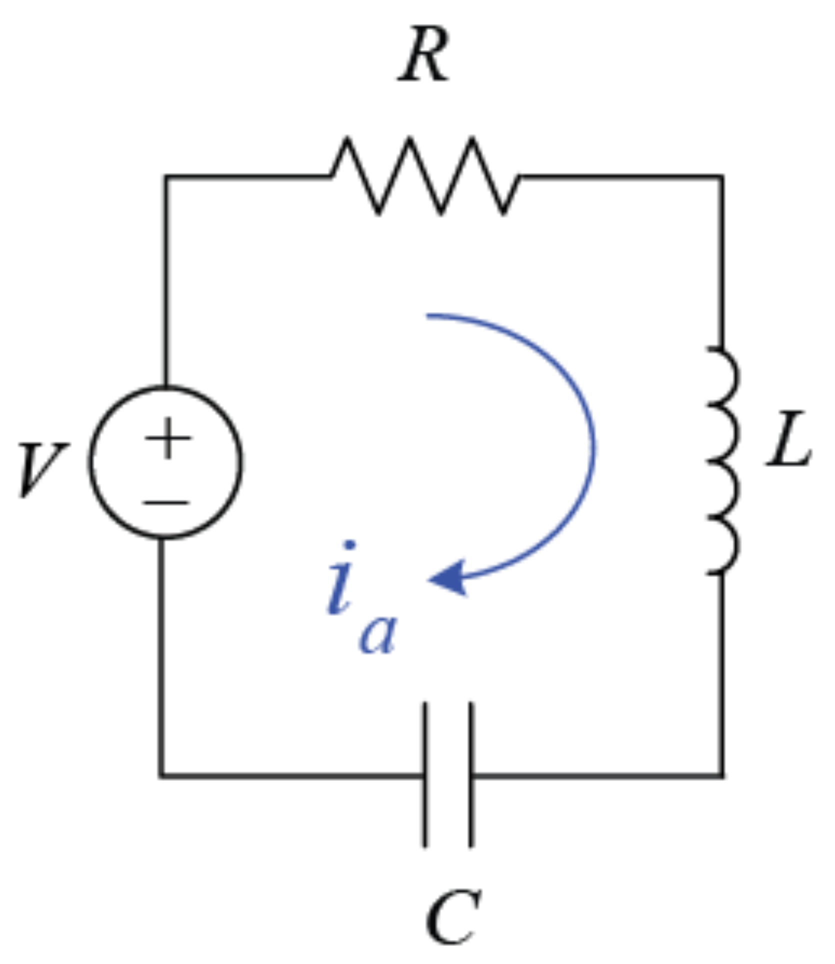
Trabalhando com as eq. (3) e (2):

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Ls + R}$$

$$\frac{V_R(s)}{I(s)} = R$$



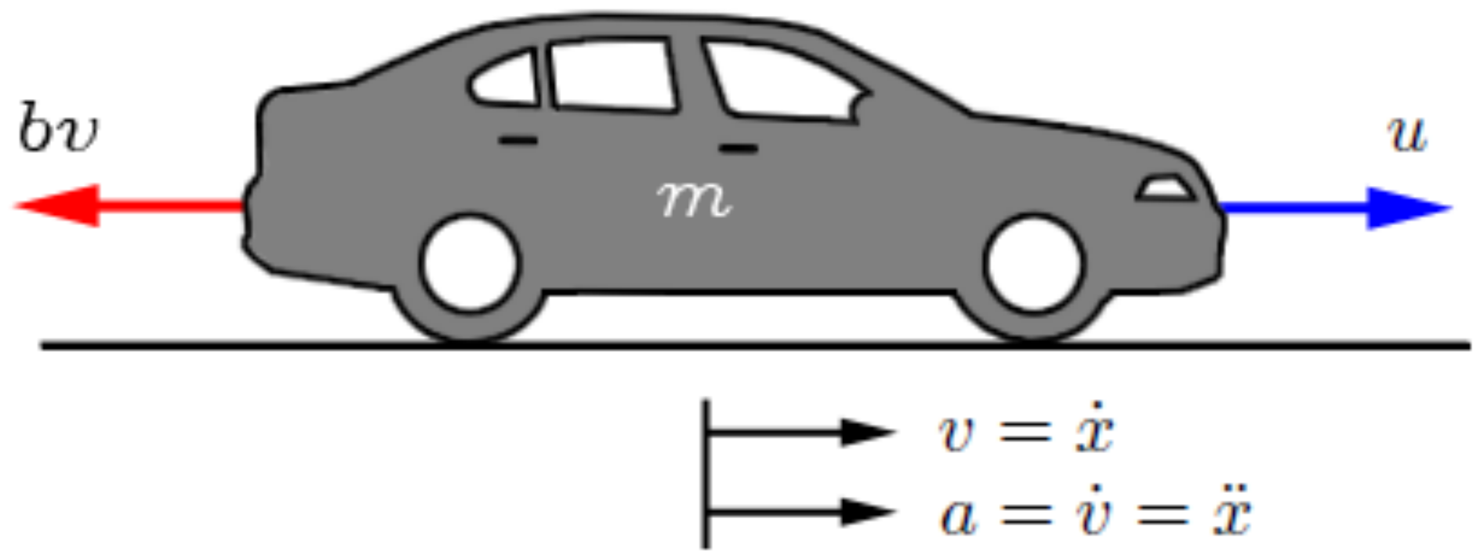
EXEMPLO_4: CIRCUITO RLC



- Vamos agora considerar uma simples combinação em série de três elementos elétricos passivos: um resistor, um indutor e um capacitor, conhecido como Circuito RLC.
- Como este circuito é uma malha única, cada nó possui apenas uma entrada e uma saída; portanto, a aplicação de KCL (**lei dos nós (corrente) de Kirchoff**) simplesmente mostra que a corrente é a mesma em todo o circuito em um dado instante, $i(t)$. Agora aplicando KVL (**lei das malhas (tensão) de Kirchoff**) ao redor do laço e usando as convenções de sinais indicadas no diagrama, chegamos à seguinte **equação governante**:
$$V(t) - Ri - L\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\int i\,dt = 0$$
- Notamos que a equação governante para o circuito RLC tem uma forma análoga ao sistema mecânico massa-mola-amortecedor. Em particular, ambos são sistemas de segunda ordem onde a carga (integral da corrente) corresponde ao deslocamento, a indutância corresponde à massa, a resistência corresponde ao amortecimento viscoso e a capacitância inversa corresponde à rigidez da mola. Essas analogias e outras semelhantes acabam sendo bastante úteis conceitualmente na compreensão do comportamento de sistemas dinâmicos.
- A representação da função de transferência pode ser encontrada tomando a transformada de Laplace como fizemos para a massa-mola-amortecedor ou a partir da equação do espaço de estados da seguinte forma:
$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{s}{Ls^2 + Rs + 1/C}$$

MODELAGEM 1) PILOTO AUTOMÁTICO

- O objetivo do sistema de piloto automático é manter uma velocidade constante do veículo, apesar de distúrbios externos, como mudanças no vento ou na inclinação da estrada. Isso é feito medindo a velocidade do veículo, comparando-a com a velocidade desejada ou de referência e ajustando automaticamente o acelerador de acordo com uma lei de controle.
- Consideramos aqui um modelo simples da dinâmica veicular, mostrado no diagrama de corpo livre (FBD) acima. O veículo, de massa m, é acionado por uma força de controle, u. A força u representa a força gerada na interface estrada/pneu. Para este modelo simplificado, assumiremos que podemos controlar essa força diretamente e desprezaremos a dinâmica do trem de força, pneus, etc., que geram a força. As forças resistivas, bv, devido à resistência ao rolamento e ao arrasto do vento, são assumidas que variam linearmente com a velocidade do veículo, v, e atuam na direção oposta ao movimento do veículo.
- **Equações do sistema:**
  Com as suposições anteriores, ficamos com um sistema massa-amortecedor de primeira ordem. Somando as forças na direção x e aplicando a 2ª lei de Newton, chegamos à eq. (1) do sistema.
- Como estamos interessados em controlar a velocidade do veículo, a equação de saída é escolhida na forma da eq. (2).
- Tomando a transformada de Laplace da equação diferencial governante e assumindo condições iniciais nulas, a **função de transferência** do sistema fica como a eq. (3).



- Dados:

Massa veículo, $m = 1000$ (Kg)
Coeficiente de amortecimento, $b = 50$ (Ns/m)

- Equações:

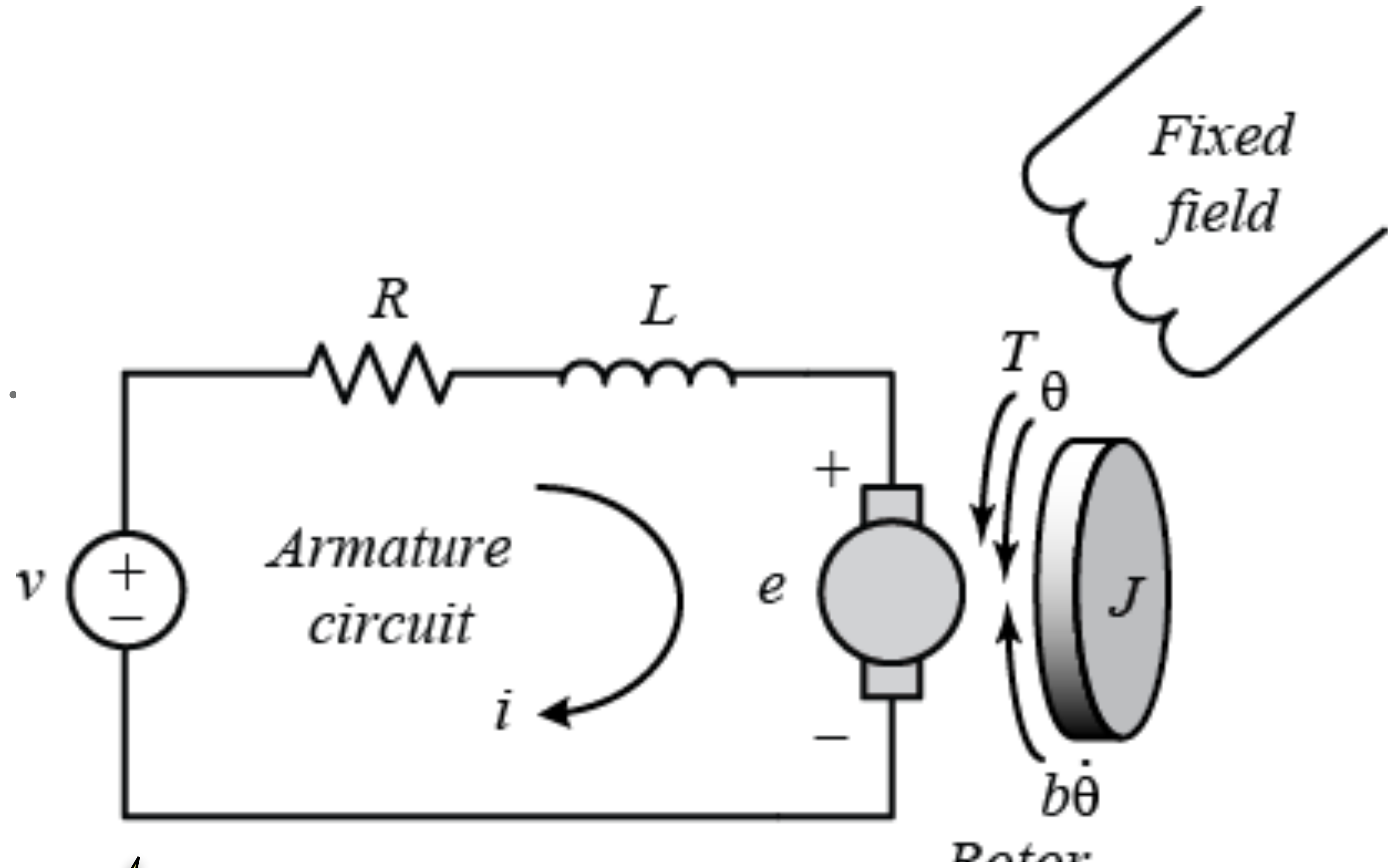
$$m\dot{v} + bv = u \tag{1}$$

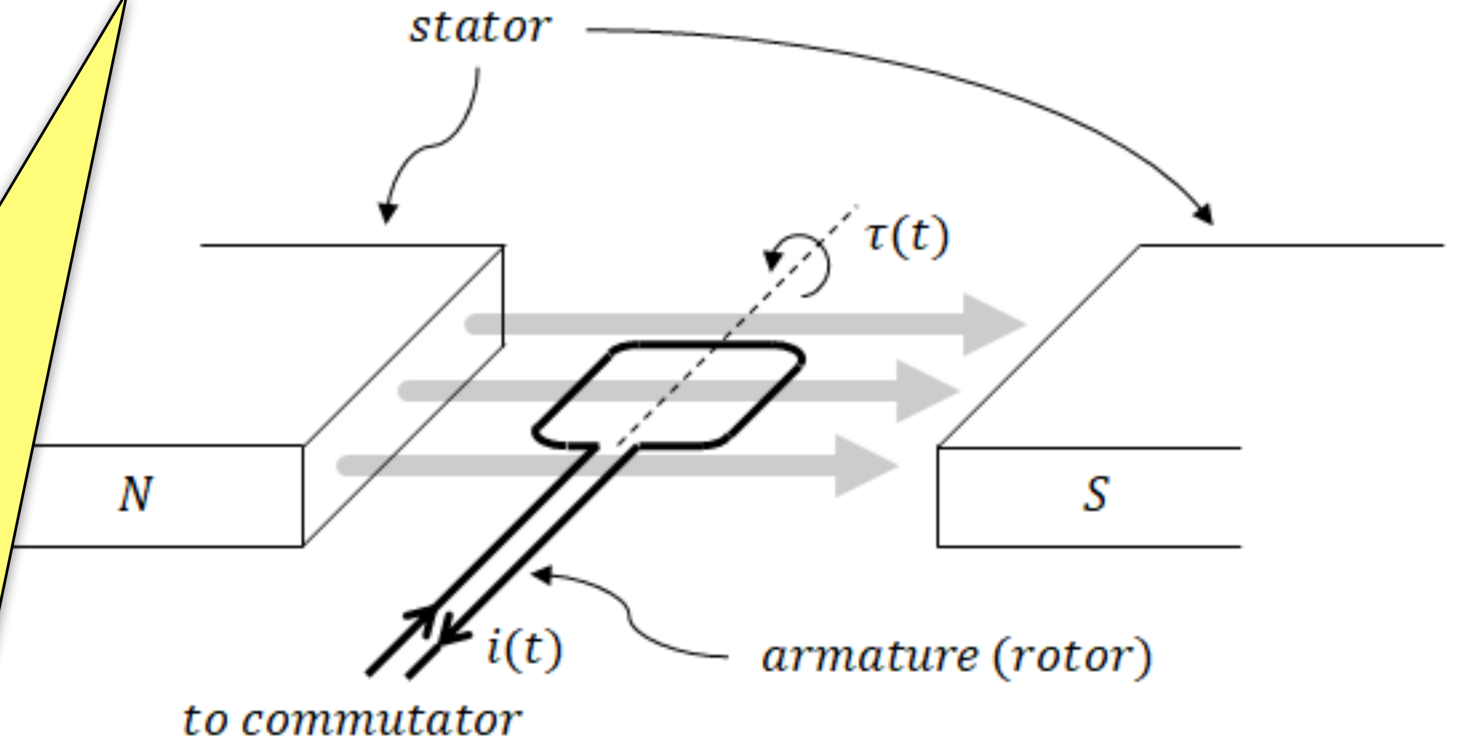
$$y = v \tag{2}$$

$$P(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms + b} \left(\frac{m/s}{N}\right) \tag{3}$$

MODELAGEM 2) VELOCIDADE DE UM MOTOR DC

- Um atuador comum em sistemas de controle é o motor DC. Ele fornece movimento rotativo diretamente e, acoplado a rodas ou tambores e cabos, pode fornecer movimento de translação. O circuito elétrico equivalente da armadura e o diagrama de corpo livre do rotor são mostrados na figura ao lado.
- Para este exemplo, assumiremos que a entrada do sistema é a fonte de tensão (V) aplicada na armadura do motor, enquanto a saída é a velocidade de rotação do eixo $\dot{\theta}$. O rotor e o eixo são considerados rígidos. Assumimos ainda um modelo de atrito viscoso, ou seja, o torque de atrito é proporcional à velocidade angular do eixo. Este motor possui imãs permanentes.
- **Equações do sistema:**

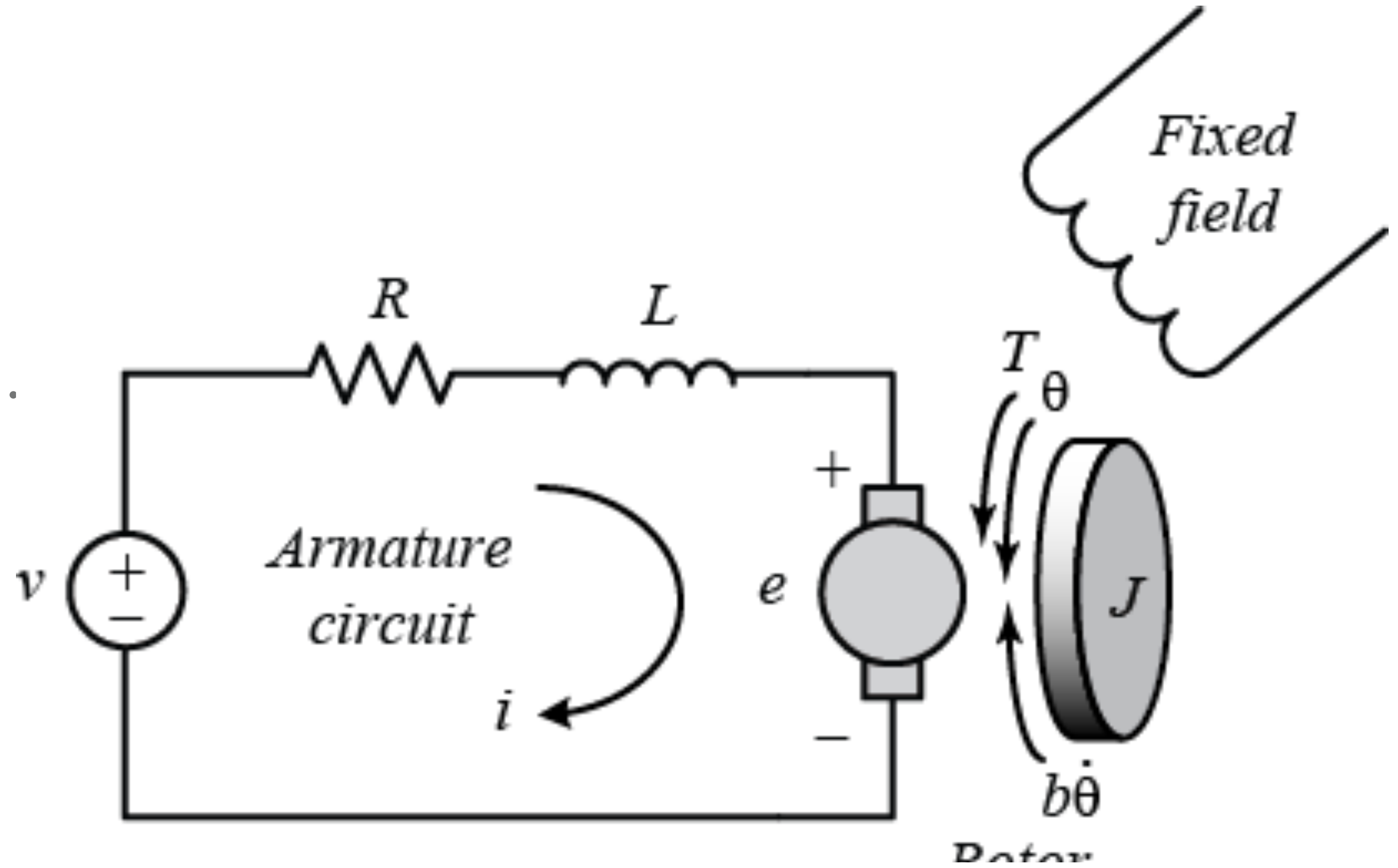




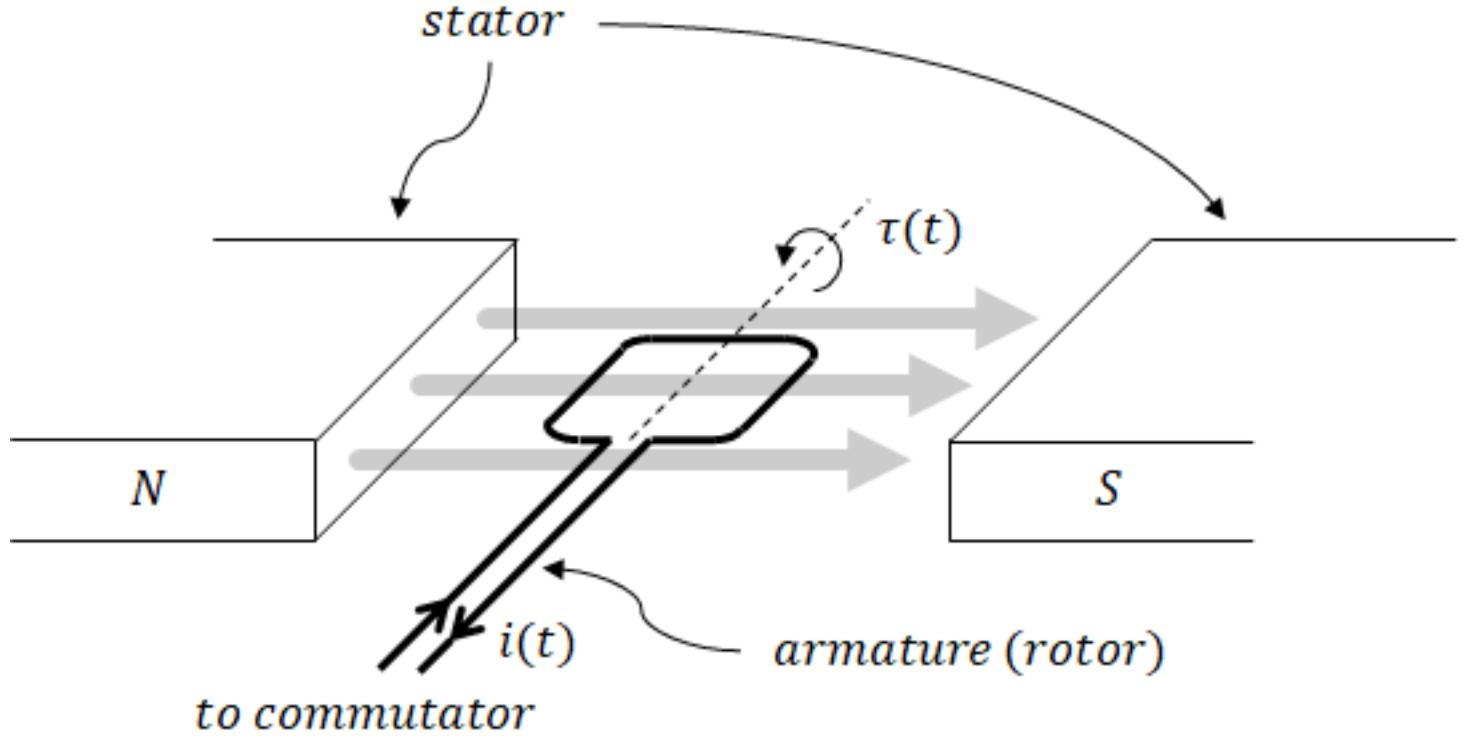
Dados:

Momento de inércia do rotor,	$J = 0{,}01$	$(Kg \cdot m^2)$;
Constante de atrito viscoso do motor,	$b = 0{,}1$	(Nms);
Constante de forças eletromotriz,	$K_e = 0{,}01$	$\left(V/rad/s\right)$;
Constante de torque do motor,	$K_t = 0{,}1$	(Nm/Amp);
Resistência elétrica,	$R = 1$	$(Ohms)$
Indutância elétrica,	$L = 0{,}5$	(H)

MODELAGEM 2) VELOCIDADE DE UM MOTOR DC



- Um atuador comum em sistemas de controle é o motor DC. Ele fornece movimento rotativo diretamente e, acoplado a rodas ou tambores e cabos, pode fornecer movimento de translação. O circuito elétrico equivalente da armadura e o diagrama de corpo livre do rotor são mostrados na figura ao lado.
- Para este exemplo, assumiremos que a entrada do sistema é a fonte de tensão (V) aplicada na armadura do motor, enquanto a saída é a velocidade de rotação do eixo $\dot{\theta}$. O rotor e o eixo são considerados rígidos. Assumimos ainda um modelo de atrito viscoso, ou seja, o torque de atrito é proporcional à velocidade angular do eixo.
- **Equações do sistema:**
  Em geral, o torque gerado por um motor CC é proporcional à corrente de armadura e à força do campo magnético. Neste exemplo vamos assumir que o campo magnético é constante e, portanto, que o torque do motor é proporcional apenas à corrente de armadura i por um fator constante K_t conforme mostrado na eq. (1). Isso é chamado de **motor controlado por armadura**.
- A força contraeletromotriz (fcem), e, é proporcional à velocidade angular do eixo por um fator constante K_c, eq. (2).
- Nas unidades SI, as constantes de torque do motor e de força eletromotriz são iguais, ou seja, $K_t = K_c$; portanto, usaremos K para representar tanto a constante de torque do motor quanto a constante de força eletromotriz.
- Da figura, podemos derivar as seguintes equações governantes com base na 2ª lei de Newton e na lei das tensões de Kirchhoff: eq. (3) e eq. (4).



- Equações:

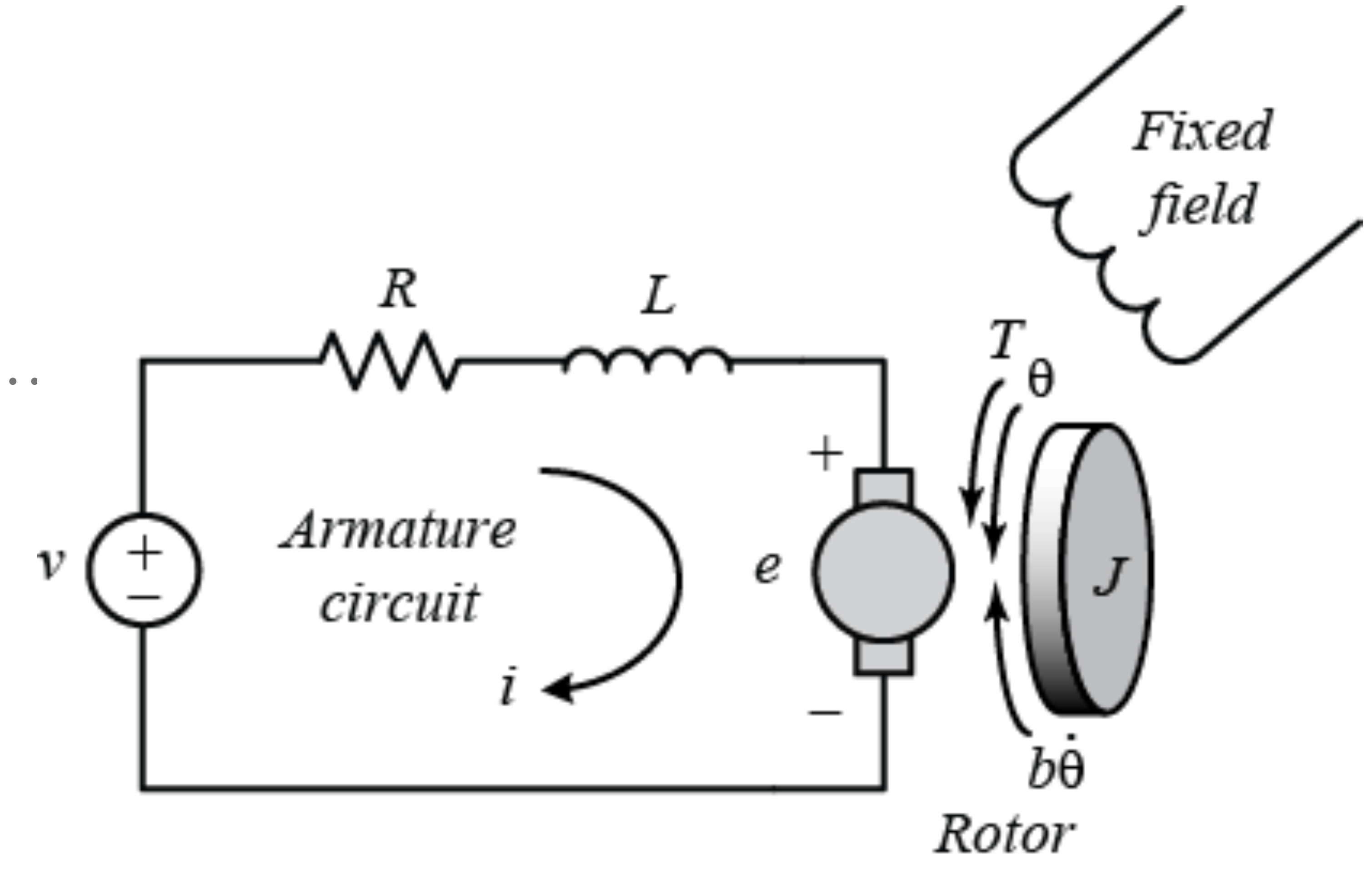
$$T = K_t\, i \qquad (1)$$

$$e = K_c\, \dot{\theta} \qquad (2)$$

$$J\ddot{\theta} + b\,\dot{\theta} = K\, i \qquad (3)$$

$$L\frac{d\,i}{dt} + R\,i = V - K\dot{\theta} \quad (4)$$

MODELAGEM 2) VELOCIDADE DE UM MOTOR DC



- **Equações do sistema:**
  Em geral, o torque gerado por um motor CC é proporcional à corrente de armadura e à força do campo magnético. Neste exemplo vamos assumir que o campo magnético é constante e, portanto, que o torque do motor é proporcional apenas à corrente de armadura i por um fator constante K_t conforme mostrado na eq. (1). Isso é chamado de **motor controlado por armadura**.
- A força contraeletromotriz (fcem), e, é proporcional à velocidade angular do eixo por um fator constante K_c — eq. (2).
- Nas unidades SI, as constantes de torque do motor e de força eletromotriz são iguais, ou seja, $K_t = K_c$; portanto, usaremos K para representar tanto a constante de torque do motor quanto a constante de força eletromotriz.
- Da figura, podemos derivar as seguintes equações governantes com base na 2ª lei de Newton e na lei das tensões de Kirchhoff: eq. (3) e eq. (4).
- **Função de Transferência:**
  Aplicando a transformada de Laplace, as equações de modelagem acima podem ser expressas em termos da variável de Laplace s: eq. (5) e eq. (6).
- Chegamos à seguinte função de transferência em malha aberta eliminando $I(s)$ entre as duas equações acima, onde a velocidade de rotação é considerada a saída e a tensão da armadura é considerada a entrada, ver eq. (7).

- Equações:

$$T = K_t\, i \qquad (1)$$

$$e = K_c\, \dot{\theta} \qquad (2)$$

$$J\, \ddot{\theta} + b\, \dot{\theta} = K\, i \qquad (3)$$

$$L\, \frac{d\, i}{dt} + R\, i = V - K\, \dot{\theta} \qquad (4)$$

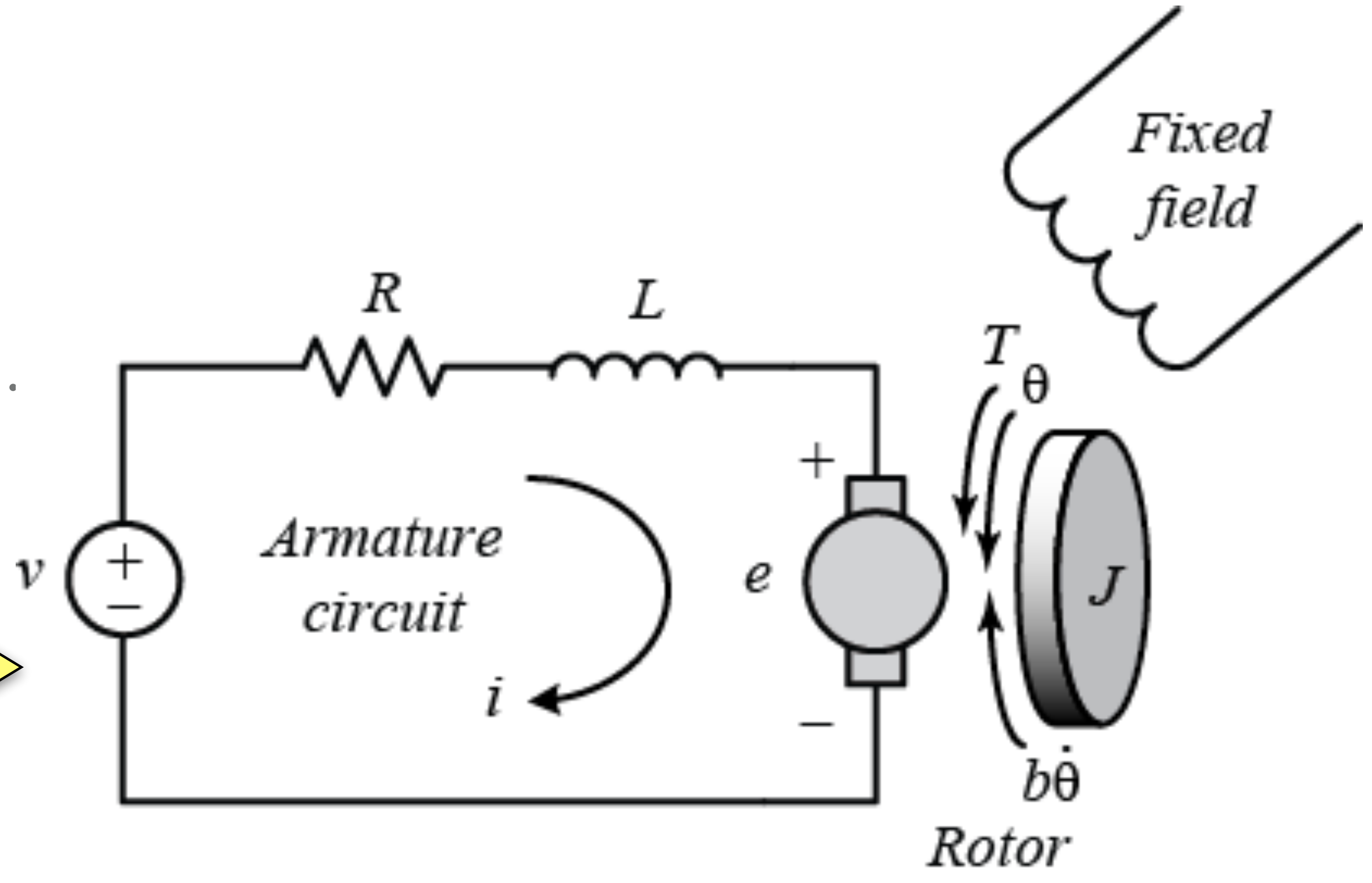
$$s(Js + b)\, \Theta(s) = K\, I(s) \qquad (5)$$

$$(Ls + R)\, I(s) = V(s) - K\, s\Theta(s) \qquad (6)$$

$$P(s) = \frac{\dot{\Theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js + b)(Ls + R) + K^2} \quad \left[\frac{rad/s}{V}\right]$$

(7)

MODELAGEM 2) VELOCIDADE DE UM MOTOR DC



- **Equações do sistem**
  Em geral, o torque
  campo magnético. N
  que o torque do mo
  conforme mostrado

- A força contraeletro
  constante K_c — eq.

- Nas unidades SI, as constantes de torque do motor e d ça eletromotriz são iguais, ou
  motor

  Newton e na

  expressas em

  as duas
  equações acima, onde a velocidade de rotação é considerada a saída e a tensão da armadura é
  considerada a entrada, ver eq. (7).

Dados:

Momento de inércia do rotor,	$J = 0{,}01$	$(Kg \cdot m^2)$;
Constante de atrito viscoso do motor,	$b = 0{,}1$	(Nms);
Constante de forças eletromotriz,	$K_e = 0{,}01$	$\left(V/rad/s\right)$;
Constante de torque do motor,	$K_t = 0{,}1$	$\left(Nm/Amp\right)$;
Resistência elétrica,	$R = 1$	$(Ohms)$
Indutância elétrica,	$L = 0{,}5$	(H)

Matlab, arquivo "motor_velocidade.m":

```
% Modelagem motor CC/posiÃ§Ã£o
% Ref.: https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=MotorPosition&section=SystemModeling
disp('Dados Motor CC - PosiÃ§Ã£o angular')
J = 3.2284E-6;
b = 3.5077E-6;
K = 0.0274;
R = 4;
L = 2.75E-6;
s = tf('s');
P_motor = K/(s*((J*s+b)*(L*s+R)+K^2))
```

- Equações:

$$T = K_t\, i \qquad (1)$$

$$e = K_c\, \dot{\theta} \qquad (2)$$

$$J\, \ddot{\theta} + b\, \dot{\theta} = K\, i \qquad (3)$$

$$L\, \frac{d\, i}{dt} + R\, i = V - K\, \dot{\theta} \qquad (4)$$

$$s(Js + b)\, \Theta(s) = K\, I(s) \qquad (5)$$

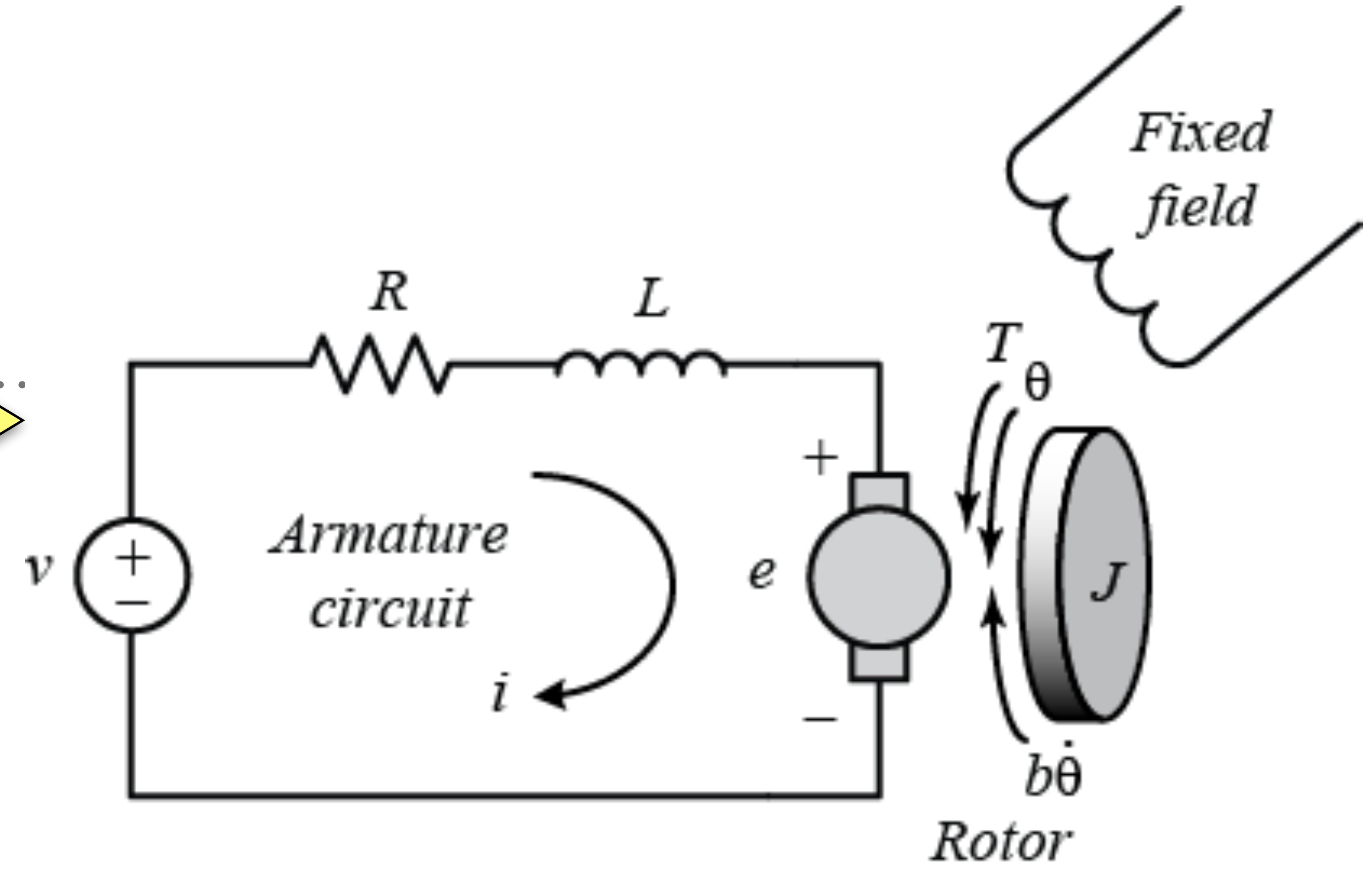
$$(Ls + R)\, I(s) = V(s) - K\, s\Theta(s) \qquad (6)$$

$$P(s) = \frac{\dot{\Theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js+b)(Ls+R)+K^2} \left[\frac{rad/s}{V}\right]$$

(7)

MODELAGEM 2) VELOCIDA

Dados:		
Momento de inércia do rotor,	$J = 0{,}01$	$(Kg \cdot m^2)$;
Constante de atrito viscoso do motor,	$b = 0{,}1$	(Nms);
Constante de forças eletromotriz,	$K_e = 0{,}01$	$\left(V/rad/s\right)$;
Constante de torque do motor,	$K_t = 0{,}1$	$\left(Nm/Amp\right)$;
Resistência elétrica,	$R = 1$	$(Ohms)$
Indutância elétrica,	$L = 0{,}5$	(H)



- **Matlab/Simulink:**
  Equacionamentos extras:
- Aplicando 2a-Lei de Newton:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = T - b\frac{d\theta}{dt}, \text{ lembrando que: } T = K_t\, i, \text{ então:}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{J}\left(K_t\, i - b\frac{d\theta}{dt}\right)$$

- Aplicando Lei de Kirchoff:

$$L\frac{di}{dt} = -Ri + V - e, \text{ lembrando que a fcem, } e = K_e\frac{d\theta}{dt}, \text{ então:}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}\left(-Ri + v - K_c\frac{d\theta}{dt}\right)$$

- Podemos ainda relacionar:

$$\int \frac{d^2\theta}{dt^2}dt = \frac{d\theta}{dt} \quad \therefore \quad \int \ddot{\theta}\, dt = \dot{\theta}$$

$$\int \frac{di}{dt} = i \quad \therefore \quad \int \dot{i}\, dt = i$$

- Equações:

$$T = K_t\, i \qquad (1)$$

$$e = K_c\, \dot{\theta} \qquad (2)$$

$$J\,\ddot{\theta} + b\,\dot{\theta} = K\, i \qquad (3)$$

$$L\,\frac{d\,i}{dt} + R\, i = V - K\,\dot{\theta} \quad (4)$$

$$s(Js + b)\,\Theta(s) = K\, I(s) \quad (5)$$

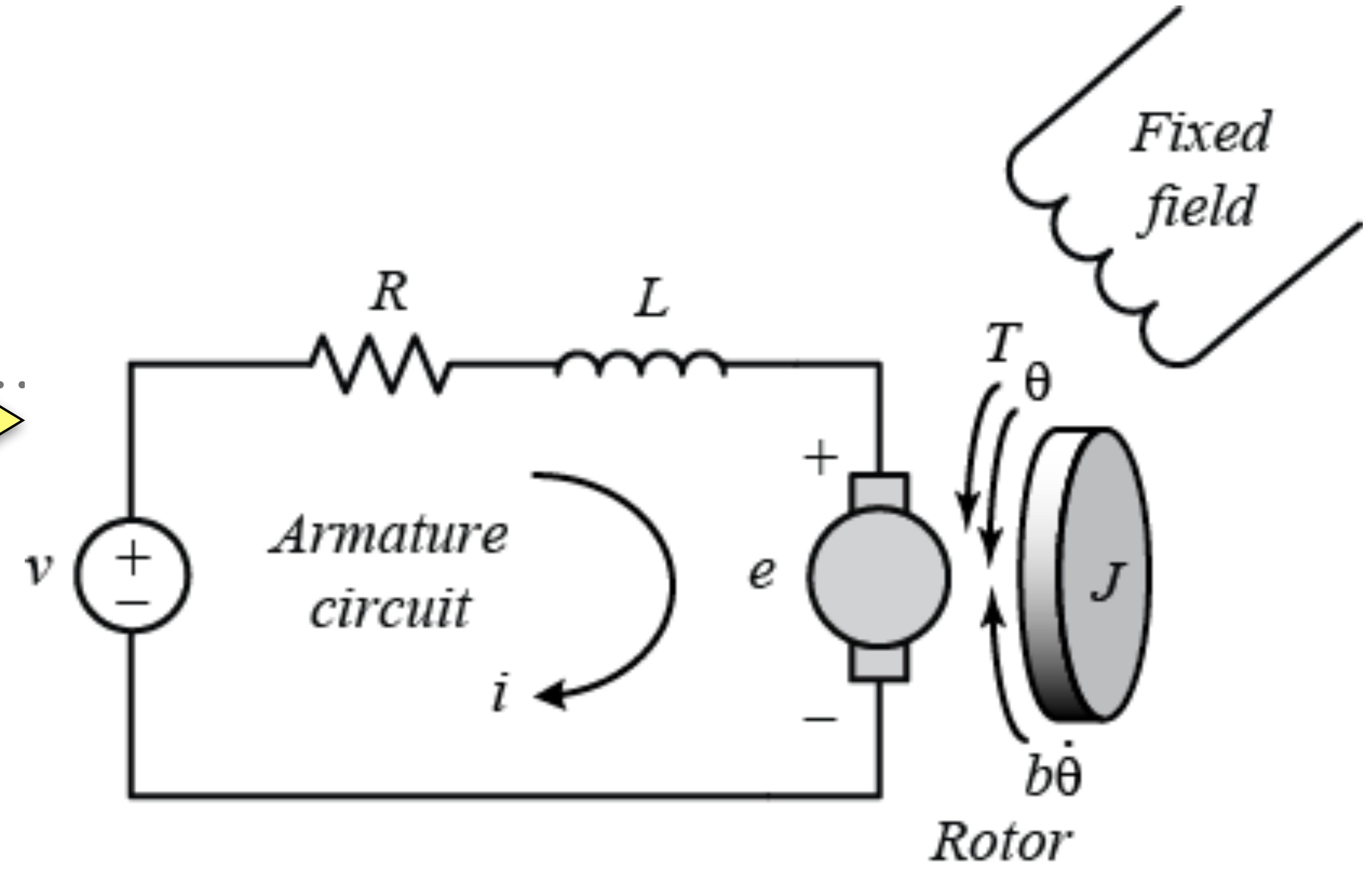
$$(Ls + R)\, I(s) = V(s) - K\, s\Theta(s) \quad (6)$$

$$P(s) = \frac{\dot{\Theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js + b)(Ls + R) + K^2}\left[\frac{rad/s}{V}\right]$$
(7)

MODELAGEM 2) VELOCIDA

Dados:

Momento de inércia do rotor,	$J = 0{,}01$	$(Kg \cdot m^2)$;
Constante de atrito viscoso do motor,	$b = 0{,}1$	(Nms);
Constante de forças eletromotriz,	$K_e = 0{,}01$	$\left(V/rad/s\right)$;
Constante de torque do motor,	$K_t = 0{,}1$	$\left(Nm/Amp\right)$;
Resistência elétrica,	$R = 1$	$(Ohms)$
Indutância elétrica,	$L = 0{,}5$	(H)



- **Matlab/Simulink:**
  Equacionamentos extras:

- Aplicando 2a-Lei de Newton:

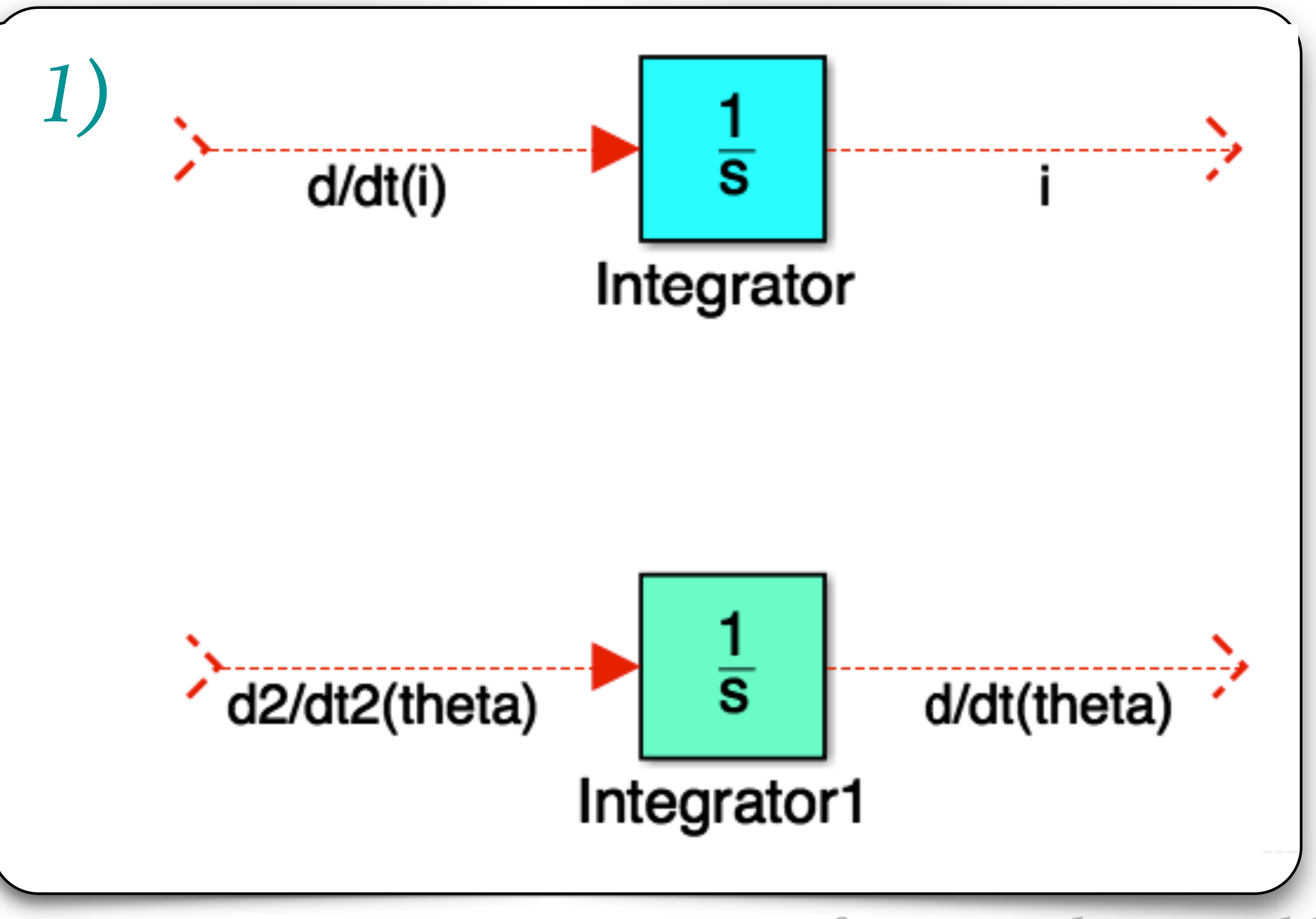
$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = T - b\frac{d\theta}{dt}, \text{ lembrando que: } T = K_t\, i, \text{ então:}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2}} = \frac{1}{J}\left(K_t\, i - b\frac{d\theta}{dt}\right)$$

- Aplicando Lei de Kirchoff:

$$L\frac{di}{dt} = -Ri + V - e, \text{ lembrando que a fcem, } e = K_e\frac{d\theta}{dt}, \text{ então:}$$

$$\boxed{\frac{di}{dt}} = \frac{1}{L}\left(-Ri + v - K_c\frac{d\theta}{dt}\right)$$



- Podemos ainda relacionar:

$$\int \frac{d^2\theta}{dt^2}dt = \frac{d\theta}{dt} \quad \therefore \quad \int \ddot{\theta}\, dt = \dot{\theta}$$

$$\int \frac{di}{dt} = i \quad \therefore \quad \int \dot{i}\, dt = i$$

- Equações:

$$T = K_t\, i \qquad (1)$$

$$e = K_c\, \dot{\theta} \qquad (2)$$

$$J\,\ddot{\theta} + b\,\dot{\theta} = K\, i \qquad (3)$$

$$L\,\frac{d\,i}{dt} + R\,i = V - K\dot{\theta} \qquad (4)$$

$$s(Js + b)\,\Theta(s) = K\, I(s) \quad (5)$$

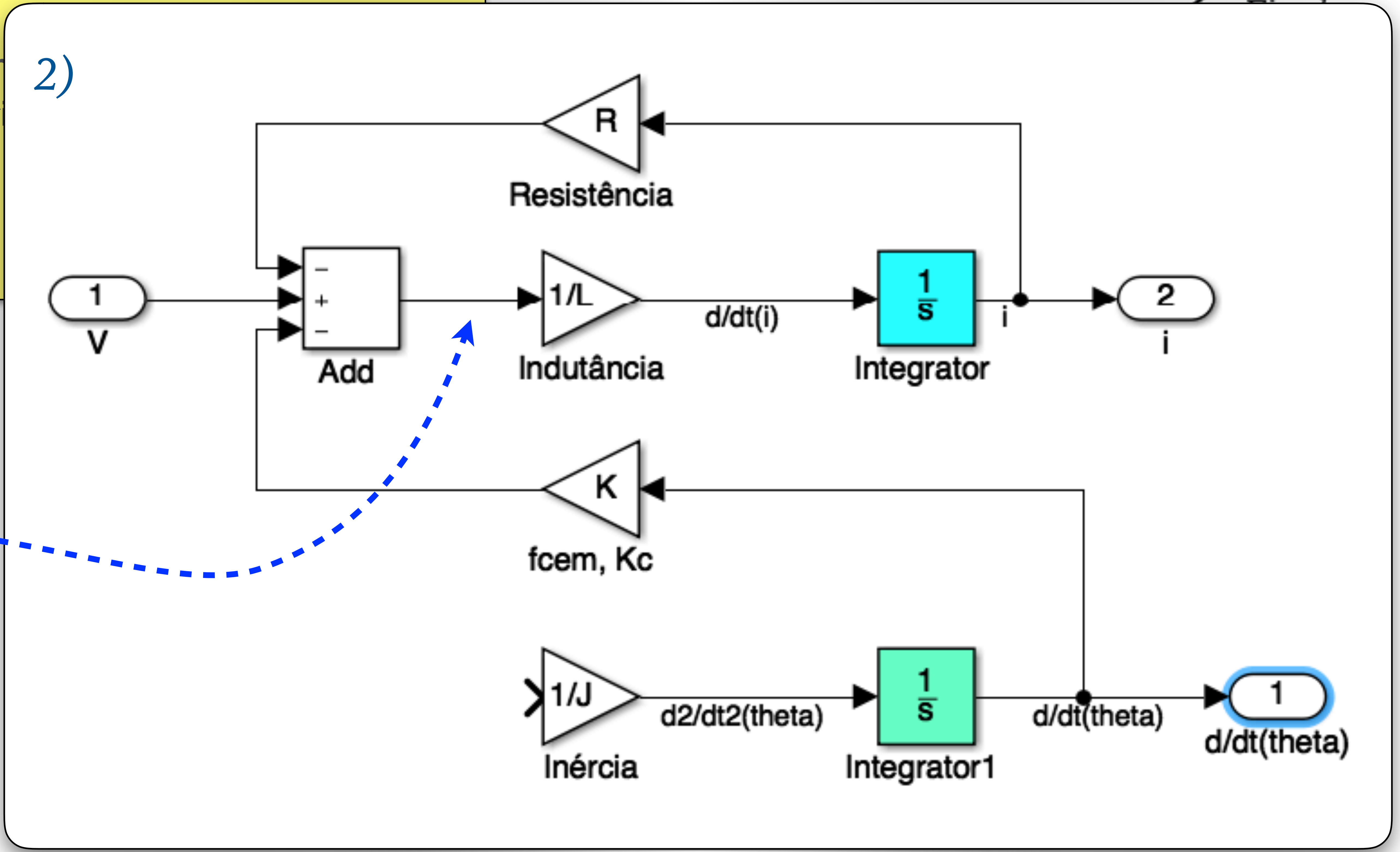
$$(Ls + R)\, I(s) = V(s) - K\, s\Theta(s) \qquad (6)$$

$$P(s) = \frac{\dot{\Theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js + b)(Ls + R) + K^2} \left[\frac{rad/s}{V}\right]$$

(7)

MODELAGEM 2) VELOCIDA

Dados:
Momento de inércia do rotor,
Constante de atrito viscoso do r
Constante de forças eletromotr
Constante de torque do motor,
Resistência elétrica,
Indutância elétrica,



- **Matlab/Simulink:**
  Equacionamentos extras:

- Aplicando 2a-Lei de Newton:

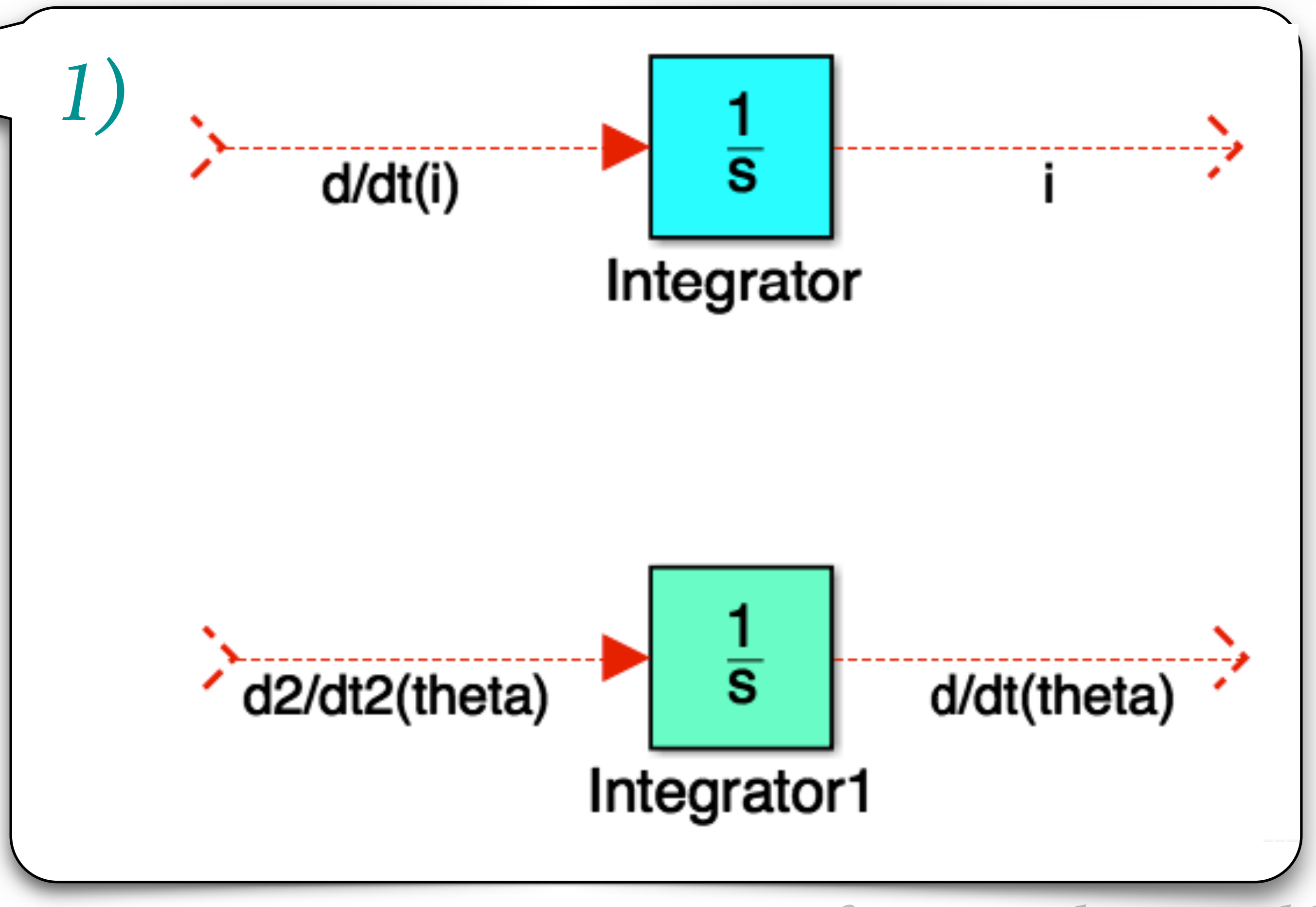
$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = T - b\frac{d\theta}{dt}, \text{ lembrando que: } T = K_t\, i, \text{ então:}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{J}\left(K_t\, i - b\frac{d\theta}{dt}\right)$$

- Aplicando Lei de Kirchoff:

$$L\frac{di}{dt} = -Ri + V - e, \text{ lembrando que a fcem, } e = K_e\frac{d\theta}{dt}, \text{ então:}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}\left(-Ri + v - K_c\frac{d\theta}{dt}\right)$$



- Podemos ainda relacionar:

$$\int \frac{d^2\theta}{dt^2}dt = \frac{d\theta}{dt} \quad \therefore \quad \int \ddot{\theta}\, dt = \dot{\theta}$$

$$\int \frac{di}{dt} = i \quad \therefore \quad \int \dot{i}\, dt = i$$

$$L\frac{d\,i}{dt} + R\,i = V - K\dot{\theta} \quad (4)$$

$$s(Js + b)\,\Theta(s) = K\,I(s) \quad (5)$$

$$(Ls + R)\,I(s) = V(s) - K\,s\Theta(s) \quad (6)$$

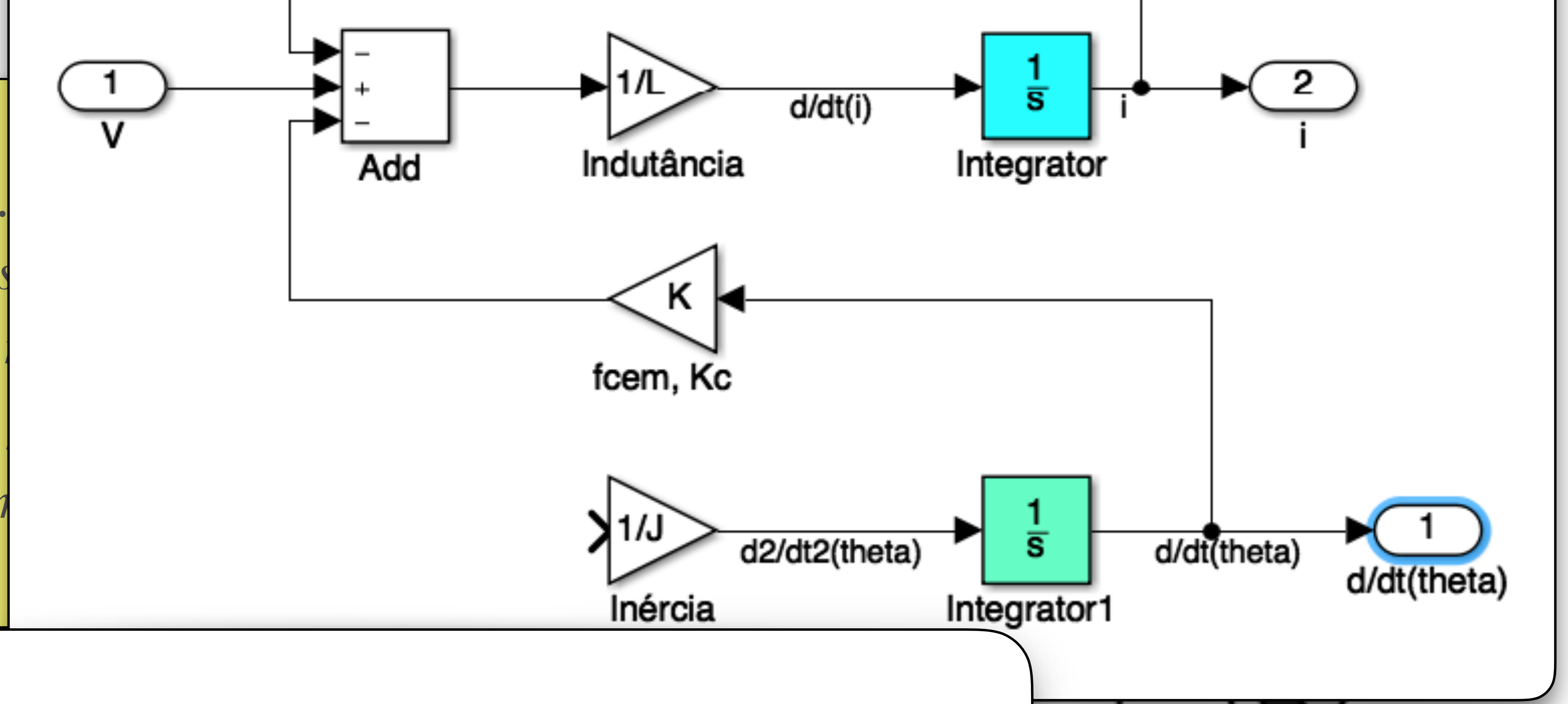
$$P(s) = \frac{\dot{\Theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js+b)(Ls+R)+K^2}\left[\frac{rad/s}{V}\right]$$

(7)

MODELAGEM 2) VELOCIDA

Dados:

Momento de inércia do rotor,	$J = 0{,}01$	$(Kg\cdot$
Constante de atrito viscoso do motor,	$b = 0{,}1$	$(Nms$
Constante de forças eletromotriz,	$K_e = 0{,}01$	$\left(V/\right.$
Constante de torque do motor,	$K_t = 0{,}1$	$(Nm$
Resistência elétrica,	$R = 1$	$(Ohm$
Indutância elétrica,	$L = 0{,}5$	(H)



- **Matlab/Simulink:**
  Equacionamentos extras:

- Aplicando 2a-Lei de Newton:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = T - b\frac{d\theta}{dt}, \text{ lembrando que: } T = K_t\, i,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{J}\left(K_t\, i - b\frac{d\theta}{dt}\right)$$

- Aplicando Lei de Kirchoff:

$$L\frac{di}{dt} = -Ri + V - e, \text{ lembrando que a fcem}$$

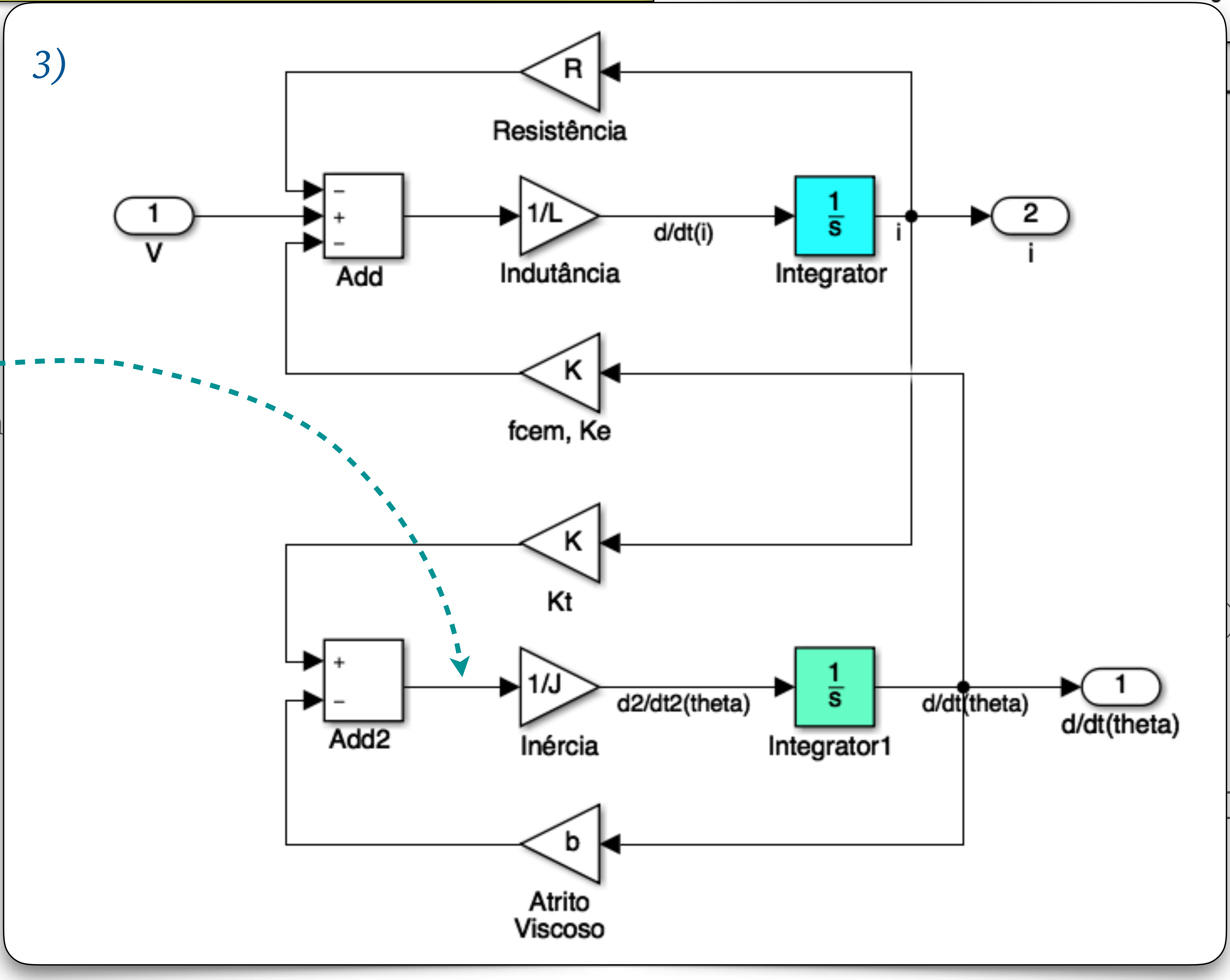
$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}\left(-Ri + v - K_c\frac{d\theta}{dt}\right)$$

- Podemos ainda relacionar:

$$\int \frac{d^2\theta}{dt^2}dt = \frac{d\theta}{dt} \quad \therefore \quad \int \ddot{\theta}\, dt = \dot{\theta}$$

$$\int \frac{di}{dt} = i \quad \therefore \quad \int \dot{i}\, dt = i$$

3)



$b\dot{\theta}$

Rotor

(3)

(4)

(5)

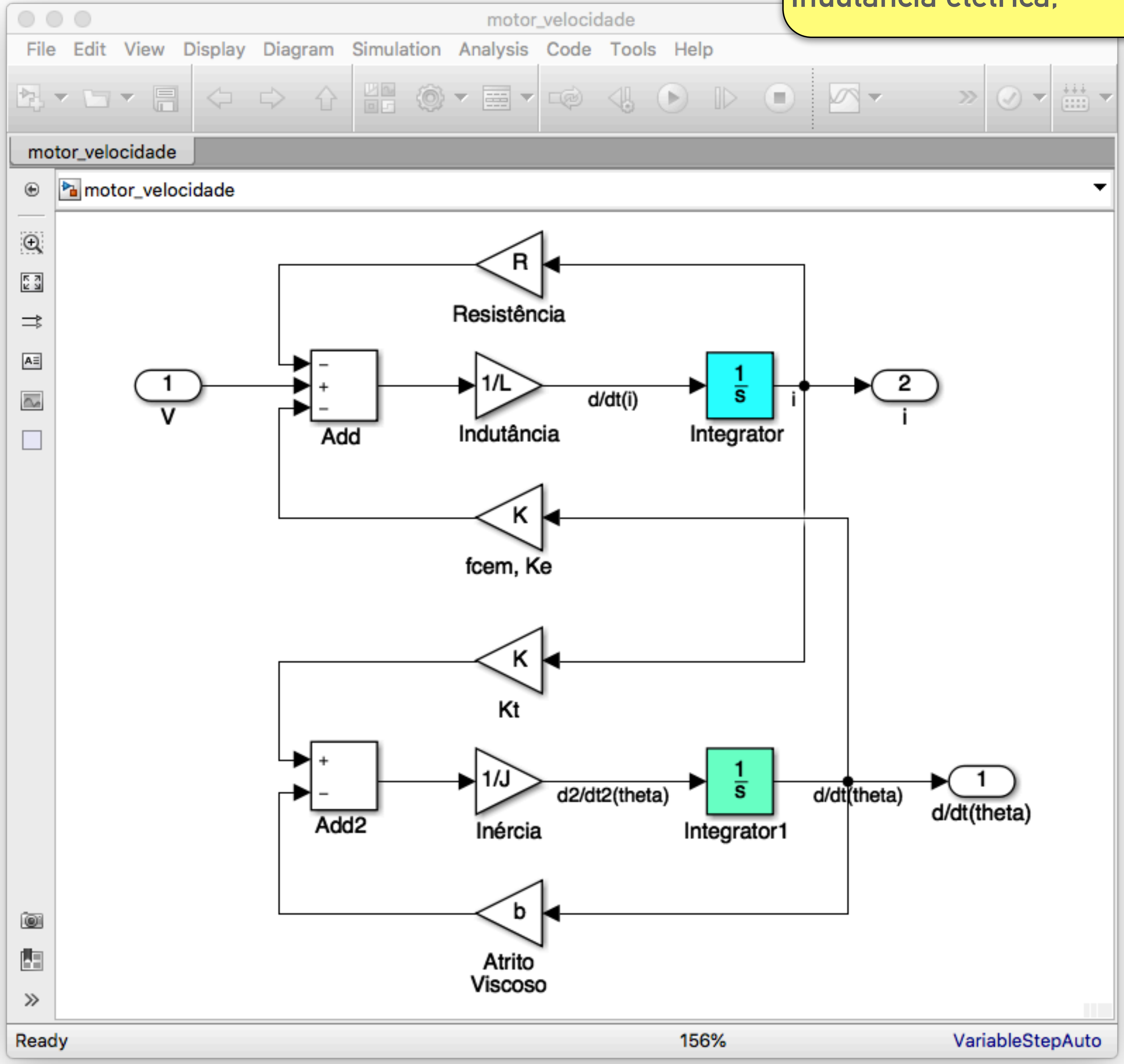
$K\, s\Theta(s)$ (6)

$+ R) + K^2$ $\left[\frac{rad/s}{V}\right]$

MODELAGEM 2) VELOCIDA

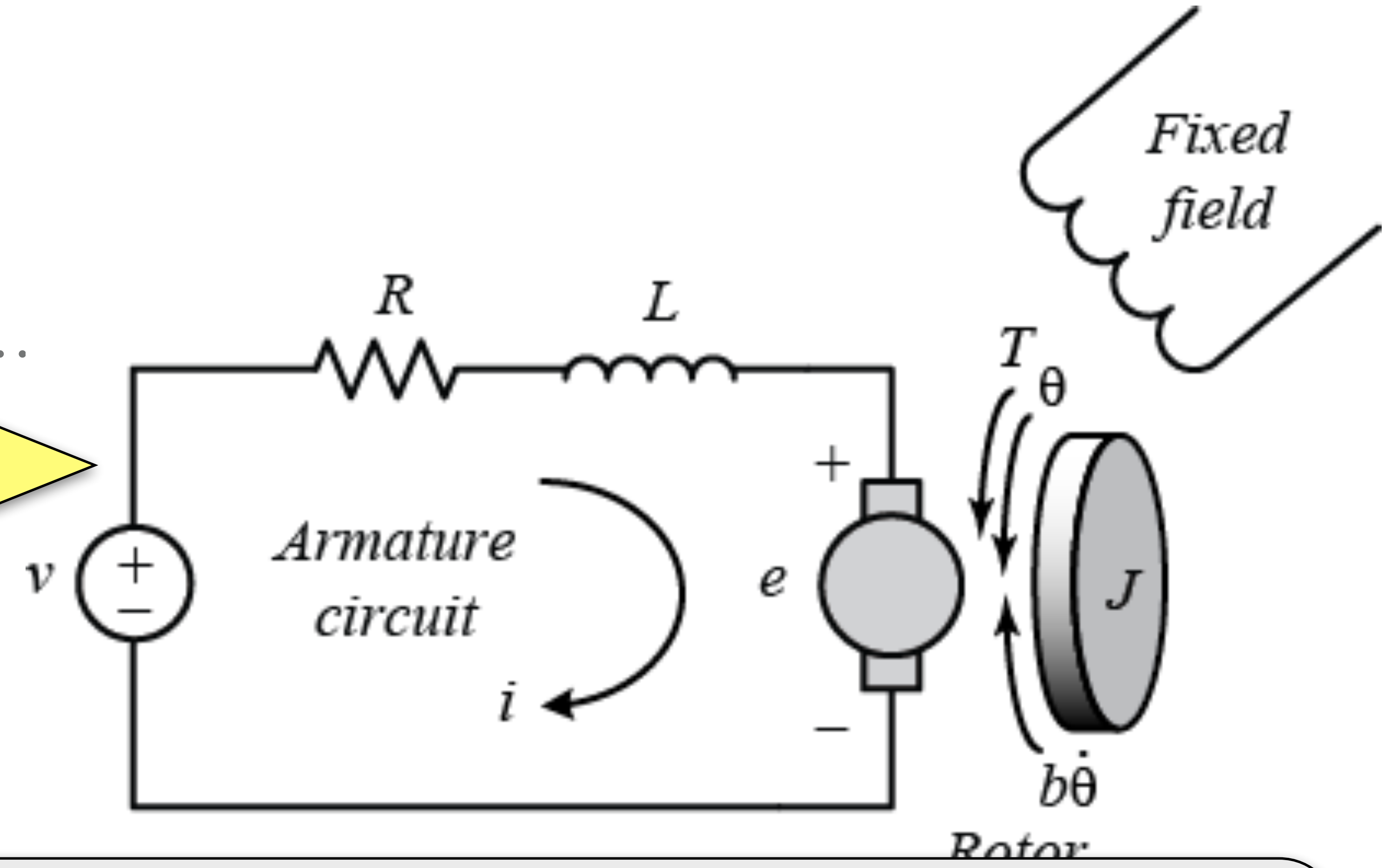
➤ Matlab/Simulink:

3)



Dados:

Momento de inércia do rotor,	$J = 0{,}01$	$(Kg \cdot m^2)$;
Constante de atrito viscoso do motor,	$b = 0{,}1$	(Nms);
Constante de forças eletromotriz,	$K_e = 0{,}01$	$\left(V/rad/s\right)$;
Constante de torque do motor,	$K_t = 0{,}01$	(Nm/Amp);
Resistência elétrica,	$R = 1$	$(Ohms)$
Indutância elétrica,	$L = 0{,}5$	(H)



Matlab, arquivo “init_motor_velocidade.m”:

```
% init_motor_velocidade.m
% Inicializada dados para Modelagem motor CC - Velocidade
% Ref.: https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?
example=MotorSpeed&section=SystemModeling
disp('Dados Motor CC - Velocidade angular:')
J = 0.01; % momento de inercia do motor
b = 0.1;  % cte atrito viscoso do motor
K = 0.01; % cte forÃ§a eletromotriz e de torque do motor
(unidades S.I.)
R = 1;    % resistÃªncia elÃ©trica do motor
L = 0.5;  % indutÃ¢ncia elÃ©trica do motor
s = tf('s');
V_motor = K/((J*s+b)*(L*s+R)+K^2)
```

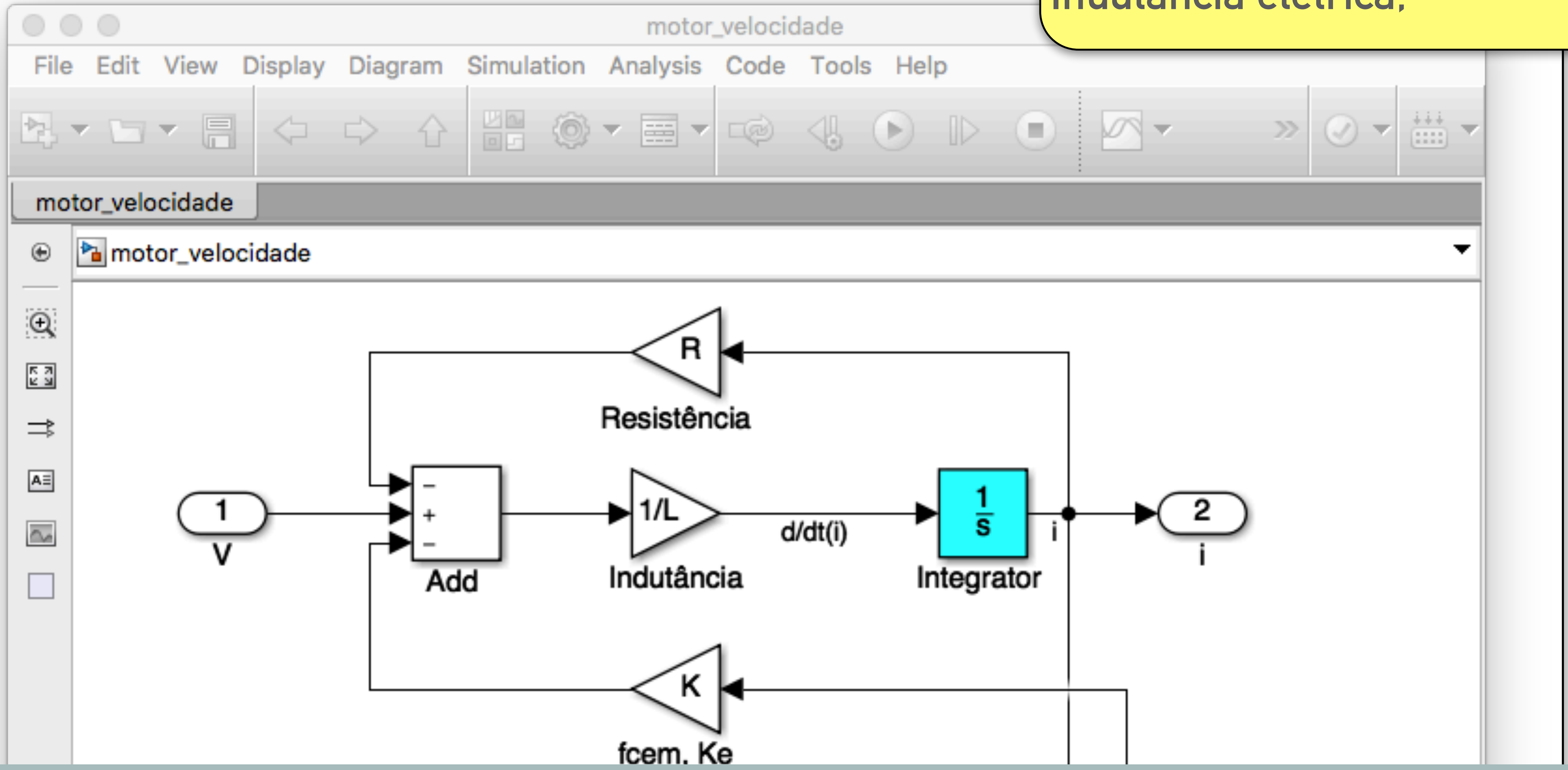
$$P(s) = \frac{\dot{\Theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js+b)(Ls+R)+K^2} \left[\frac{rad/s}{V}\right] \tag{7}$$

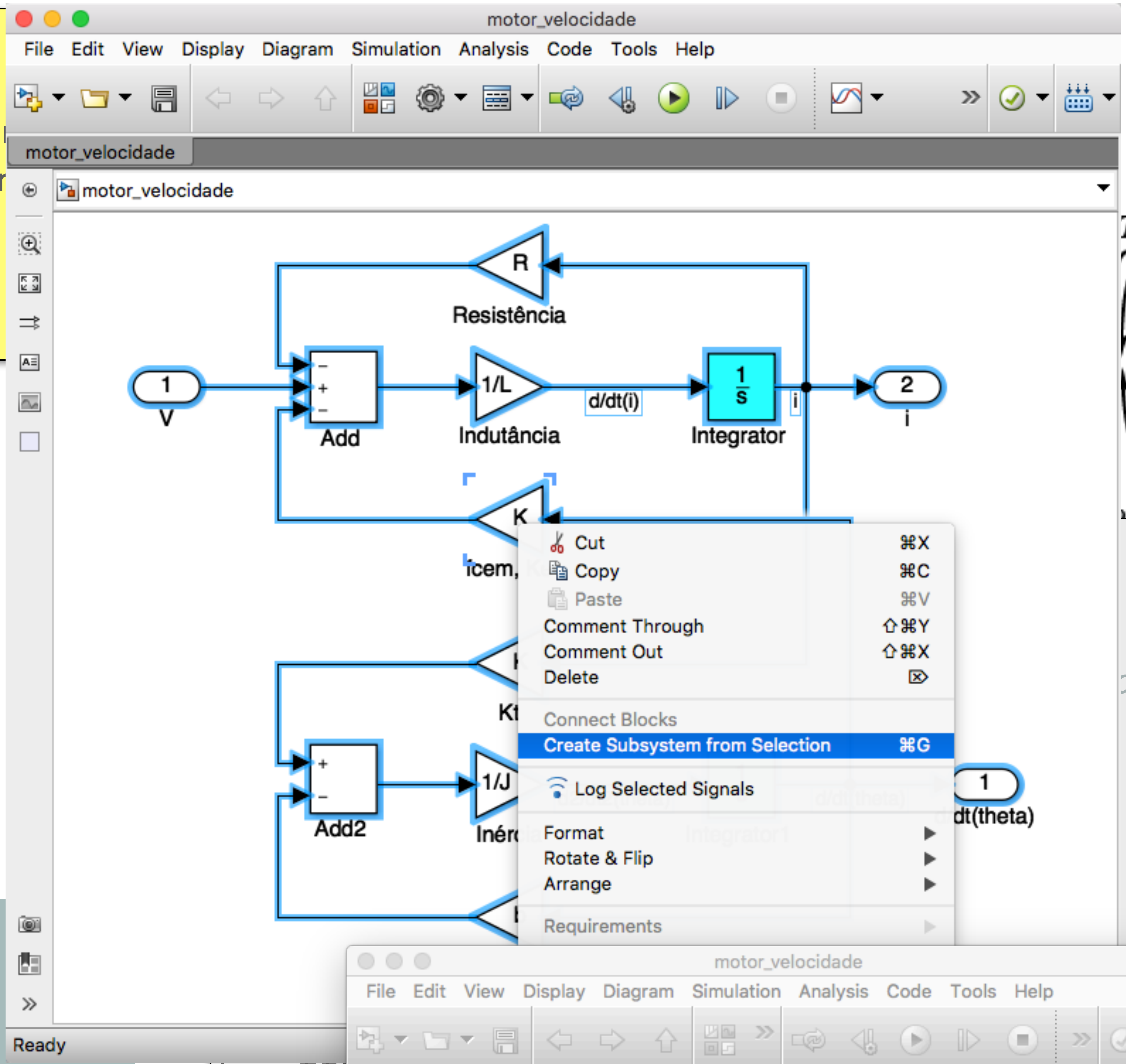
MODELAGEM 2) VELOCIDA

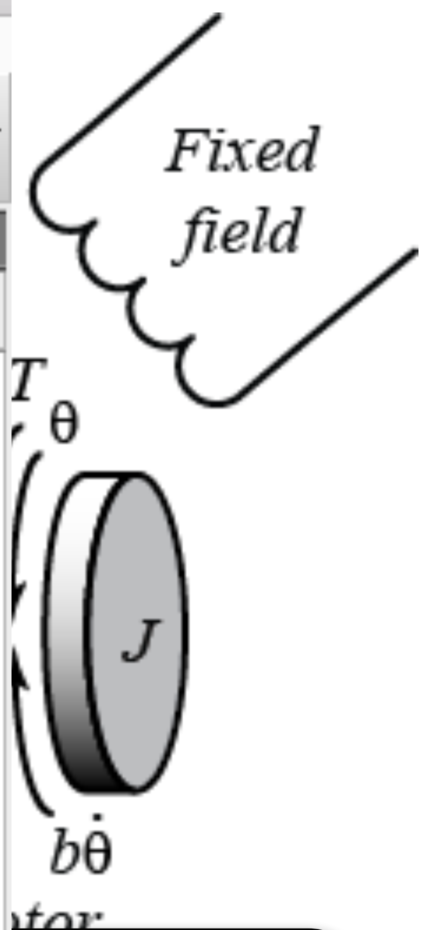
➤ Matlab/Simulink:

Dados:
Momento de inércia do rotor,
Constante de atrito viscoso do
Constante de forças eletromotr
Constante de torque do motor,
Resistência elétrica,
Indutância elétrica,

3)

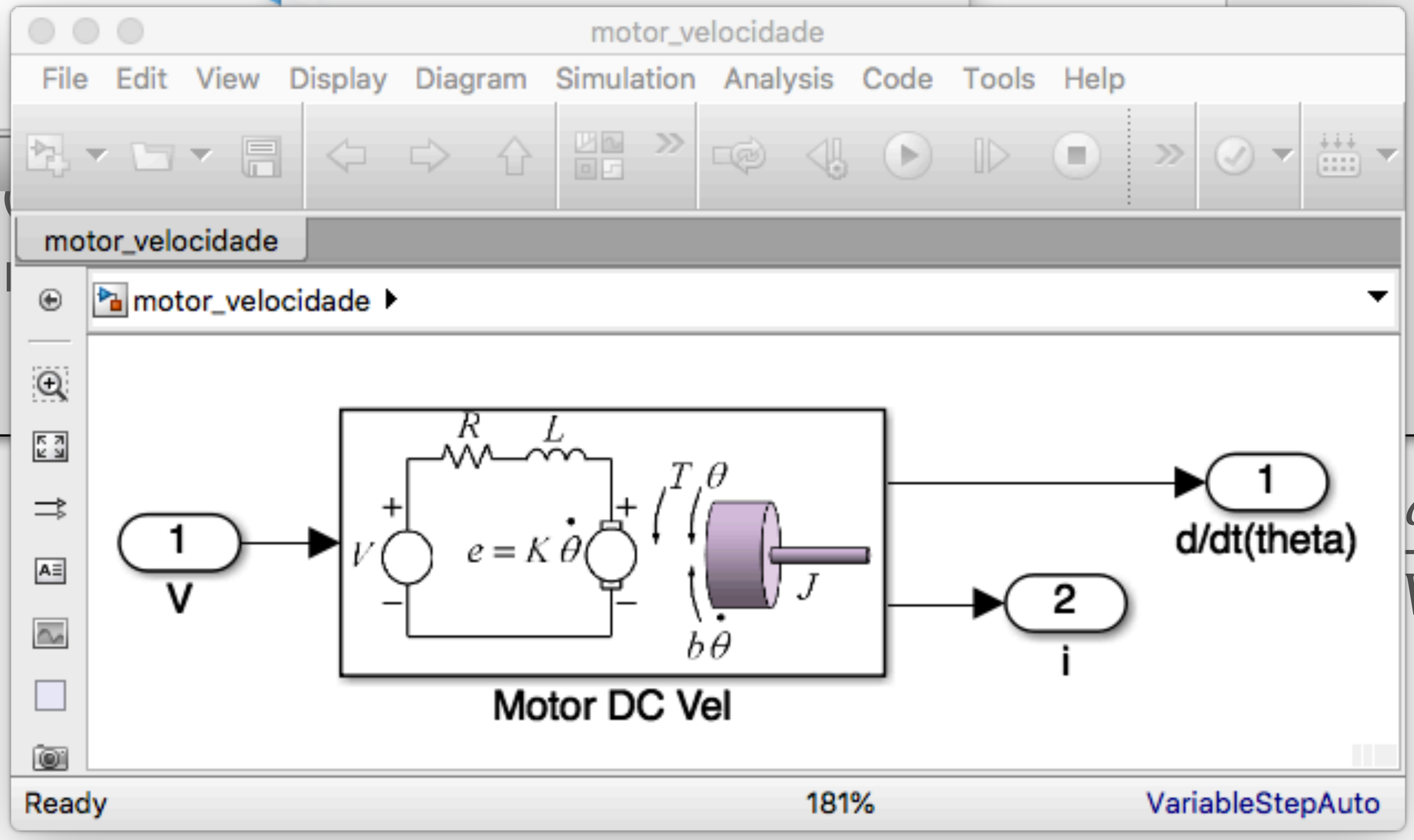






dex.php?

s = tf
V_motor



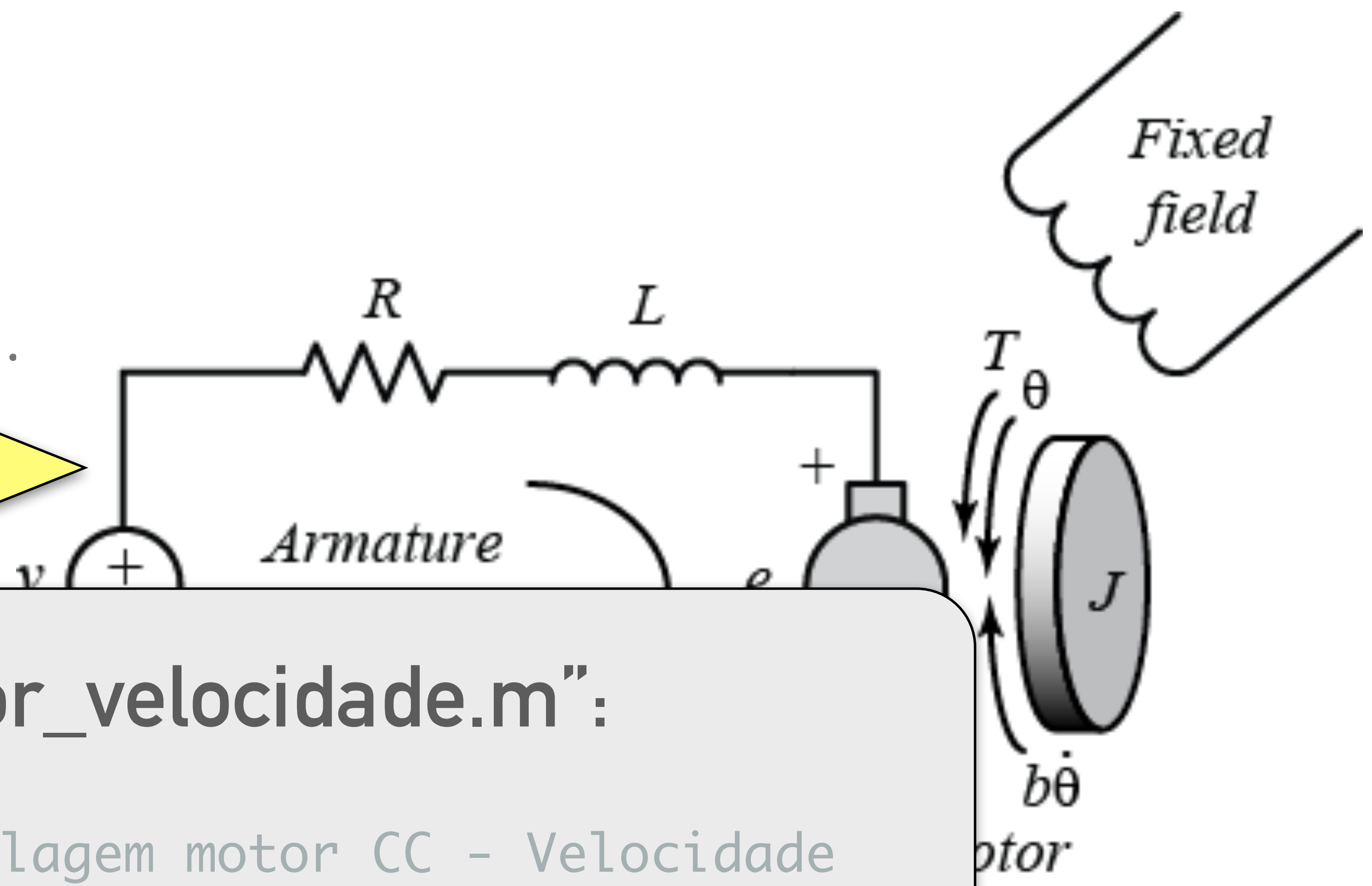
Para salvar todos esses componentes como um único bloco de subsistema, primeiro selecione todos os blocos e, em seguida, selecione “Create Subsystem from Selection" (Criar subsistema da seleção) depois de clicar com o botão direito do mouse na parte selecionada. Nomeie o subsistema como “DC_Motor_Vel” e salve o modelo. Seu modelo deve aparecer na forma de um único bloco. Usaremos este modelo em próximas simulações.

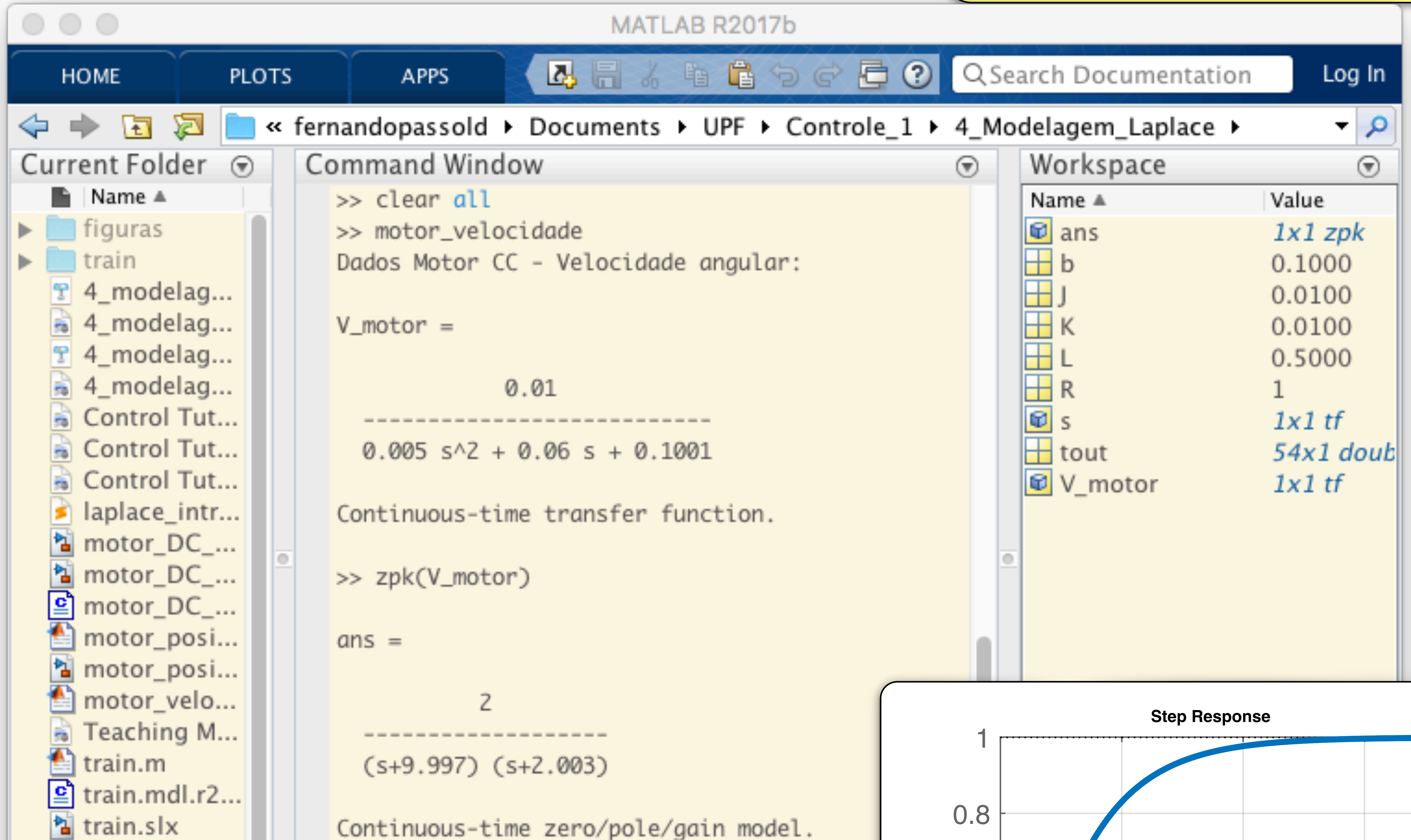
MODELAGEM 2) VELOCIDA

➤ **Simulando no Matlab:**

Dados:

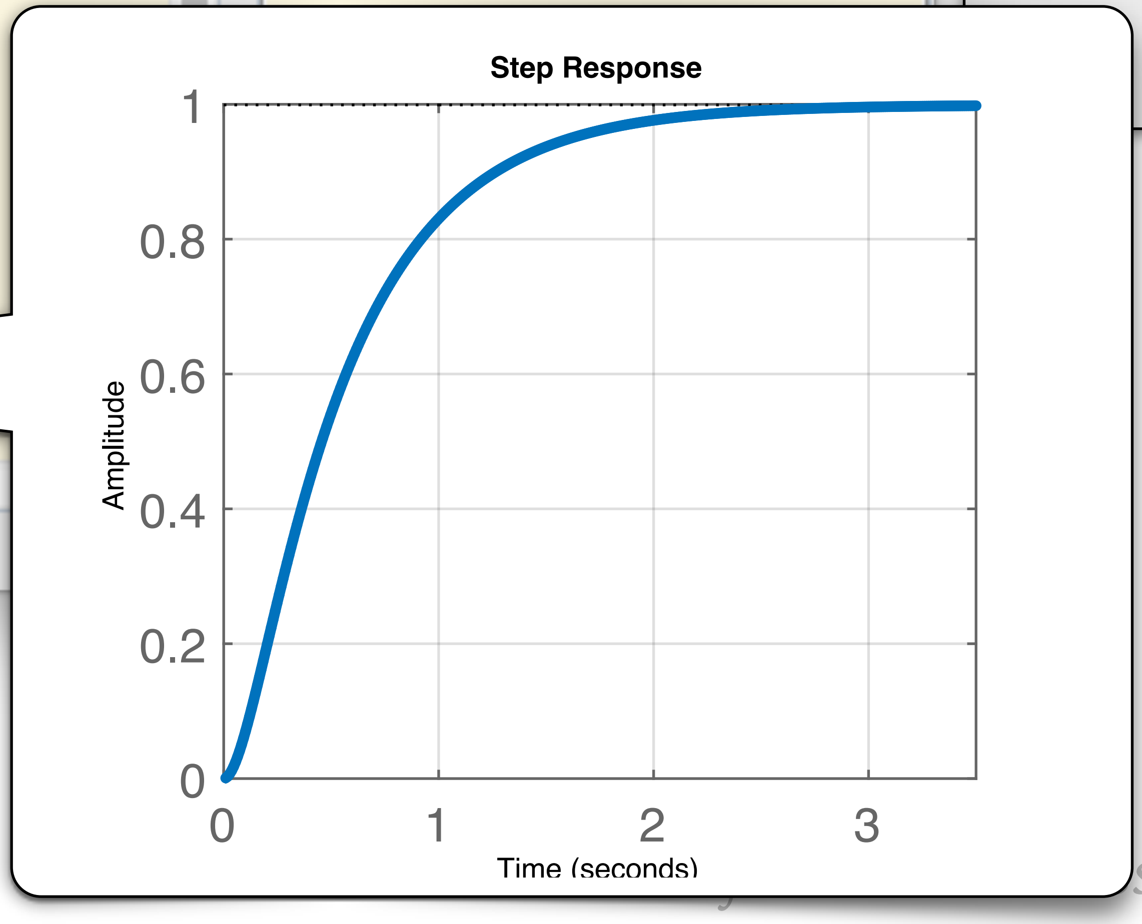
Momento de inércia do rotor,	$J = 0{,}01$	$(Kg \cdot m^2)$;
Constante de atrito viscoso do motor,	$b = 0{,}1$	(Nms);
Constante de forças eletromotriz,	$K_e = 0{,}01$	$\left(V/rad/s\right)$;
Constante de torque do motor,	$K_t = 0{,}01$	(Nm/Amp);
Resistência elétrica,	$R = 1$	$(Ohms)$
Indutância elétrica,	$L = 0{,}5$	(H)





Matlab, arquivo "init_motor_velocidade.m":

```
% init_motor_velocidade.m
% Inicializada dados para Modelagem motor CC - Velocidade
% Ref.: https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?
example=MotorSpeed&section=SystemModeling
disp('Dados Motor CC - Velocidade angular:')
J = 0.01; % momento de inercia do motor
b = 0.1;  % cte atrito viscoso do motor
K = 0.01; % cte forÃ§a eletromotriz e de torque do motor
(unidades S.I.)
R = 1;    % resistÃªncia elÃ©trica do motor
L = 0.5;  % indutÃ¢ncia elÃ©trica do motor
s = tf('s');
V_motor = K/((J*s+b)*(L*s+R)+K^2)
```



$$s(Js + b)\,\Theta(s) = K\,I(s) \quad (5)$$

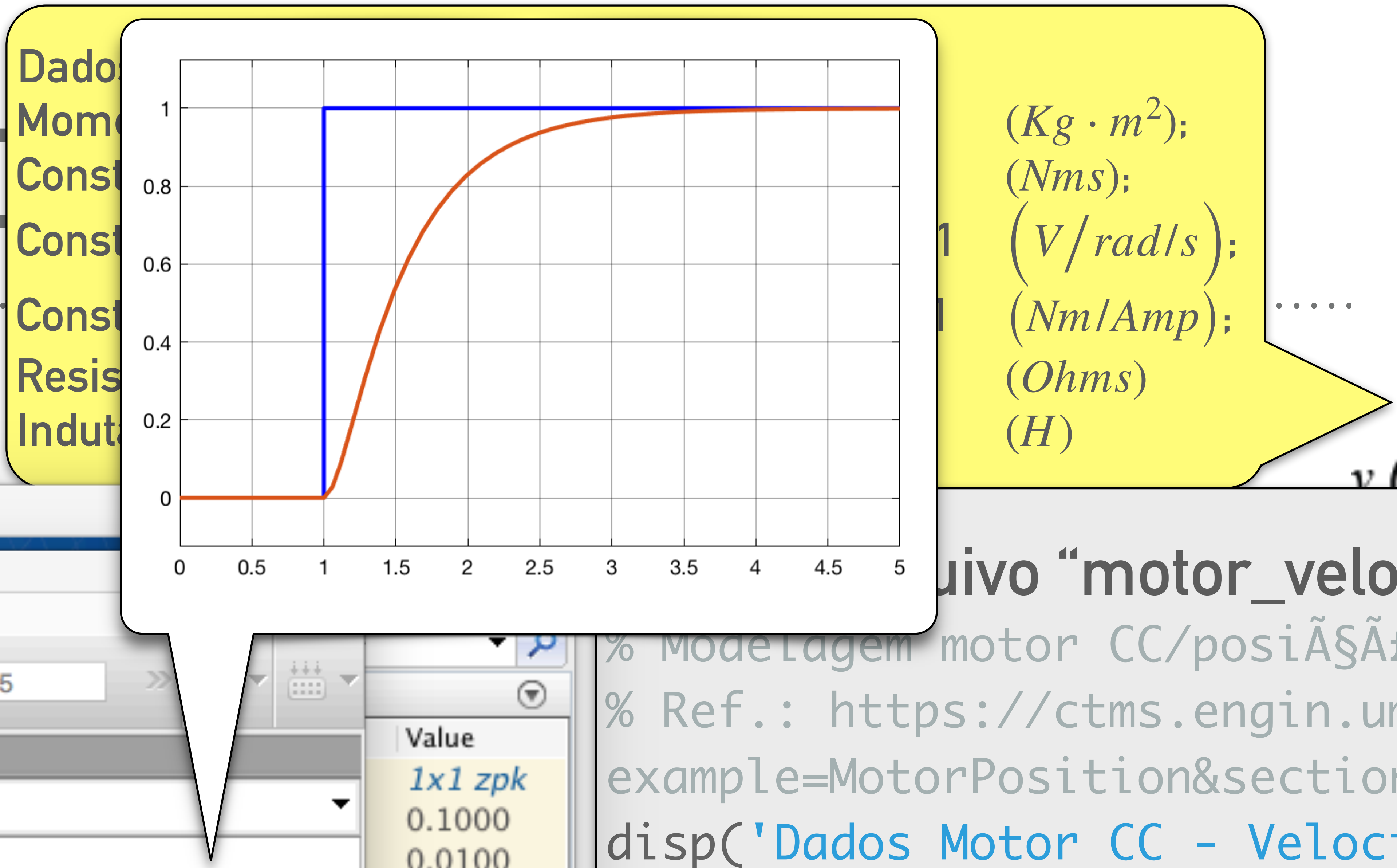
$$(Ls + R)\,I(s) = V(s) - K\,s\Theta(s) \quad (6)$$

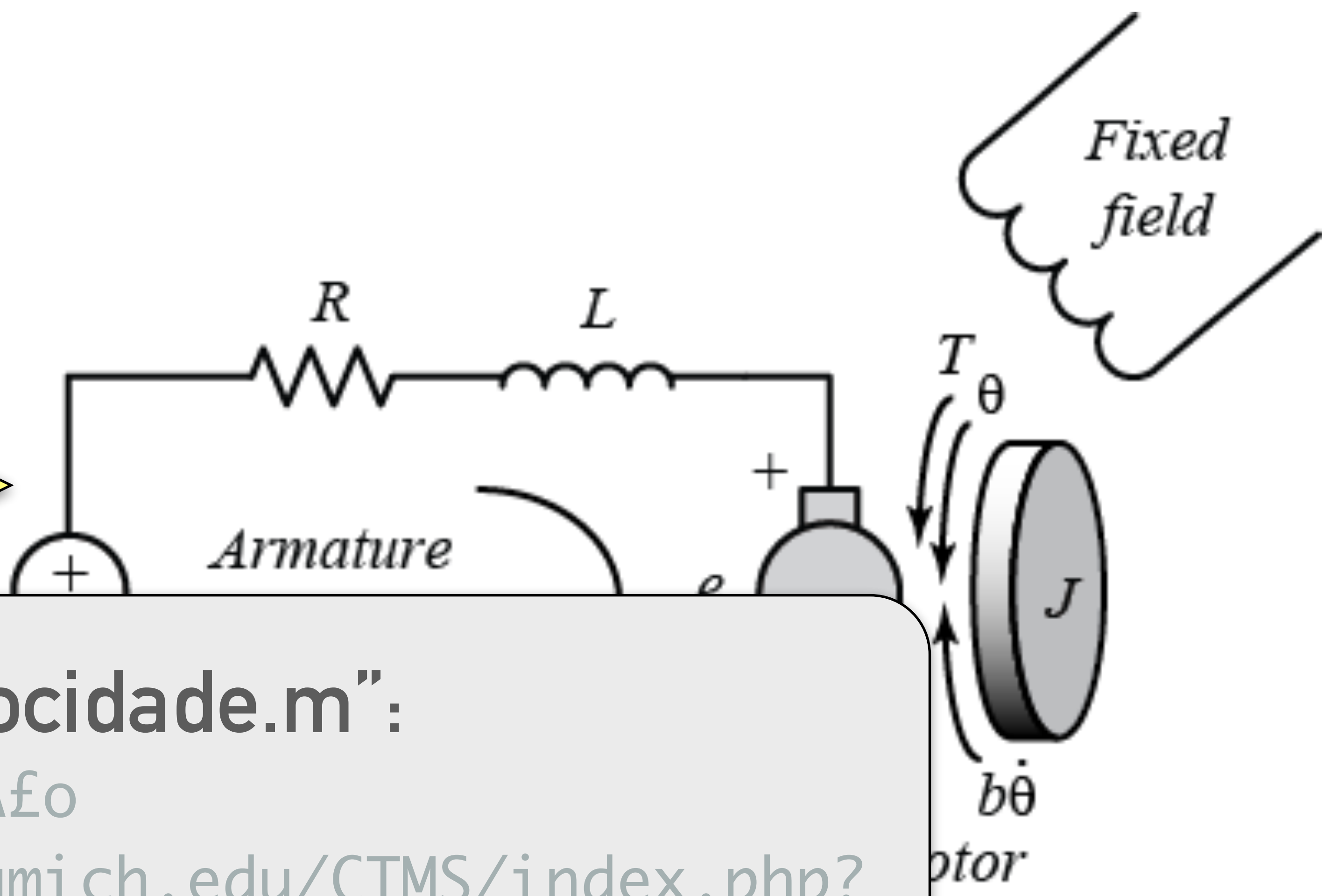
$$P(s) = \frac{\dot{\Theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js+b)(Ls+R)+K^2} \quad \left[\frac{rad/s}{V}\right]$$

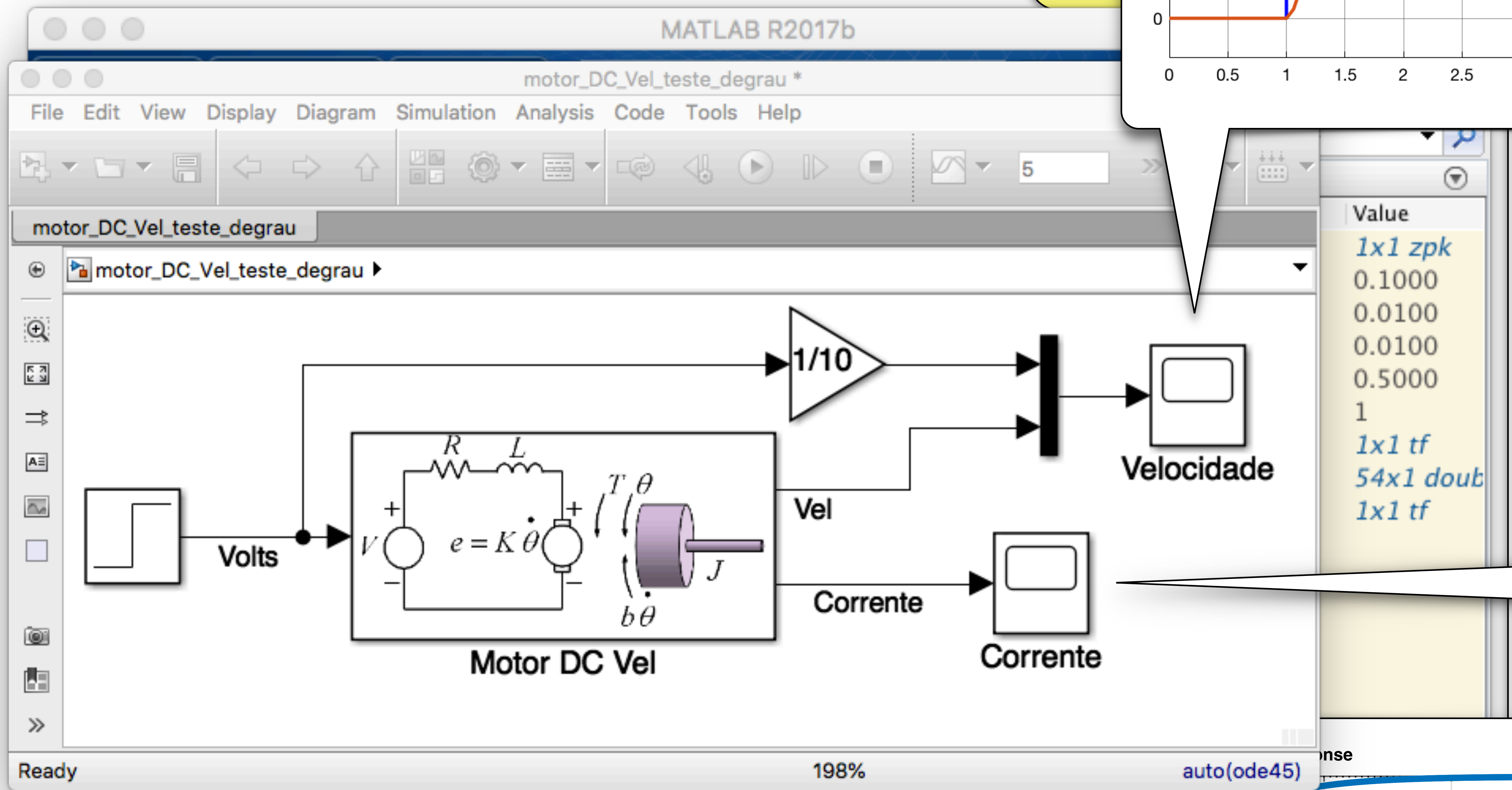
(7)

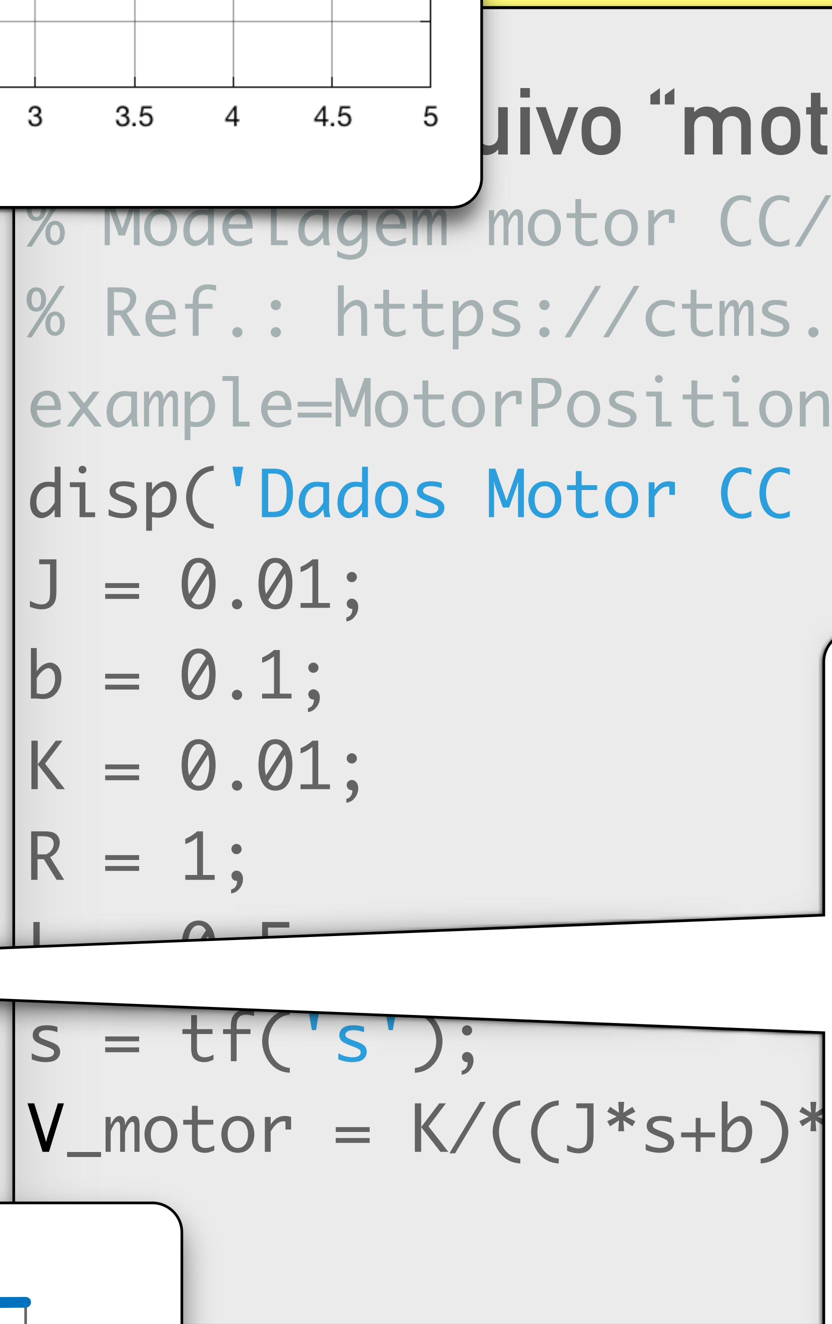
MODELAGEM 2) VELOCIDAD

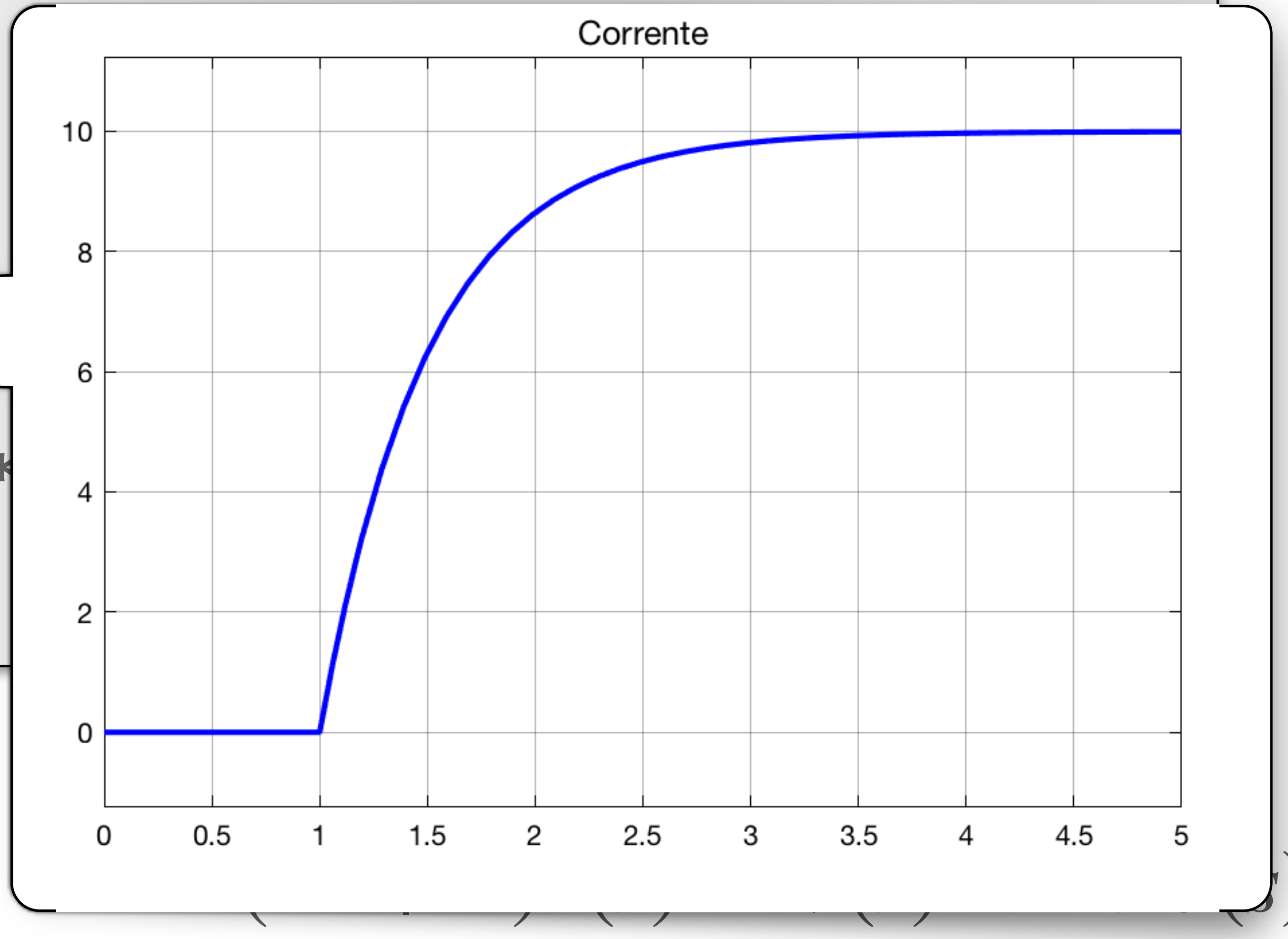
➤ Simulando no Simulink:

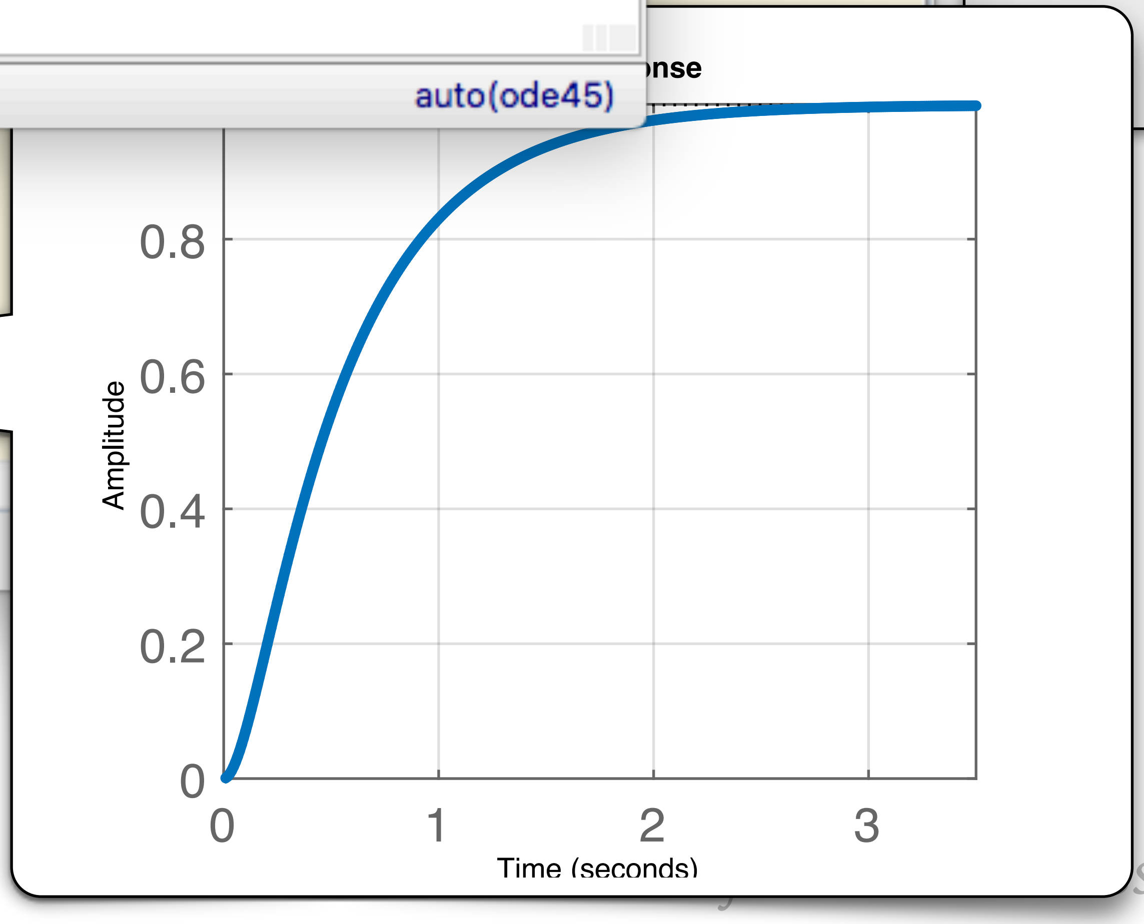












(6)

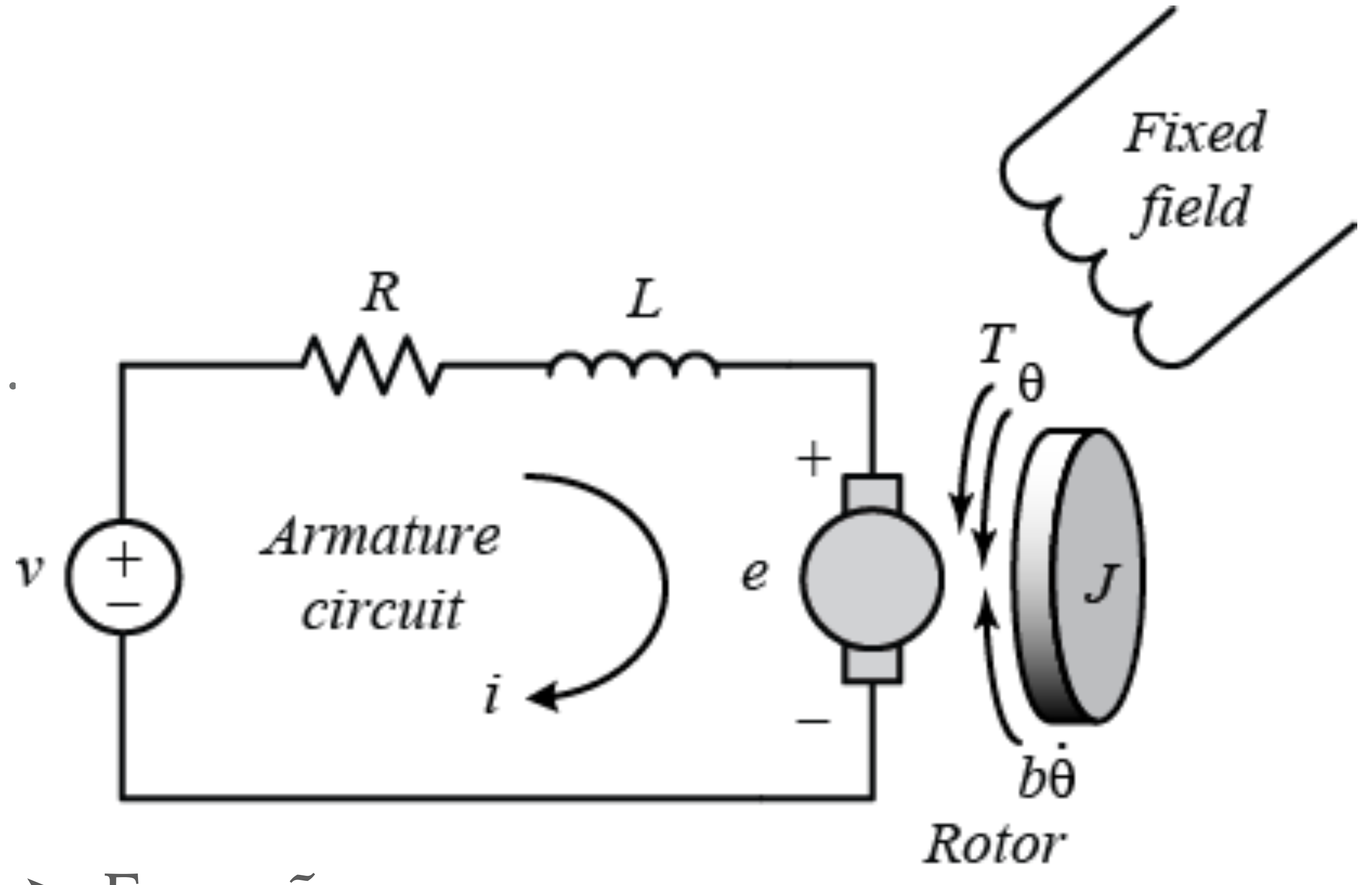
$$P(s) = \frac{\dot{\Theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js+b)(Ls+R)+K^2} \quad \left[\frac{rad/s}{V}\right]$$

(7)

Nossa tarefa é resolver problemas incrivelmente complexos e fazer com que sua solução pareça inevitável e incrivelmente simples, de modo que as pessoas não percebem como a coisa foi difícil.

-Jonathan Ive

MODELAGEM 3) POSIÇÃO DE UM MOTOR DC



- **Equações do sistema:**
  Em geral, o torque gerado por um motor CC é proporcional à corrente de armadura e à força do campo magnético. Neste exemplo vamos assumir que o campo magnético é constante e, portanto, que o torque do motor é proporcional apenas à corrente de armadura i por um fator constante K_t conforme mostrado na eq. (1). Isso é chamado de **motor controlado por armadura**.
- A força contraeletromotriz (fcem), e, é proporcional à velocidade angular do eixo por um fator constante K_c — eq. (2).
- Nas unidades SI, as constantes de torque do motor e de força eletromotriz são iguais, ou seja, $K_t = K_c$; portanto, usaremos K para representar tanto a constante de torque do motor quanto a constante de força eletromotriz.
- Da figura, podemos derivar as seguintes equações governantes com base na 2ª lei de Newton e na lei das tensões de Kirchhoff: eq. (3) e eq. (4).
- **Função de Transferência:**
  Aplicando a transformada de Laplace, as equações de modelagem acima podem ser expressas em termos da variável de Laplace s: eq. (5) e eq. (6).
- Chegamos à seguinte função de transferência em malha aberta eliminando $I(s)$ entre as duas equações acima, onde a velocidade de rotação é considerada a saída e a tensão da armadura é considerada a entrada, ver eq. (7).
- No entanto, para este exemplo, teremos a posição como saída. Podemos obter a posição integrando a velocidade, portanto, basta dividir a função de transferência acima por s (eq. 8) .

- Equações:

$$T = K_t\, i \qquad (1)$$

$$e = K_c\, \dot{\theta} \qquad (2)$$

$$J\,\ddot{\theta} + b\,\dot{\theta} = K\,i \qquad (3)$$

$$L\,\frac{d\,i}{dt} + R\,i = V - K\,\dot{\theta} \qquad (4)$$

$$s(Js + b)\,\Theta(s) = K\,I(s) \qquad (5)$$

$$(Ls + R)\,I(s) = V(s) - K\,s\Theta(s) \qquad (6)$$

$$\frac{\dot{\Theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js+b)(Ls+R)+K^2} \quad \left[\frac{rad/s}{V}\right] \qquad (7)$$

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{s[(Js+b)(Ls+R)+K^2]} \quad \left[\frac{rad}{V}\right] \qquad (8)$$

MODELAGEM 3) POSIÇÃO DE UM MOTOR DC

Parâmetros:

Momento de inércia do rotor,	$J = 3{,}2284\text{x}10^{-6}$	$(Kg \cdot m^2)$;
Constante de atrito viscoso do motor,	$b = 3{,}5077\text{x}10^{-6}$	(Nms);
Constante de forças eletromotriz,	$K_e = 0{,}0274$	$\left(V/rad/s\right)$;
Constante de torque do motor,	$K_t = 0{,}0274$	$\left(Nm/Amp\right)$;
Resistência elétrica,	$R = 4$	$(Ohms)$
Indutância elétrica,	$L = 2{,}75\text{x}10^{-6}$	(H)

a do campo

que o torque do

mostrado na eq.

tor constante K_c

seja, $K_t = K_c$; portanto, usaremos K par... presentar tanto a constante de torque do motor quanto a constante de força eletromotriz.

Matlab, arquivo "init_motor_posicao.m":

```
% init_motor_posicao.m
% Inicializada dados para Modelagem motor CC - posiÃ§Ã£o
% Ref.: https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?
example=MotorPosition&section=SystemModeling
disp('Dados Motor CC - Posição angular:')
J = 3.2284E-6; % momento de inercia do motor
b = 3.5077E-6; % cte atrito viscoso do motor
K = 0.0274;    % cte forÃ§a eletromotriz e de torque do motor (unidades S.I.)
R = 4;         % resistÃªncia elÃ©trica do motor
L = 2.75E-6;   % indutÃ¢ncia elÃ©trica do motor
s = tf('s');
P_motor = K/(s*((J*s+b)*(L*s+R)+K^2))
```

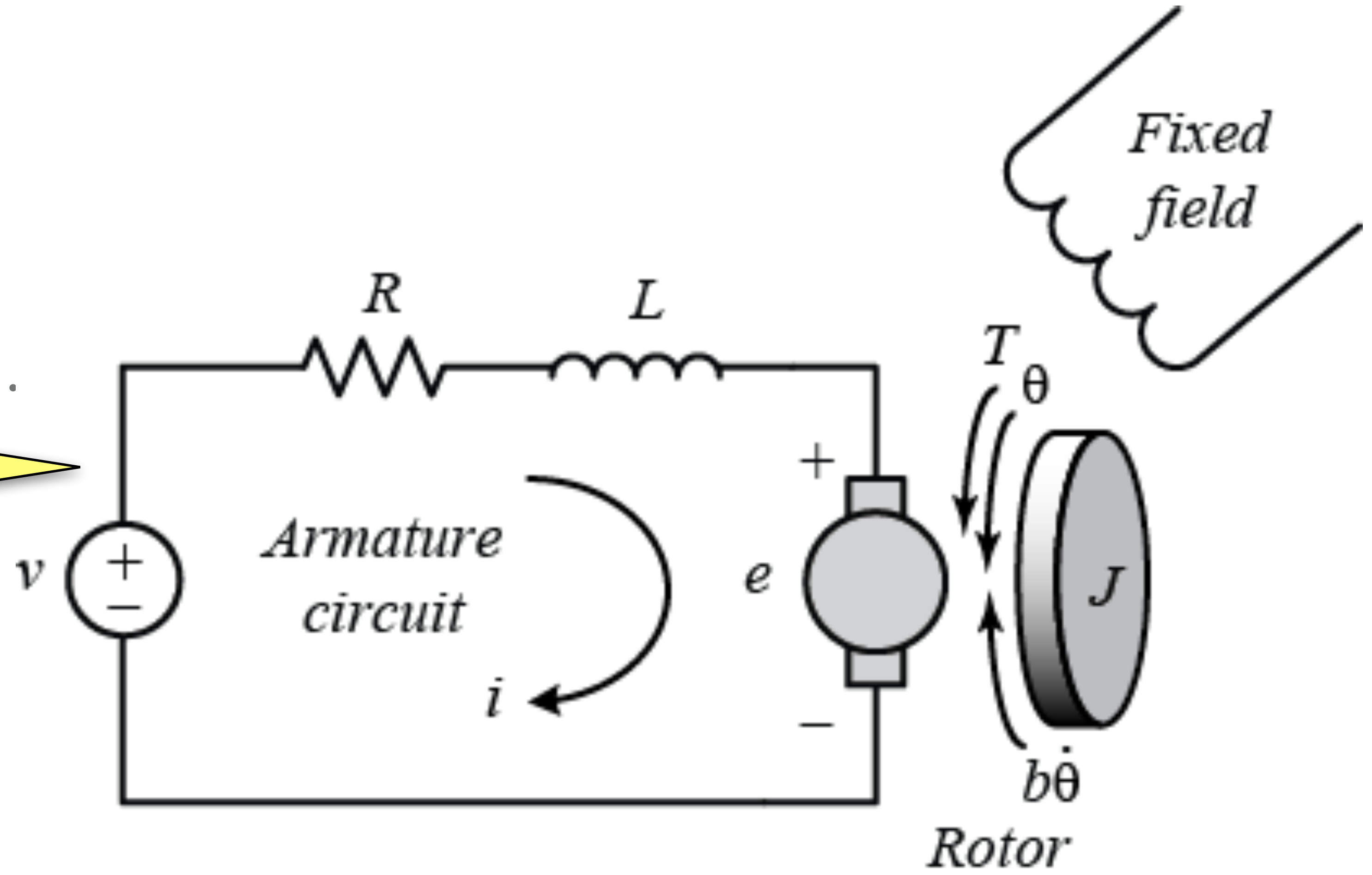
n e na lei das

as em termos da

s equações acima,

entrada, ver eq.

egrando a



- Equações:

$$T = K_t\, i \qquad (1)$$

$$e = K_c\, \dot{\theta} \qquad (2)$$

$$J\,\ddot{\theta} + b\,\dot{\theta} = K\, i \qquad (3)$$

$$L\,\frac{di}{dt} + R\, i = V - K\,\dot{\theta} \qquad (4)$$

$$s(Js + b)\,\Theta(s) = K\, I(s) \qquad (5)$$

$$(Ls + R)\, I(s) = V(s) - K\, s\Theta(s) \qquad (6)$$

$$\frac{\dot{\Theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js+b)(Ls+R)+K^2} \left[\frac{rad/s}{V}\right] \qquad (7)$$

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{s[(Js+b)(Ls+R)+K^2]} \left[\frac{rad}{V}\right] \qquad (8)$$

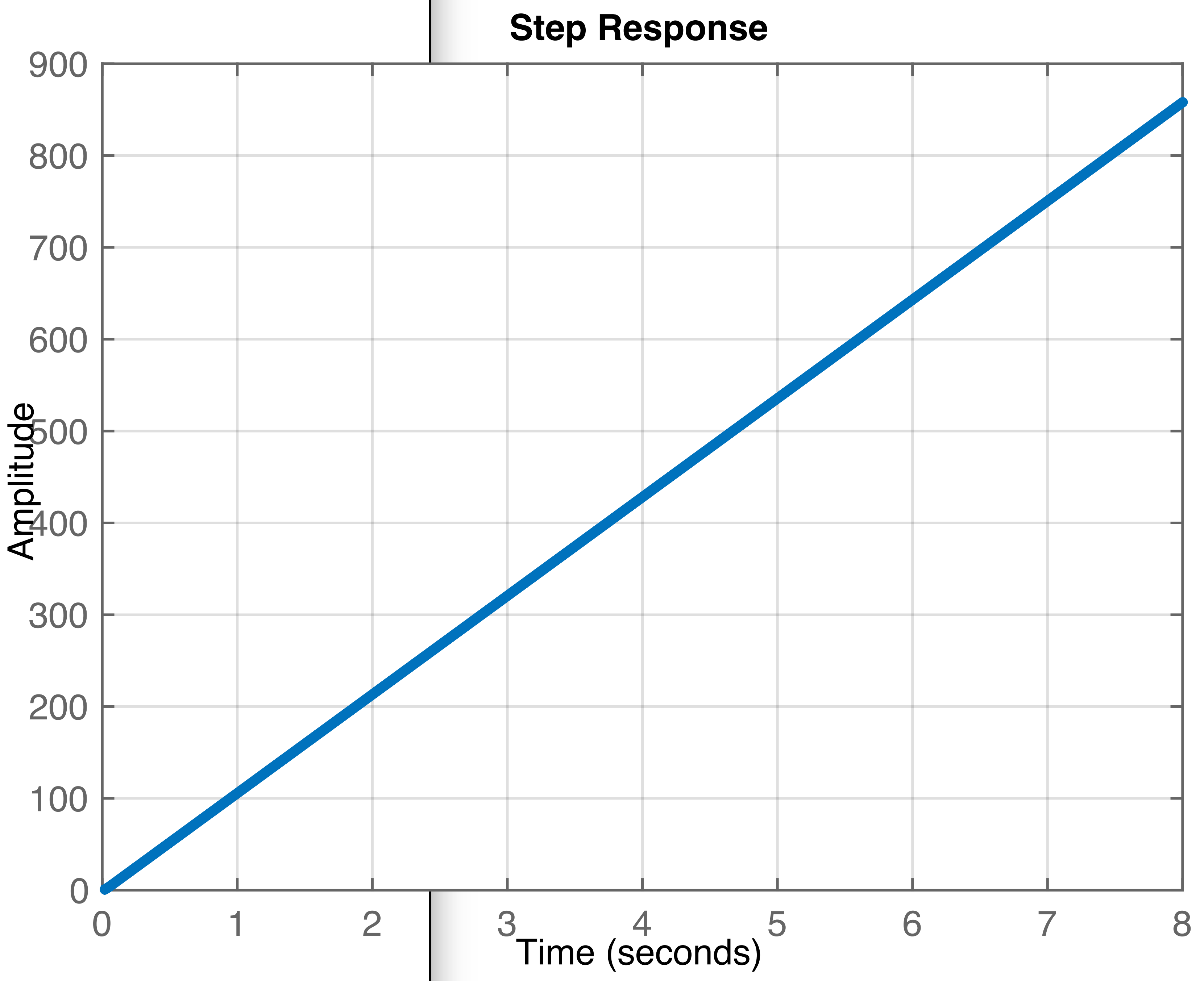
MODELAGEM 3) POSIÇÃO DE UM M

- ➤ **Simulando no Matlab:**

```
>> init_motor_posicao
Dados Motor CC - Posição angular:

P_motor =

                   0.0274
  -------------------------------------------
  8.878e-12 s^3 + 1.291e-05 s^2 + 0.0007648 s

Continuous-time transfer function.

>> zpk(P_motor)

ans =

        3.0862e+09
  ------------------------
  s (s+1.454e06) (s+59.23)

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> % Introduzindo degrau de 3 Volts no motor:
>> step(3*P_motor)
```

Matlab, arquivo "init_motor_posicao.m":

```
% init_motor_posicao.m
% Inicializada dados para Modelagem motor CC - posiÃ§Ã£o
% Ref.: https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?
example=MotorPosition&section=SystemModeling
disp('Dados Motor CC - Posição angular:')
J = 3.2284E-6; % momento de inercia do motor
b = 3.5077E-6; % cte atrito viscoso do motor
K = 0.0274;    % cte forÃ§a eletromotriz e de torque do motor (unidades S.I.)
R = 4;         % resistÃªncia elÃ©trica do motor
L = 2.75E-6;   % indutÃ¢ncia elÃ©trica do motor
s = tf('s');
P_motor = K/(s*((J*s+b)*(L*s+R)+K^2))
```



$$e = K_c\,\dot\theta \qquad (2)$$

$$J\ddot\theta + b\,\dot\theta = K\,i \qquad (3)$$

$$L\frac{di}{dt} + R\,i = V - K\dot\theta \qquad (4)$$

$$s(Js+b)\,\Theta(s) = K\,I(s) \qquad (5)$$

$$(Ls+R)\,I(s) = V(s) - K\,s\Theta(s) \qquad (6)$$

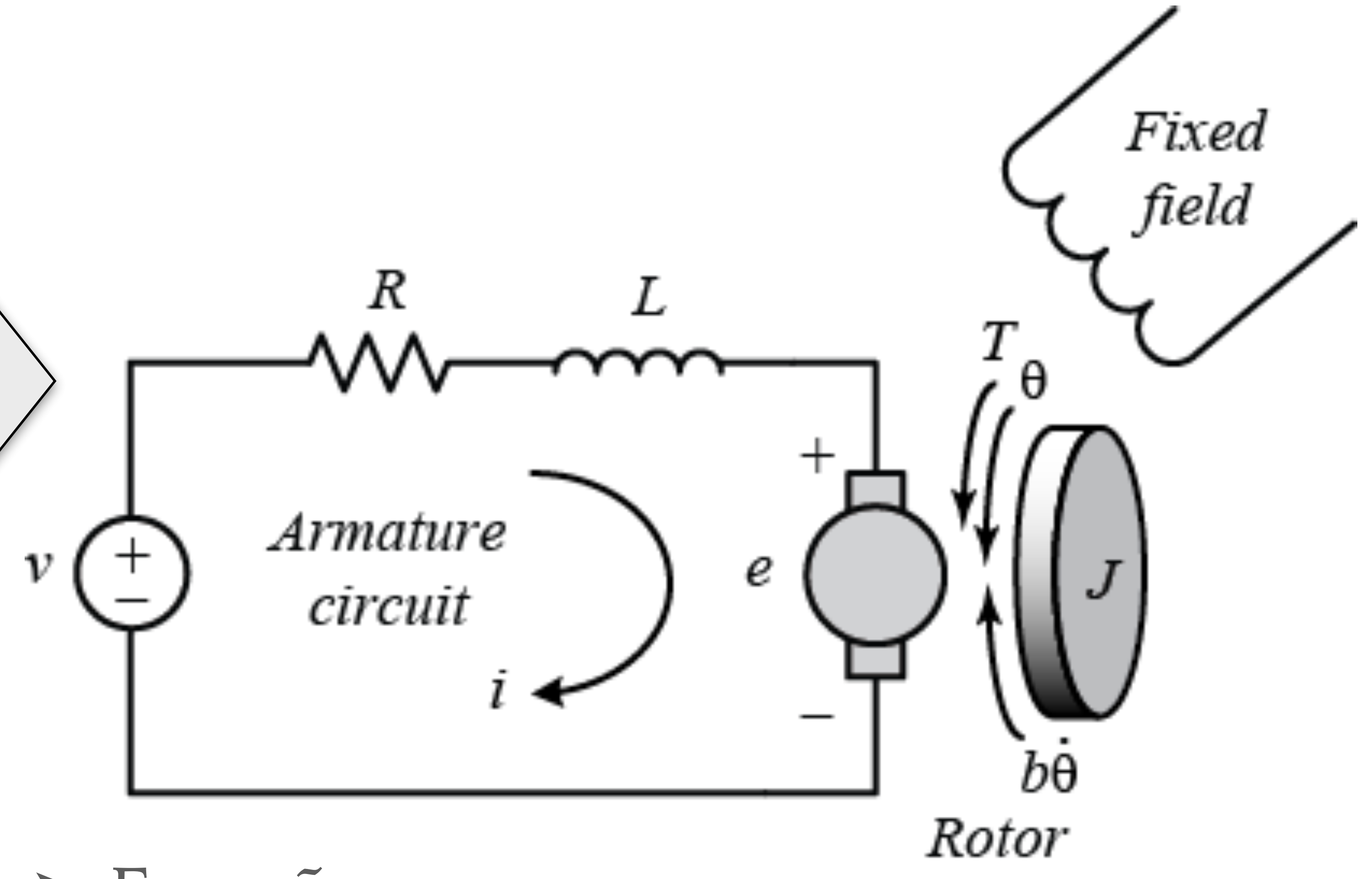
$$\frac{\dot\Theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js+b)(Ls+R)+K^2}\left[\frac{rad/s}{V}\right] \qquad (7)$$

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{s[(Js+b)(Ls+R)+K^2]}\left[\frac{rad}{V}\right] \qquad (8)$$

MODELAGEM 3) POSIÇÃO D

Parâmetros:

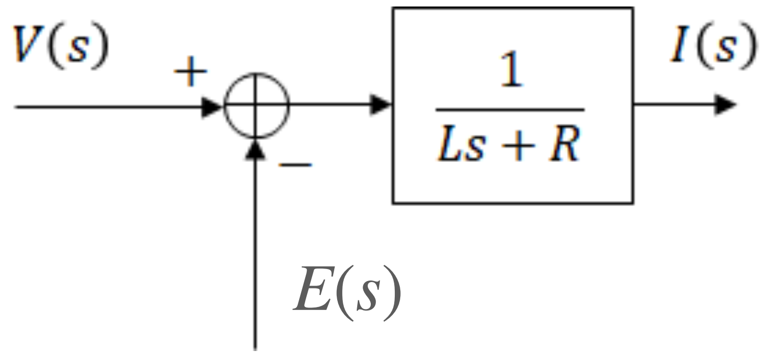
Momento de inércia do rotor,	J	$(Kg \cdot m^2)$;
Constante de atrito viscoso do motor,	b	(Nms);
Constante de forças eletromotriz,	K_e	$\left(V/rad/s\right)$;
Constante de torque do motor,	K_t	$\left(Nm/Amp\right)$;
Resistência elétrica,	R	$(Ohms)$
Indutância elétrica,	L	(H)



➤ **(Outro) Diagrama de Blocos:**

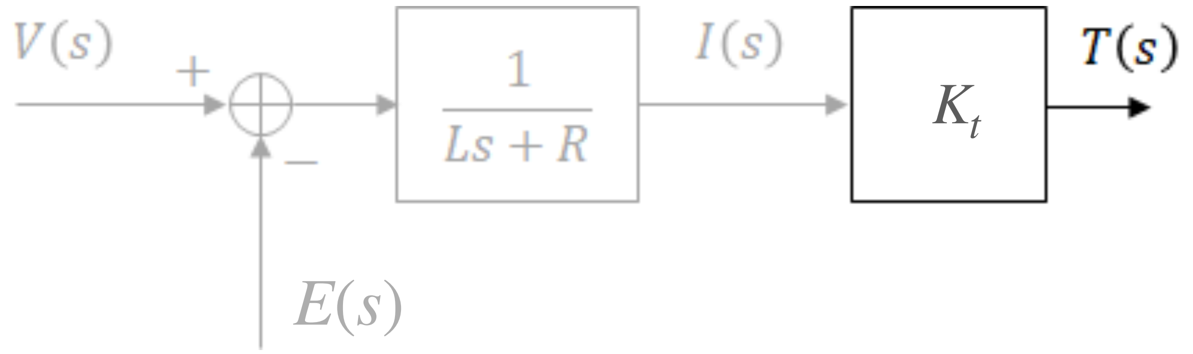
1) Transformação tensão para corrente:

$$I(s) = \frac{1}{Ls + R}\left(V(s) - E(s)\right)$$



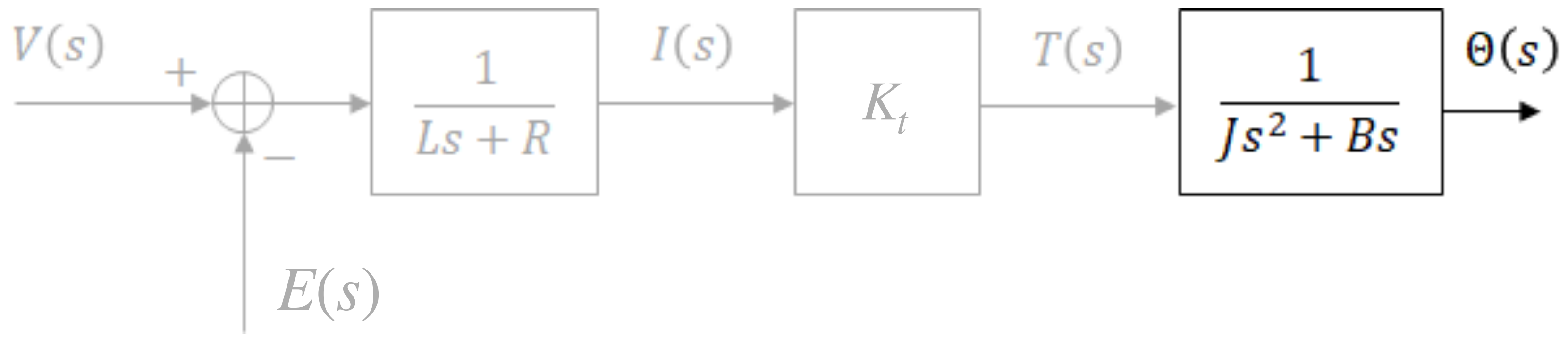
2) Transformação corrente para torque:

$$T(s) = K_t\, I(s)$$



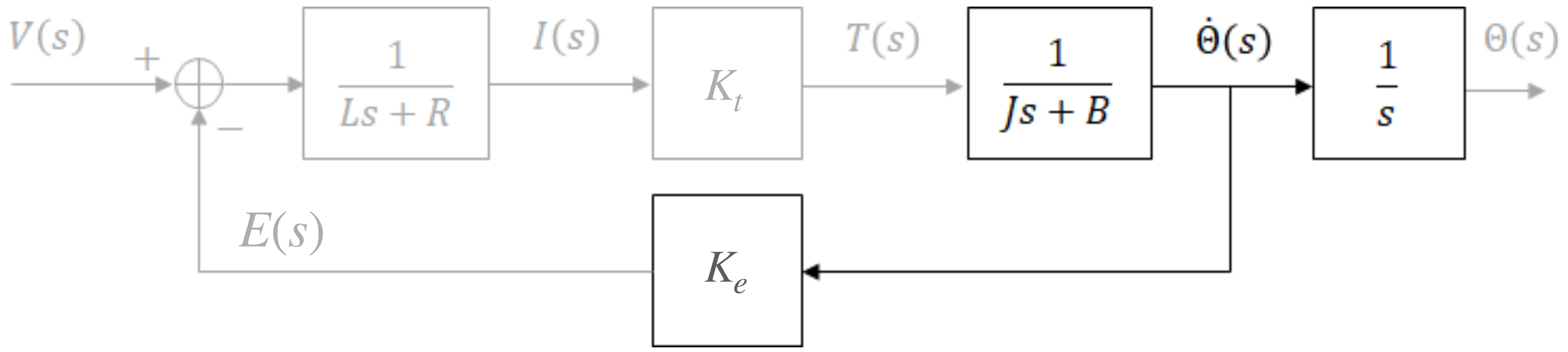
3) Transformação torque para posição:

$$\Theta(s) = \frac{1}{Js^2 + bs}\, T(s)$$



4) Força contra-eletromotriz:

$$E(s) = K_e\, \Theta(s)\, s$$



➤ Equações:

$T = K_t\, i$ (1)

$e = K_e\, \dot{\theta}$ (2)

$J\,\ddot{\theta} + b\,\dot{\theta} = K\, i$ (3)

$L\,\dfrac{d\,i}{dt} + R\, i = V - K\,\dot{\theta}$ (4)

$s(Js + b)\,\Theta(s) = K\, I(s)$ (5)

$(Ls + R)\, I(s) = V(s) - K\, s\Theta(s)$ (6)

$$\frac{\dot{\Theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js + b)(Ls + R) + K^2}\left[\frac{rad/s}{V}\right]$$

(7)

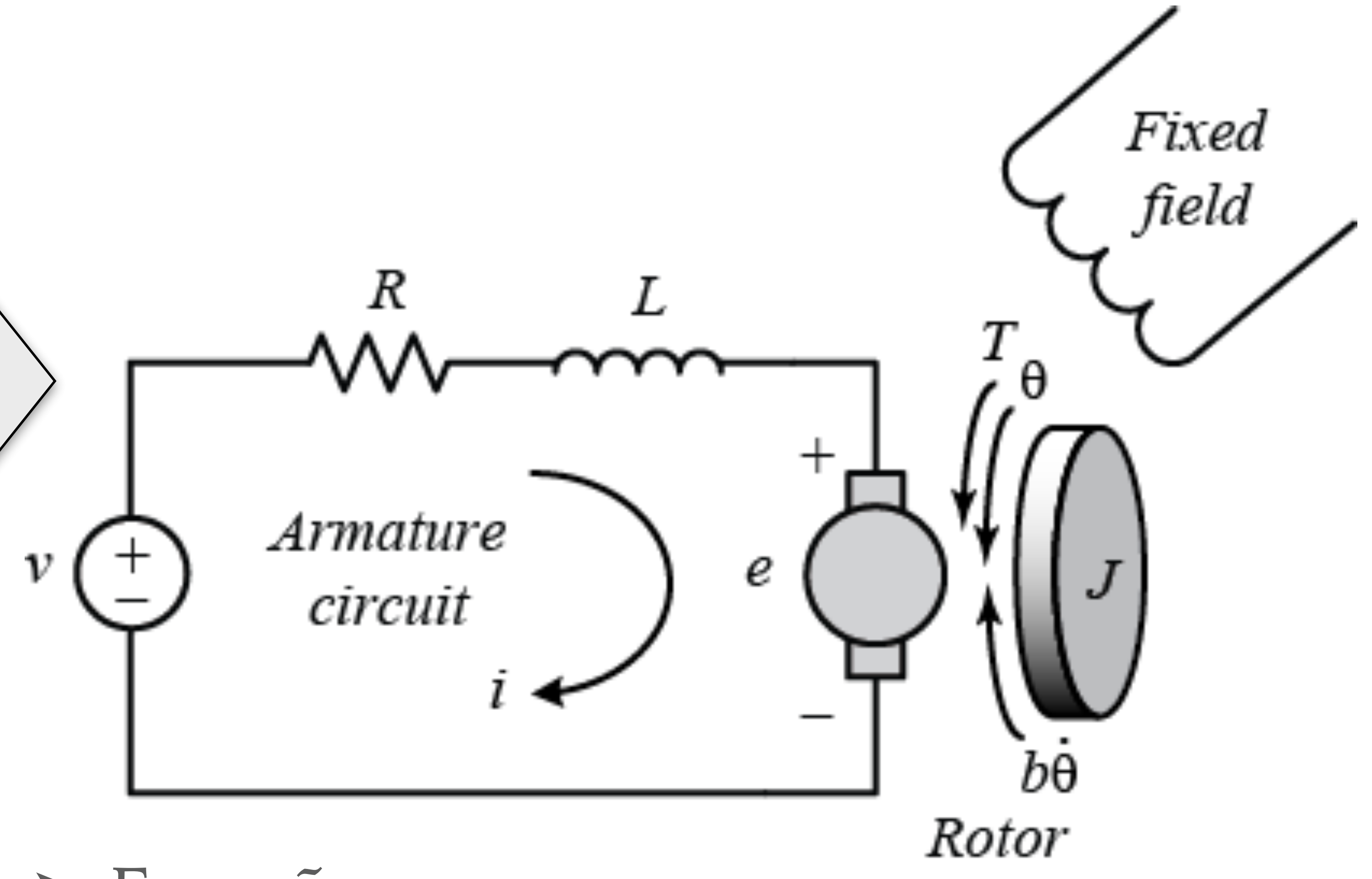
$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{s[(Js + b)(Ls + R) + K^2]}\left[\frac{rad}{V}\right]$$

(8)

MODELAGEM 3) POSIÇÃO D

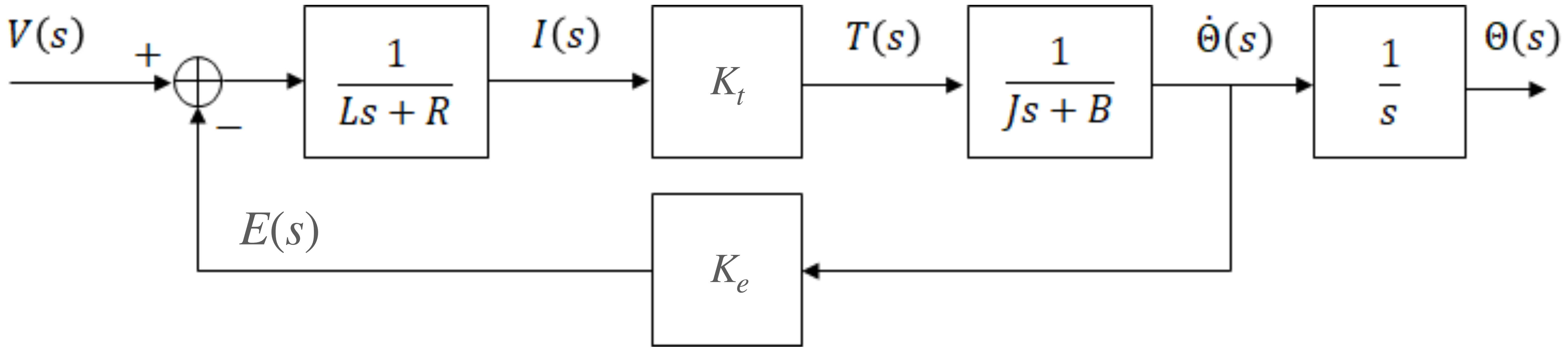
Parâmetros:

Momento de inércia do rotor,	J	$(Kg \cdot m^2)$;
Constante de atrito viscoso do motor,	b	(Nms);
Constante de forças eletromotriz,	K_e	$\left(V/rad/s\right)$;
Constante de torque do motor,	K_t	$\left(Nm/Amp\right)$;
Resistência elétrica,	R	$(Ohms)$
Indutância elétrica,	L	(H)



- **(Outro) Diagrama de Blocos:**

  Final:



- Equações:

$T = K_t\, i \qquad (1)$

$e = K_e\, \dot{\theta} \qquad (2)$

$J\,\ddot{\theta} + b\,\dot{\theta} = K\, i \qquad (3)$

$L\,\dfrac{d\,i}{dt} + R\, i = V - K\,\dot{\theta} \qquad (4)$

$s(Js + b)\,\Theta(s) = K\, I(s) \qquad (5)$

$(Ls + R)\, I(s) = V(s) - K\, s\Theta(s) \quad (6)$

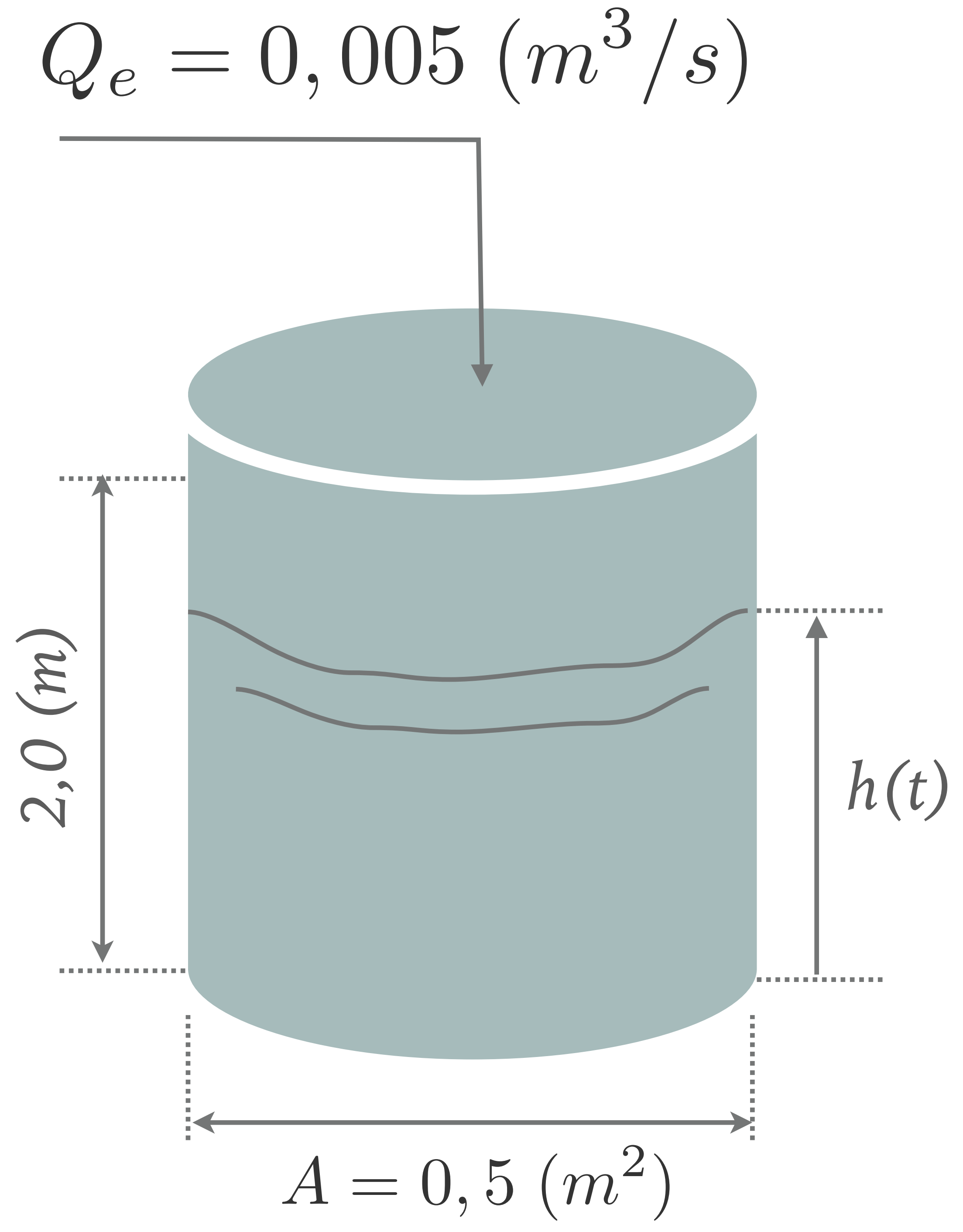
$$\frac{\dot{\Theta}(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js + b)(Ls + R) + K^2} \quad \left[\frac{rad/s}{V}\right]$$
(7)

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{s[(Js + b)(Ls + R) + K^2]} \quad \left[\frac{rad}{V}\right]$$
(8)

MODELAGEM: PROCESSO COM INTEGRADOR…

- **Controle de nível de líquido em tanque:**
  Seja um tanque fechado, com vazão apenas de entrada (ver figura); no mesmo entra água à pressão e vazão constante e à temperatura ambiente. Determinar o nível do líquido passado certo intervalo de tempo. Suponha que o tanque inicia vazio, que a partir do tempo t=10 segundos, o tanque começa à ser preenchido à 0,005 m³/s. Esta vazão se mantêm constante pelos próximos 1,5 minutos. Determine o nível do líquido atingido dentro do tanque passados 2,0 minutos no total… Gere um gráfico!

  Dados: A = área da base do tanque = 0,5 m2; Q_e=Vazão de entrada = 0,005 m3/s; h = altura do tanque (que varia de 0 à 2,0 metros).



- **Equações:**

$$h(t) = \underbrace{h_0}_{\substack{\text{altura}\\ \text{inicial}}} + \frac{Q_e\ (m^{\cancel{3}\,1})}{A\ (m^{\cancel{2}})\ (\cancel{s})} \cdot \Delta t\ (\cancel{s})$$

$Q_e(t) = \text{cte}$

$$h(t) = h(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \frac{Q_e(t)}{A}\, dt$$

$$h(t) = h(t_i) + \underbrace{\frac{Q_e}{A}}_{\alpha} \cdot \Big[1\Big]_{t_i}^{t_f}$$

$$h(t) = h(t_i) + \alpha \cdot (t_f - t_i)$$

$$\begin{aligned} h_{final} &= 0 + \frac{0,005}{0,5} \cdot (1,5 * 60 - 10) \\ &= 0,01 \cdot (90 - 10) \\ &= 0,01 \cdot 80 \\ &= 0,8\ (m) \end{aligned}$$

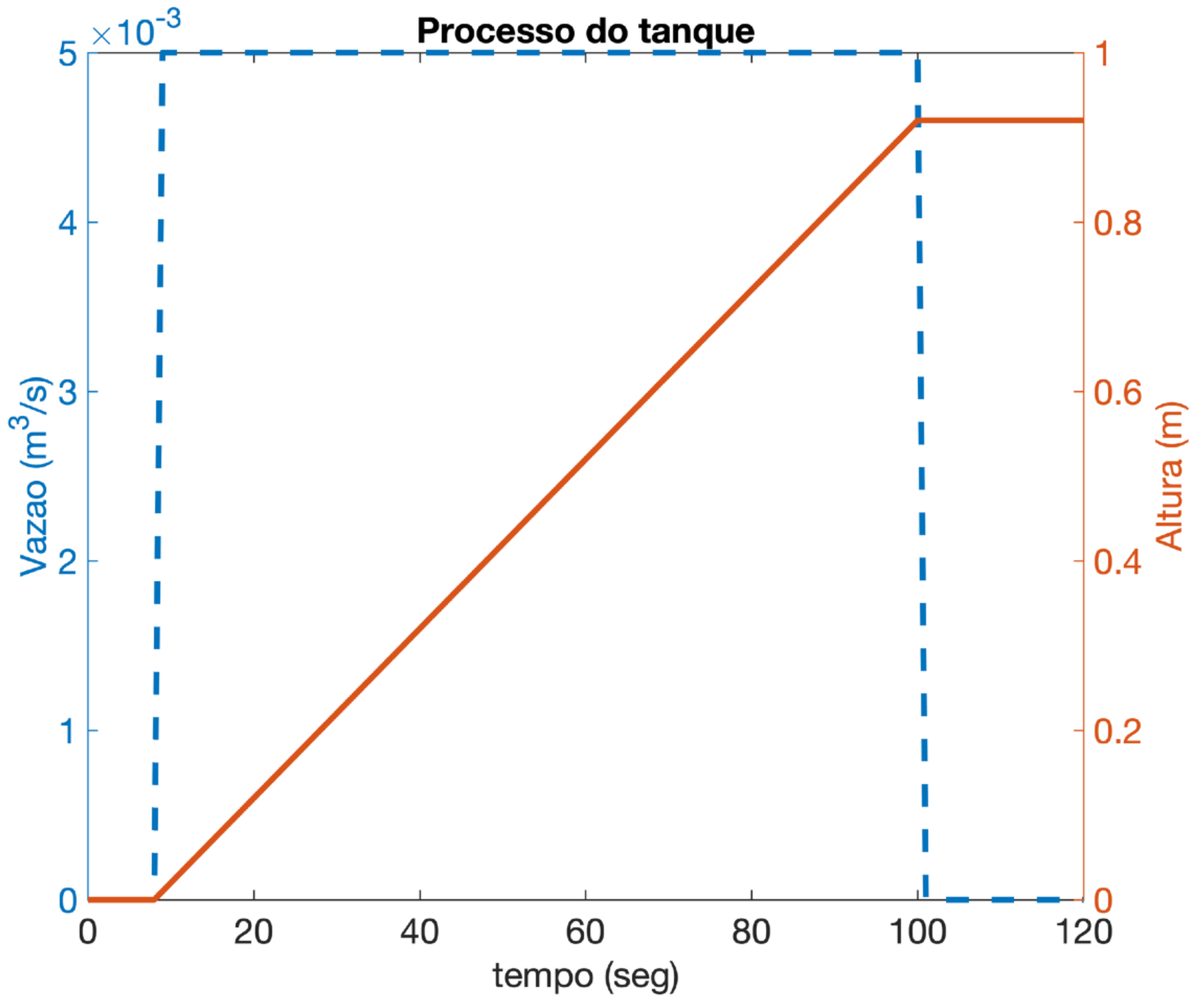
note que o "sinal" $Q_e(t)$ se comporta como um degrau de amplitude = 0,005 (m³/s).

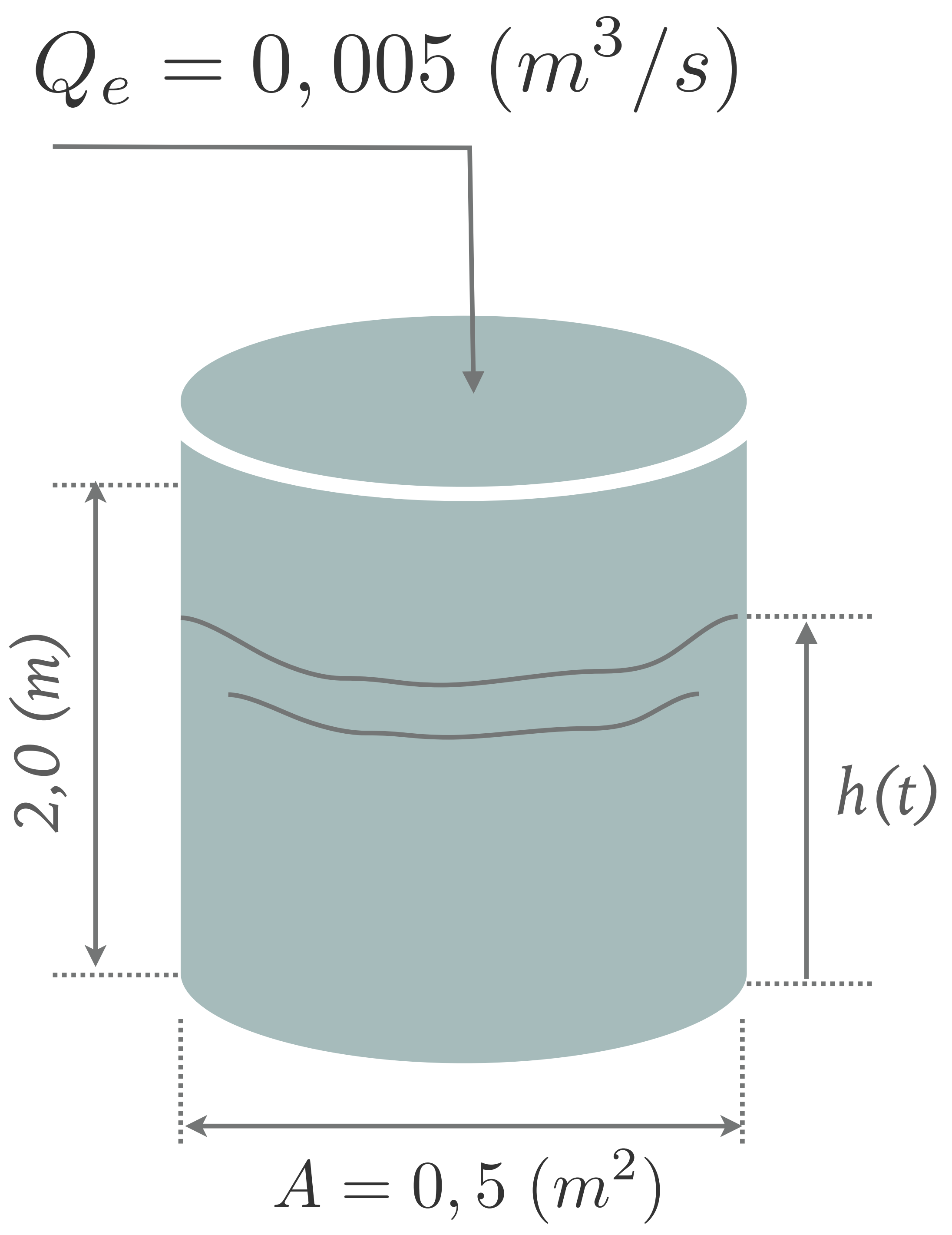
MODELAGEM: PROCESSO COM INTEGRADOR…

$$h(t) = h(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \frac{Q_e(t)}{A}\, dt$$

➤ *note que o "sinal" $Q_e(t)$ se comporta como um degrau de amplitude = 0,005 (m^3/s).*

```
% Simulando processo tipo 1 (1 integrador)
% Preenchendo tanque com l?quido
% Avaliando altura atingida pelo l?quido

% Criando vetor tempo da simula??o
t=0:1:2*60; % criando vetor tempo (1 em 1 segundo; 2 minutos)
u=length(t); % No. de pontos do vetor t; u =   121
Qe=zeros(1,u); % criando vetor Qe mesma dimensao vetor t, zerado
% mas Qe=0.005 entre 10 < t < 10+1,5*60
% t(10) =     9
Qe(1,10:(10+1.5*60+1))=0.005;
% verificando...
plot (t,Qe)
pause
A=0.5;
alpha=0.005/0.5; % razao
% inicializando vetor da altura com zeros
h=zeros(1,u);
for i=2:u
    h(i)=h(i-1)+Qe(i)/A; % calculando a integral de h(t)
end
[hAx,hLine1,hLine2] = plotyy(t,Qe, t,h);
title('Processo do tanque');
xlabel('tempo (seg)');
ylabel(hAx(1), 'Vazao (m^3/s)') % left y-axis
ylabel(hAx(2), 'Altura (m)') % right y-axis
```

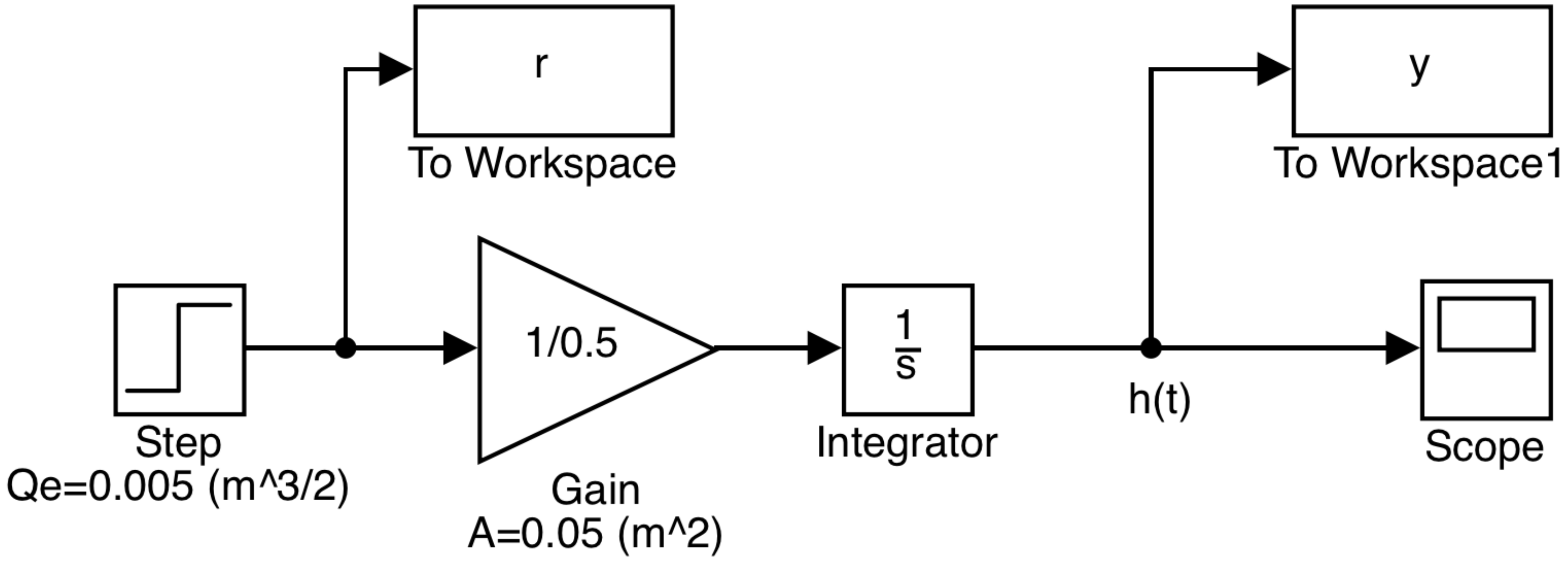


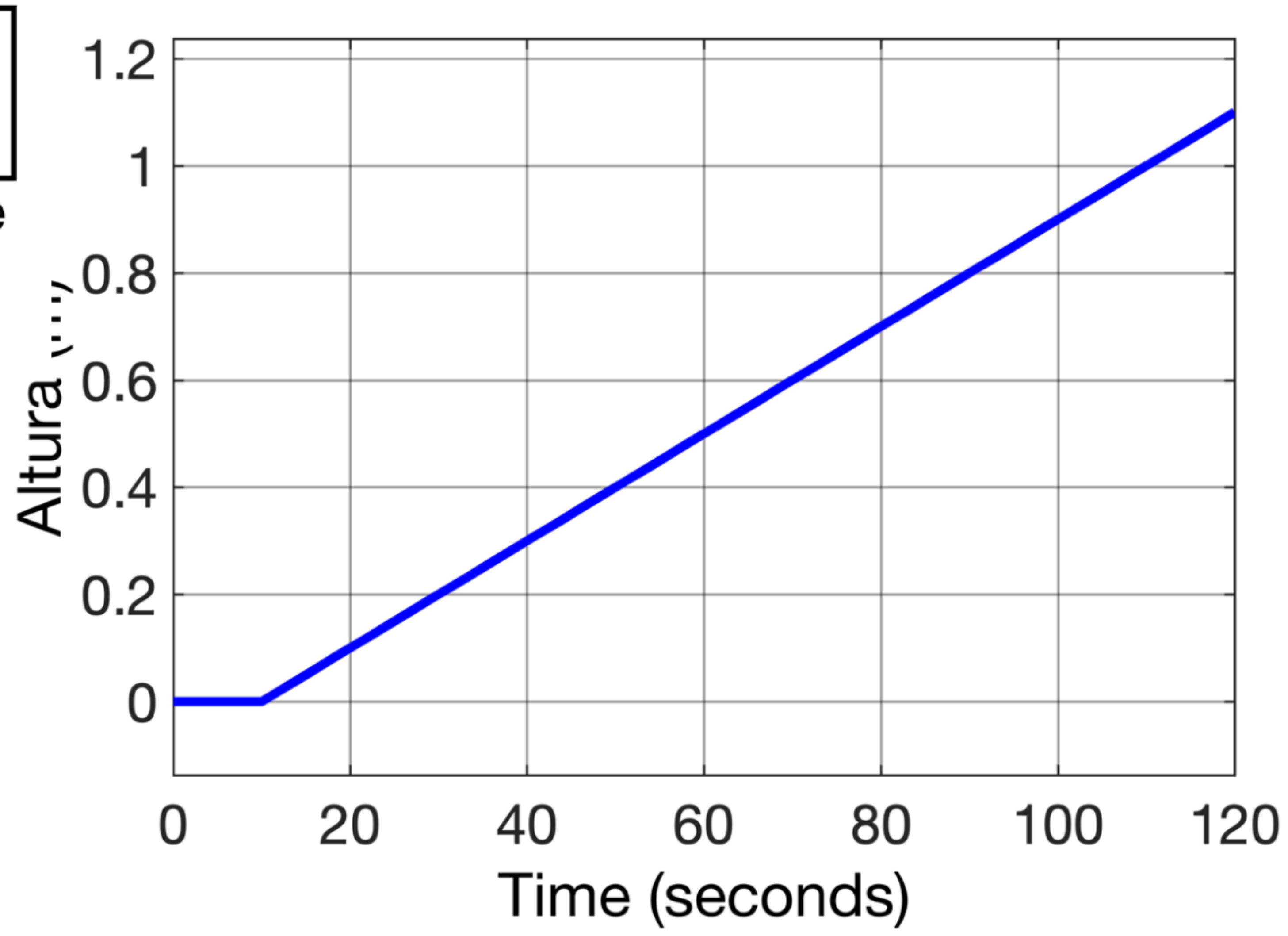


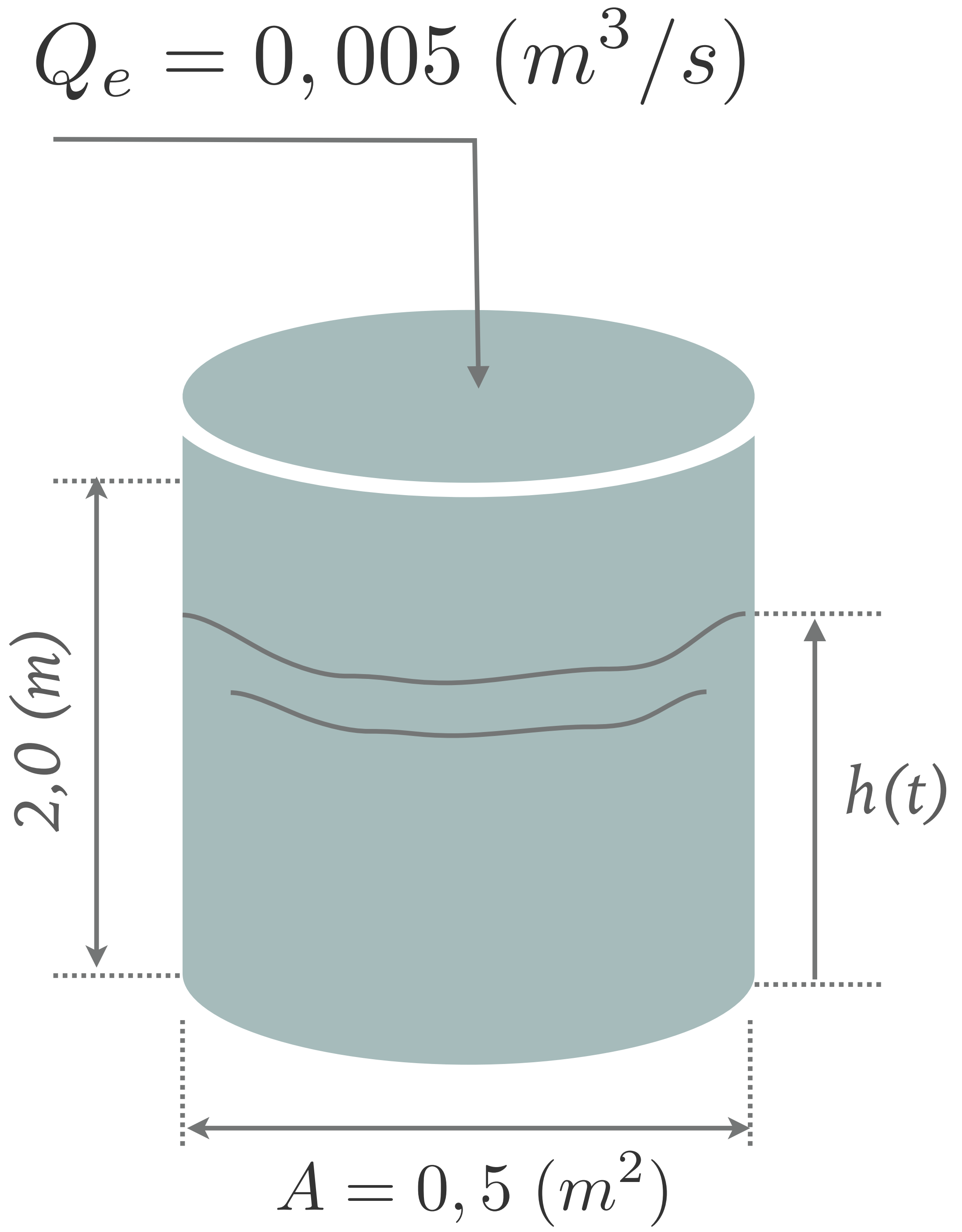
MODELAGEM: PROCESSO COM INTEGRADOR…

$$h(t) = h(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \frac{Q_e(t)}{A}\, dt$$

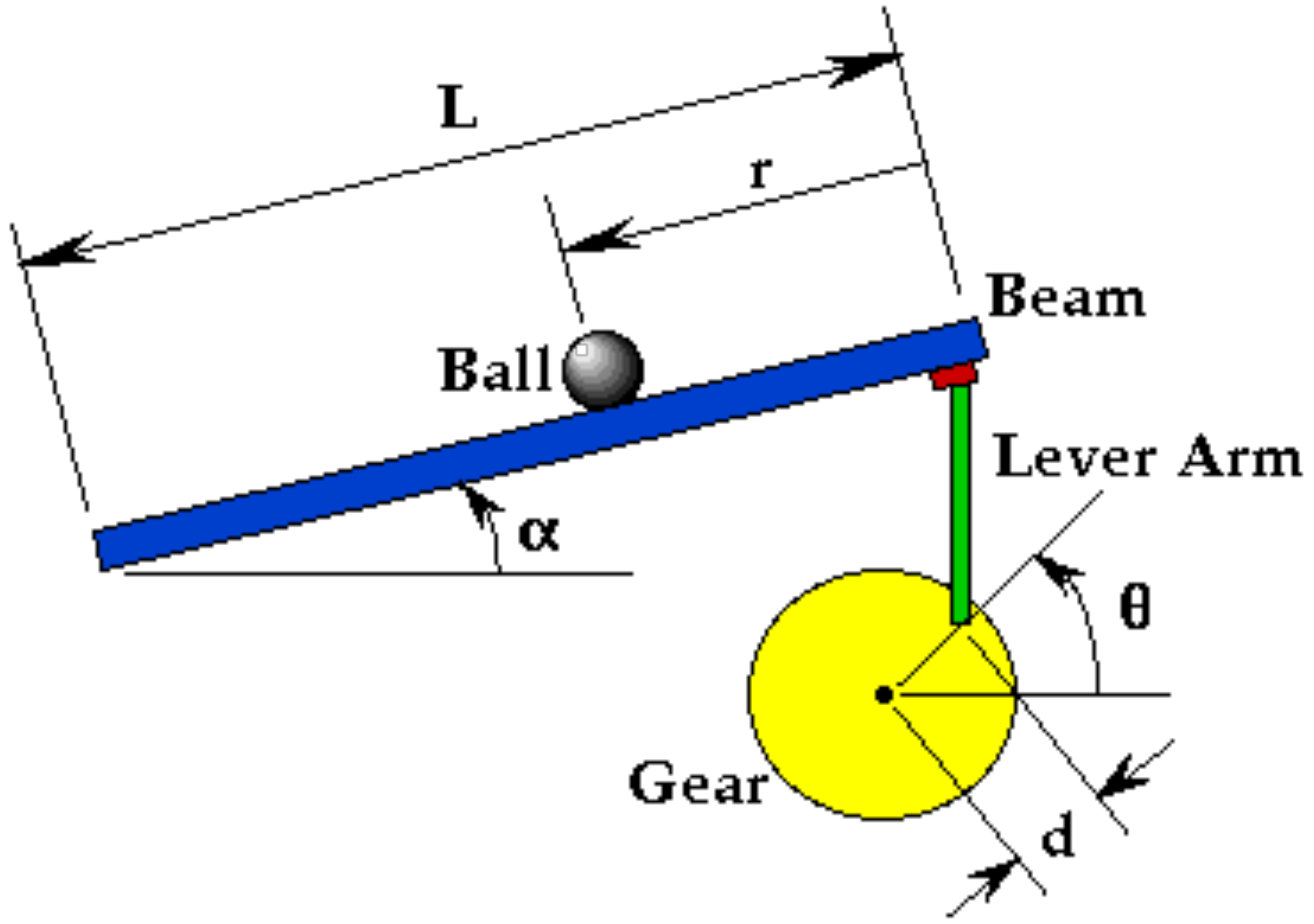
- *note que o "sinal" $Q_e(t)$ se comporta como um degrau de amplitude = 0,005 (m^3/s).*







MODELAGEM 4) SISTEMA BARRA E BOLA

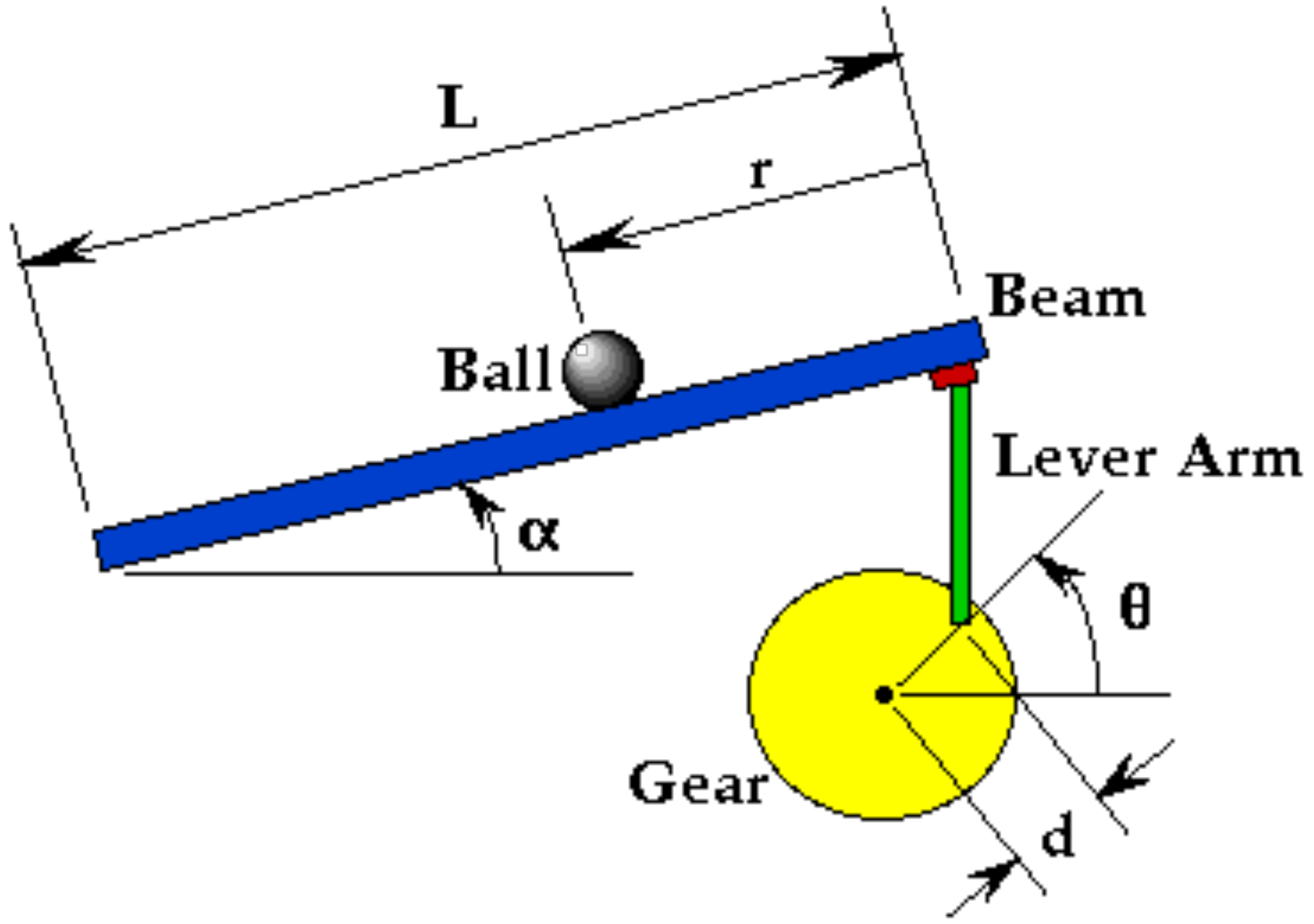


- **O Problema:**
  Uma bola é colocada em uma barra, onde ela pode rolar com 1 grau de liberdade ao longo da mesma. Um braço de alavanca é preso à viga em uma extremidade e uma engrenagem de servo na outra. À medida que a engrenagem do servo gira em um ângulo θ, a alavanca altera o ângulo α da barra. Quando o ângulo é alterado da posição horizontal, a gravidade faz com que a bola role ao longo da barra. Um controlador será projetado para este sistema para que a posição da bola possa ser manipulada. Requisitos de controle:
  - tempo de ajuste $\leq$ 3 segundos;
  - overshoot $\leq$ 5%.

- **Parâmetros do sistema:**

M = massa da bola,	0,111	Kg;
R = raio da bola,	0,015	m;
d = deslocamento do braço da alavanca,	0,03	m;
g = aceleração gravidade,	-9,8	m/s^2;
L = comprimento da barra,	1,0	m;
J = momento inércia bola,	$9{,}99 \times 10^{-6}$	kgm^2;
r = posição da bola;		
α = ângulo da barra;		
θ = ângulo engrenagem servo.		

MODELAGEM 4) SISTEMA BARRA E BOLA

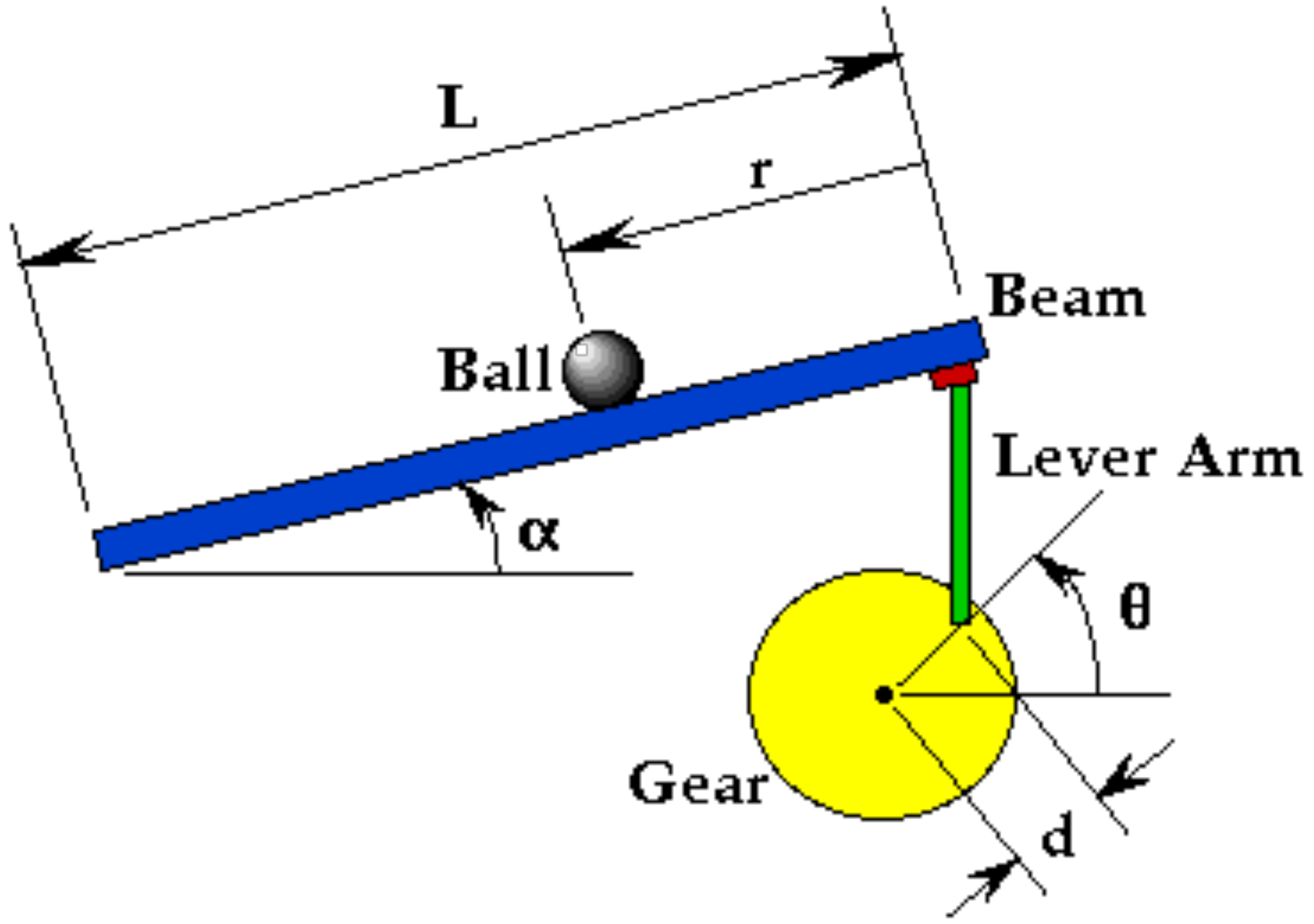


- **Equações do sistema:**
  Para este problema, vamos supor que a bola rola sem deslizar e o atrito entre a barra e a bola é desprezível.
  A equação Lagrangiana para o movimento da bola é dada por:
  $$0 = \left(\frac{J}{R^2} + m\right)\ddot{r} + mg\sin(\alpha) - mr\dot{\alpha}^2$$
  A linearização desta equação com respeito ao ângulo da bola ($\alpha = 0$), resulta em:
  $$\left(\frac{J}{R^2} + m\right)\ddot{r} = -mg\alpha$$
  A equação que associa o ângulo da barra com o ângulo da engrenagem do servo também pode ser aproximada por uma equação linear:
  $$\alpha = \frac{d}{L}\theta$$
  Substituindo na eq. anterior, teremos:
  $$\left(\frac{J}{R^2} + m\right)\ddot{r} = -mg\frac{d}{L}\theta$$

- **Parâmetros do sistema:**

M = massa da bola,	0,111	Kg;
R = raio da bola,	0,015	m;
d = deslocamento do braço da alavanca,	0,03	m;
g = aceleração gravidade,	-9,8	m/s^2;
L = comprimento da barra,	1,0	m;
J = momento inércia bola,	9,99x10^{-6}	kgm^2;
r = posição da bola;		
α = ângulo da barra;		
θ = ângulo engrenagem servo.		

MODELAGEM 4) SISTEMA BARRA E BOLA



➤ **Equações do sistema:**

$$\left(\frac{J}{R^2}+m\right)\ddot{r}=-mg\frac{d}{L}\theta$$

➤ **Função transferência:**

A transformada de Laplace da eq. anterior, leva à:

$$\left(\frac{J}{R^2}+m\right)R(s)s^2=-\frac{mgd}{L}\Theta(s)$$

Rearranjando o termos para obter posição da bola, $r(t)$ x ângulo da engrenagem, $\theta(t)$, obtemos:

$$\frac{R(s)}{\Theta(s)}=-\frac{mgd}{L\left(\frac{J}{R^2}+m\right)}\cdot\frac{1}{s^2}$$

Note que a esta função transferência embute um duplo integrador. Por conta disto, este sistema é marginalmente estável e se constitui num desafio de controle.

Substituindo-se valores, obtemos:

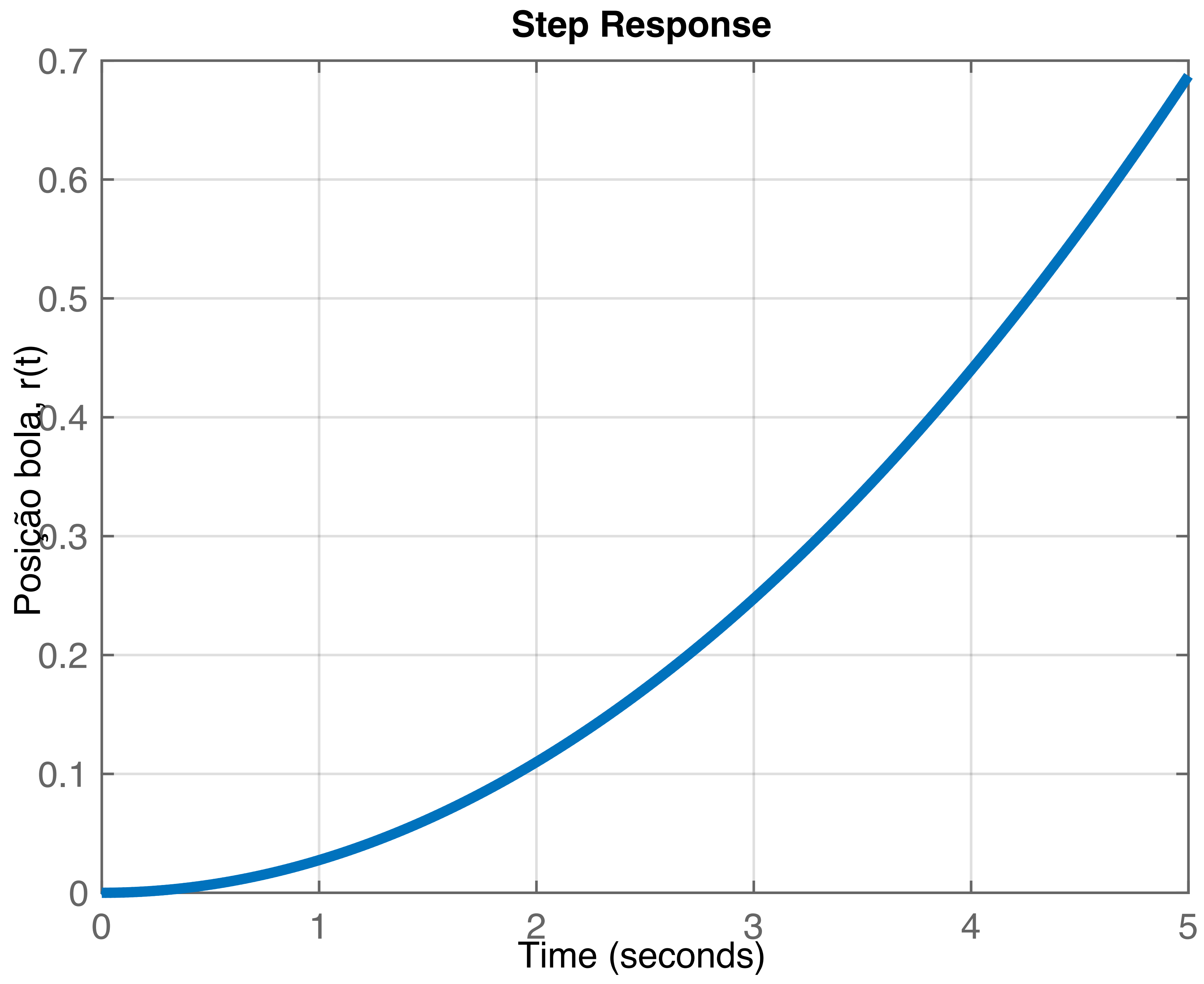
$$\frac{R(s)}{\Theta(s)}=\frac{0{,}21}{s^2}$$

➤ Simulando uma entrada degrau de 15^o, obtemos o resultado mostrado na figura ao lado.

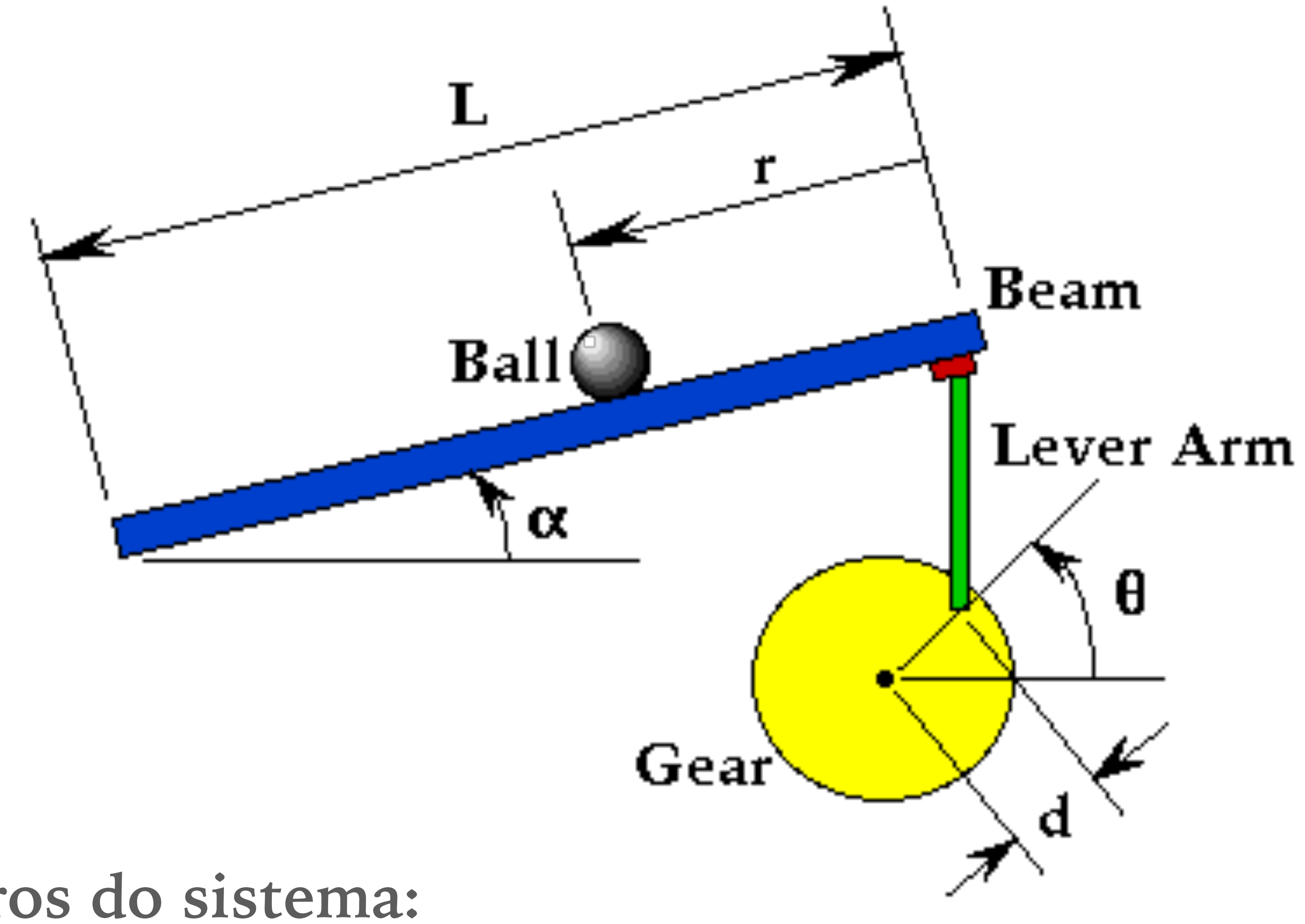
```
>> theta_final=15*pi/180
theta_final =
       0.2618
>> step(theta_final*G)
```

➤ **Parâmetros do sistema:**

M = massa da bola, 0,111 Kg;
R = raio da bola, 0,015 m;
m;
m/s²;
m;
kgm²;

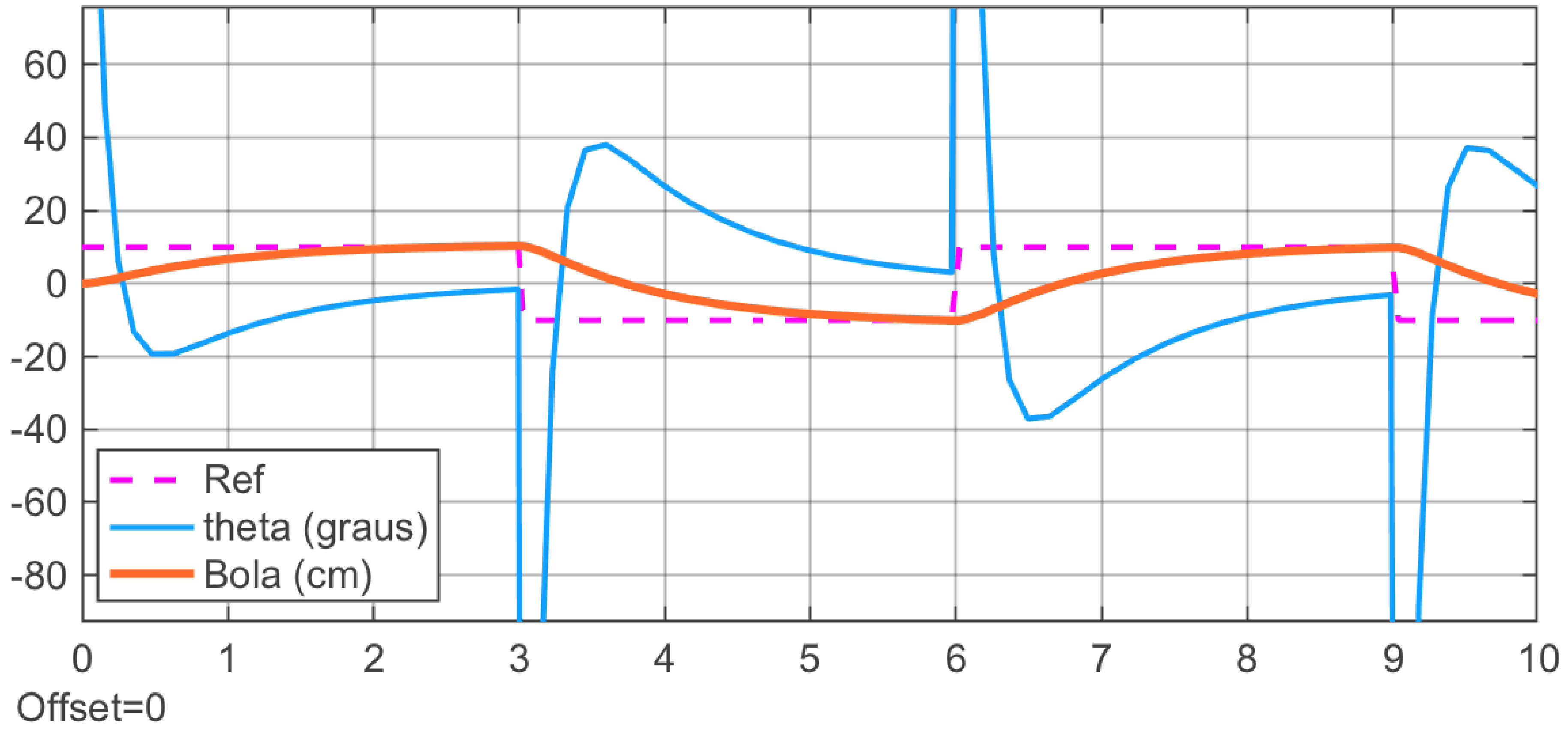


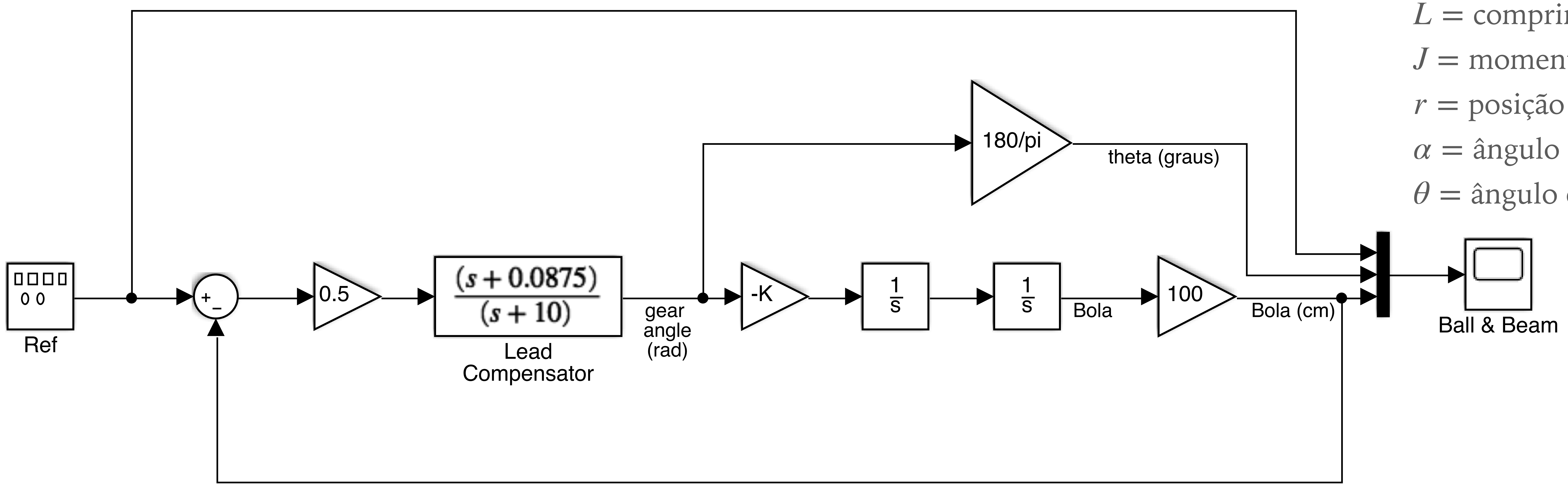
MODELAGEM 4) SISTEMA BARRA E BOLA



➤ **Exemplo de Simulação no Simulink:**

Planta: $\dfrac{R(s)}{\Theta(s)} = \dfrac{0{,}21}{s^2}$





➤ **Parâmetros do sistema:**

M = massa da bola,	0,111	Kg;
R = raio da bola,	0,015	m;
d = deslocamento do braço da alavanca,	0,03	m;
g = aceleração gravidade,	-9,8	m/s^2;
L = comprimento da barra,	1,0	m;
J = momento inércia bola,	$9{,}99 \times 10^{-6}$	kgm^2;
r = posição da bola;		
α = ângulo da barra;		
θ = ângulo engrenagem servo.		

MODELAGEM DE SISTEMAS ELÉTRICOS

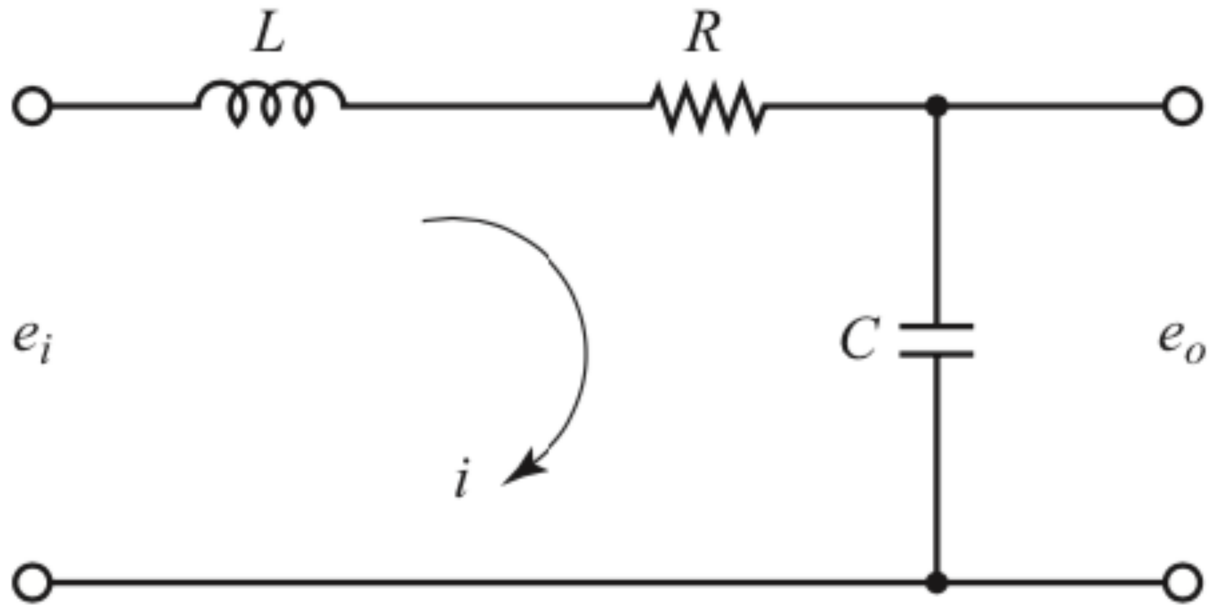
Assim como as leis de Newton para sistemas mecânicos, as leis de circuitos de Kirchoff são ferramentas analíticas fundamentais para a modelagem de sistemas elétricos. A **lei dos nós (corrente) de Kirchoff (KCL)** afirma que a soma das correntes elétricas que entram em um nó em um circuito deve ser igual à soma das correntes elétricas que saem do nó. A **lei das malhas (tensão) de Kirchoff (KVL)** afirma que a soma das diferenças de tensão em torno de qualquer circuito fechado em um circuito é zero. Ao aplicar KVL, as tensões da fonte são normalmente consideradas positivas e as tensões de carga são consideradas negativas.

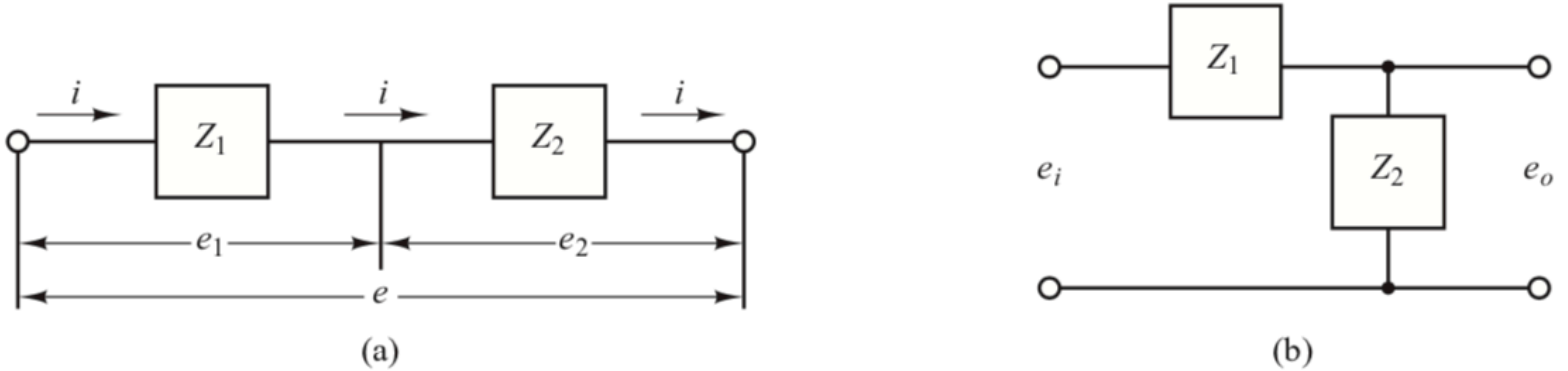
TABLE 2.3 Voltage-current, voltage-charge, and impedance relationships for capacitors, resistors, and inductors

Component	Voltage-current	Current-voltage	Voltage-charge	Impedance $Z(s) = V(s)/I(s)$	Admittance $Y(s) = I(s)/V(s)$
Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
Inductor	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $v(t)$ – V (volts), $i(t)$ – A (amps), $q(t)$ – Q (coulombs), C – F (farads), R – Ω (ohms), G – Ω (mhos), L – H (henries).

MODELANDO IMPEDÂNCIAS COMPLEXAS





Component	Voltage-current	Current-voltage	Voltage-charge	Impedance $Z(s) = V(s)/I(s)$
Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$
Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R
Inductor	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls

- Neste caso:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

- No caso da figura ao lado, obteremos:

$$Z_1 = Ls + R \quad \text{e} \quad Z_2 = \frac{1}{Cs}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

[Ogata, Cap 3, pag 66 ~ 77]

MODELANDO IMPEDÂNCIAS COMPLEXAS (2)

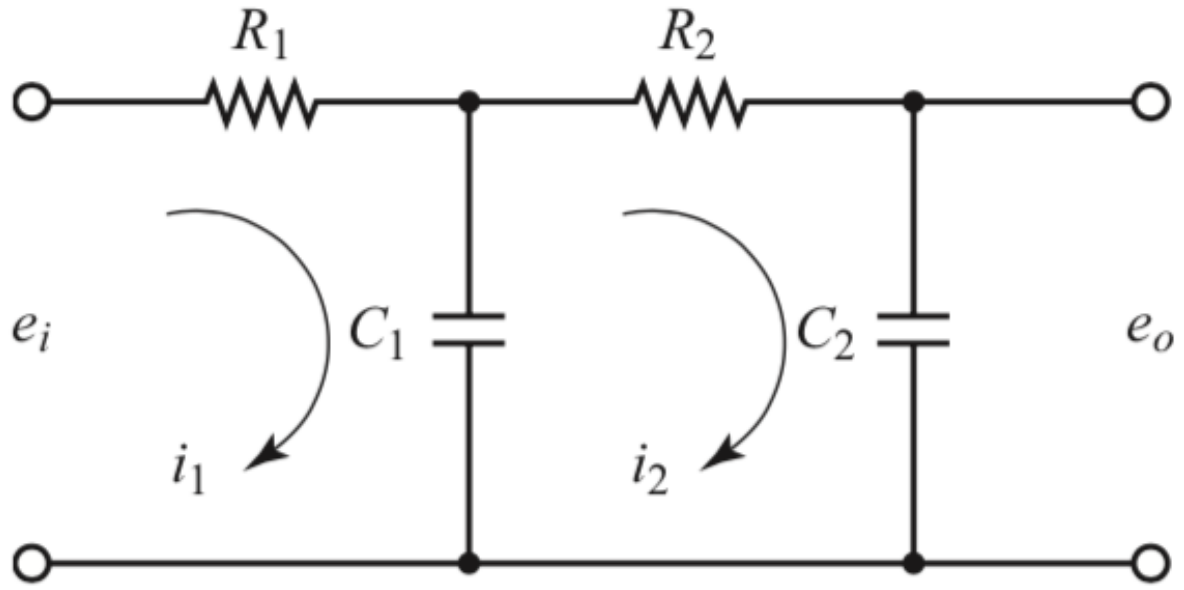
- Considere a 1a-figura.
- Os capacitares C1 e C2 não estão carregados.
- Novo desenho: figuras (a) e (b)
- A corrente I se divide em I_1 e I_2:
  $I = I_1 + I_2 \qquad (1)$
- Usando lei das malhas (quedas de tensão):
  $Z_2 I_1 = (Z_3 + Z_4) I_2 \, (2)$
- Podemos ainda relacionar:

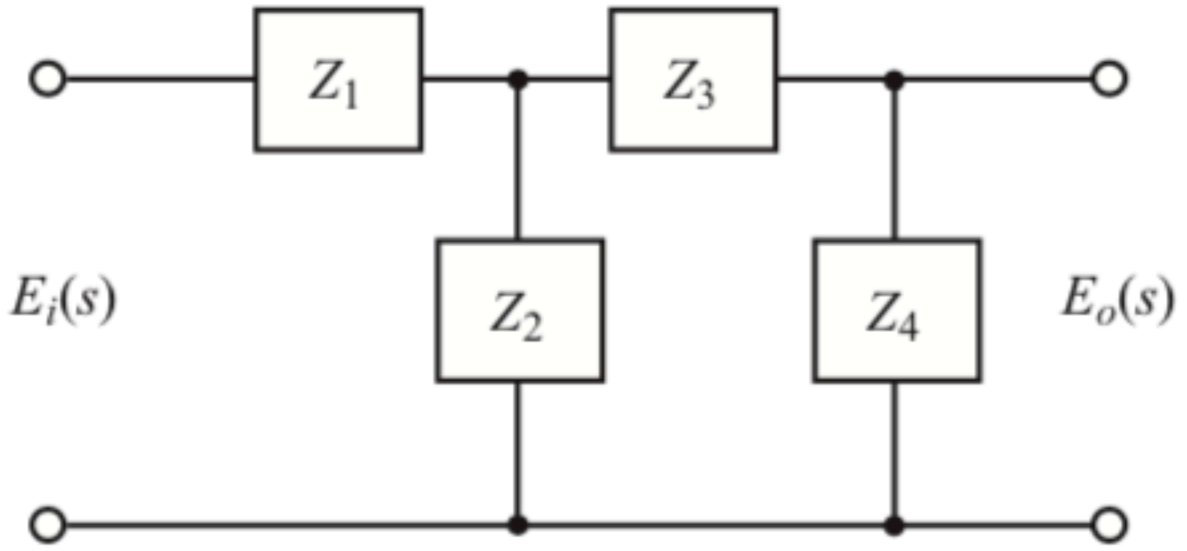
$$I_1 = \left(\frac{Z_3 + Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \right) I$$

$$I_2 = \left(\frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \right) I$$

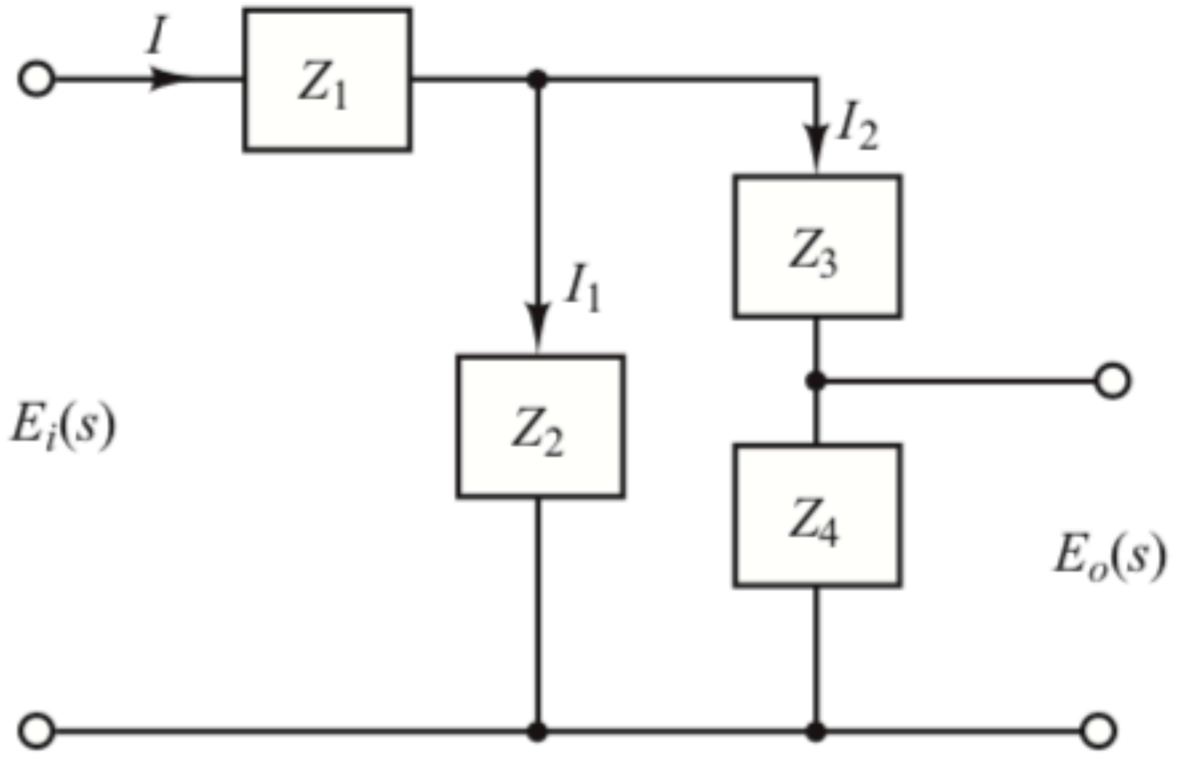
$$E_i(s) = Z_1 I + Z_2 I = \left[Z_1 + \frac{Z_2(Z_3 + Z_4)}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \right] I$$

$$E_o(s) = Z_4 I_2 = \left(\frac{Z_2 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \right) I$$





(a)



(b)

- Finalmente:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)}$$

- $Z_1 = R_1;\ Z_2 = 1/(C_1 s);$
  $Z_3 = R_2;\ Z_4 = 1/(C_2 s)$

- $$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{C_1 s}\frac{1}{C_2 s}}{R_1\left(\frac{1}{C_1 s} + R_2 + \frac{1}{C_2 s}\right) + \frac{1}{C_1 s}\left(R_2 + \frac{1}{C_2 s}\right)}$$

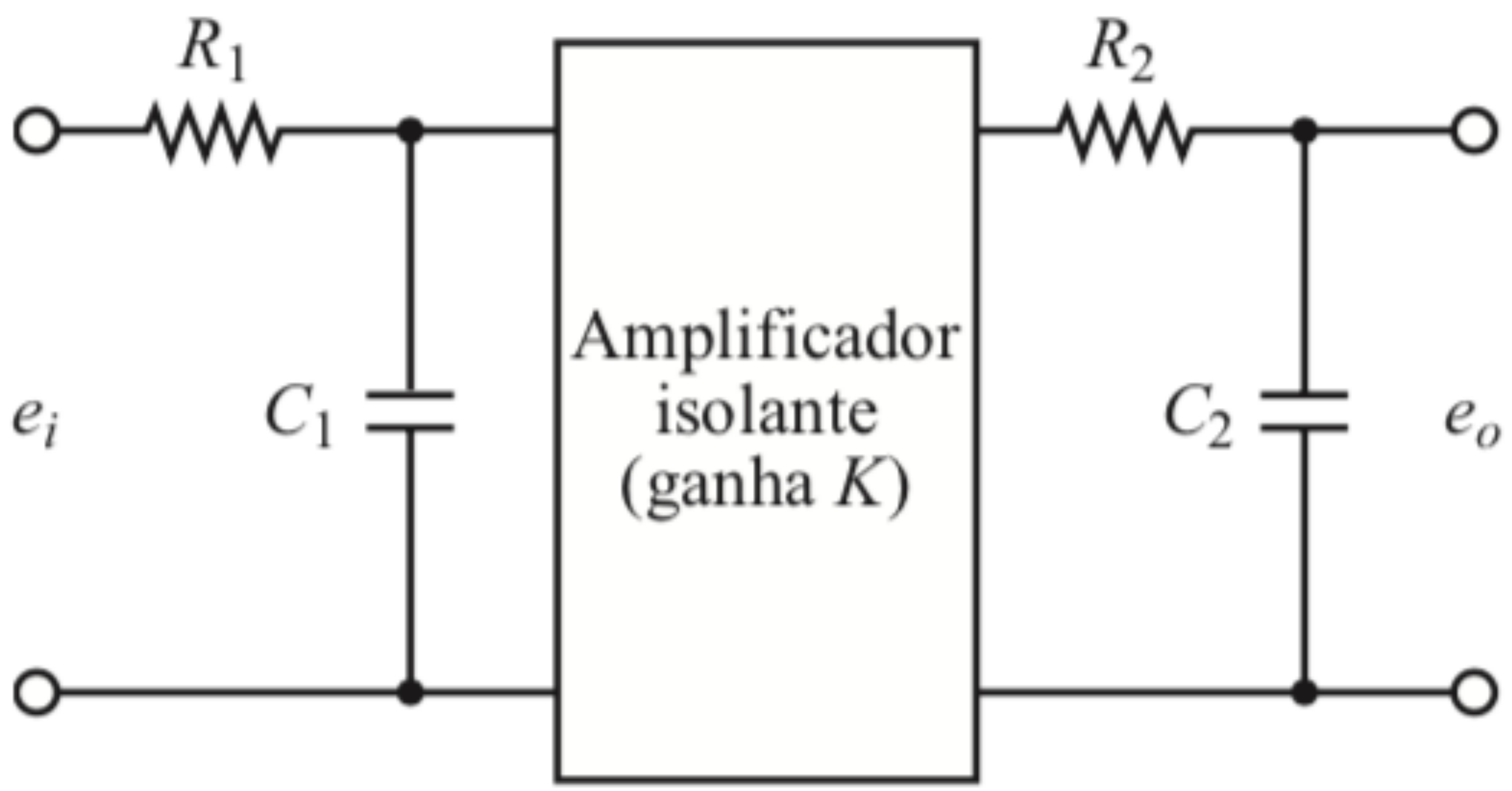
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$

MODELANDO ELEMENTOS EM CASCATA

- Considere a figura ao lado.
- Um circuito não afeta o outro (pelo amplificador de isolamento). Como a entrada do amplificador de isolamento é de impedância muito elevada, quando o mesmo é inserido entre dois circuitos, um circuito não "carrega" o outro.
- Os 2 circuitos estão em “cascata”, então:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \left(\frac{1}{R_1C_1s+1}\right)(K)\left(\frac{1}{R_2C_2s+1}\right)$$

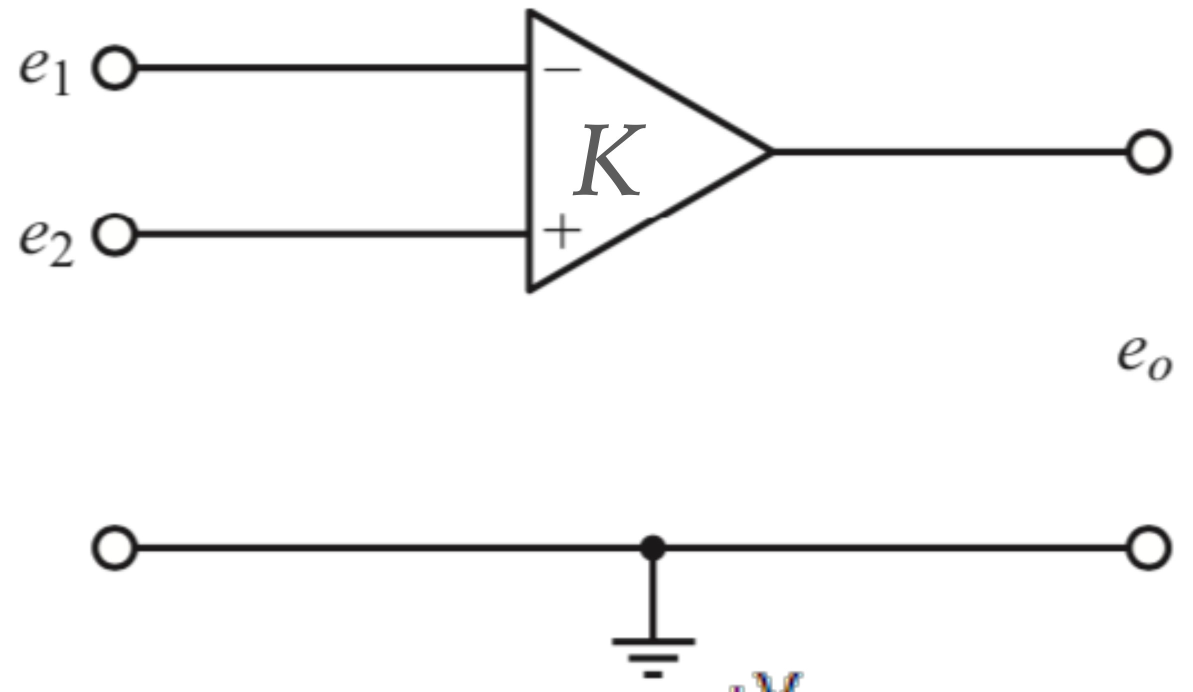
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}$$

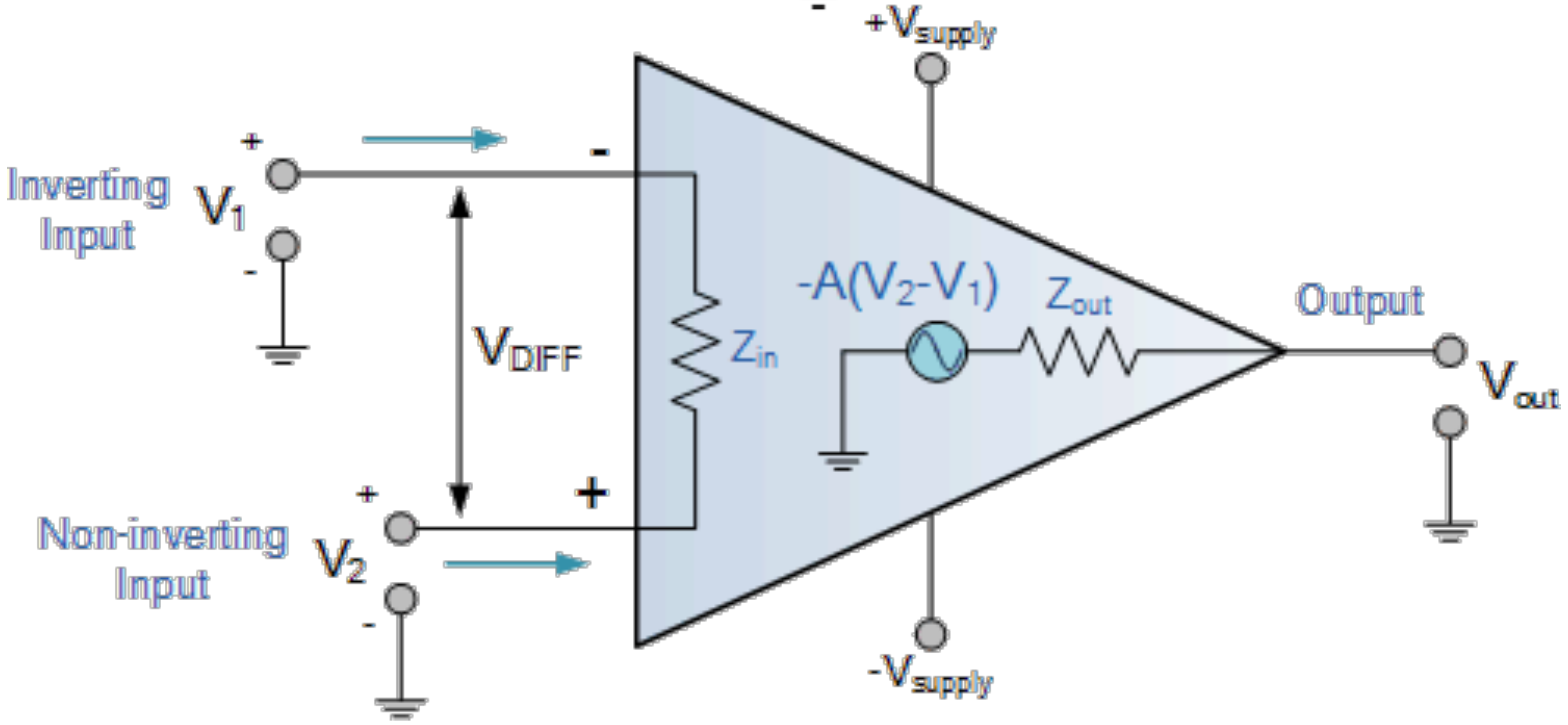


AMPLIFICADORES OPERACIONAIS

- Ganho de malha-aberta:

$$e_o = K(e_2 - e_1) = -K(e_1 - e_2)$$



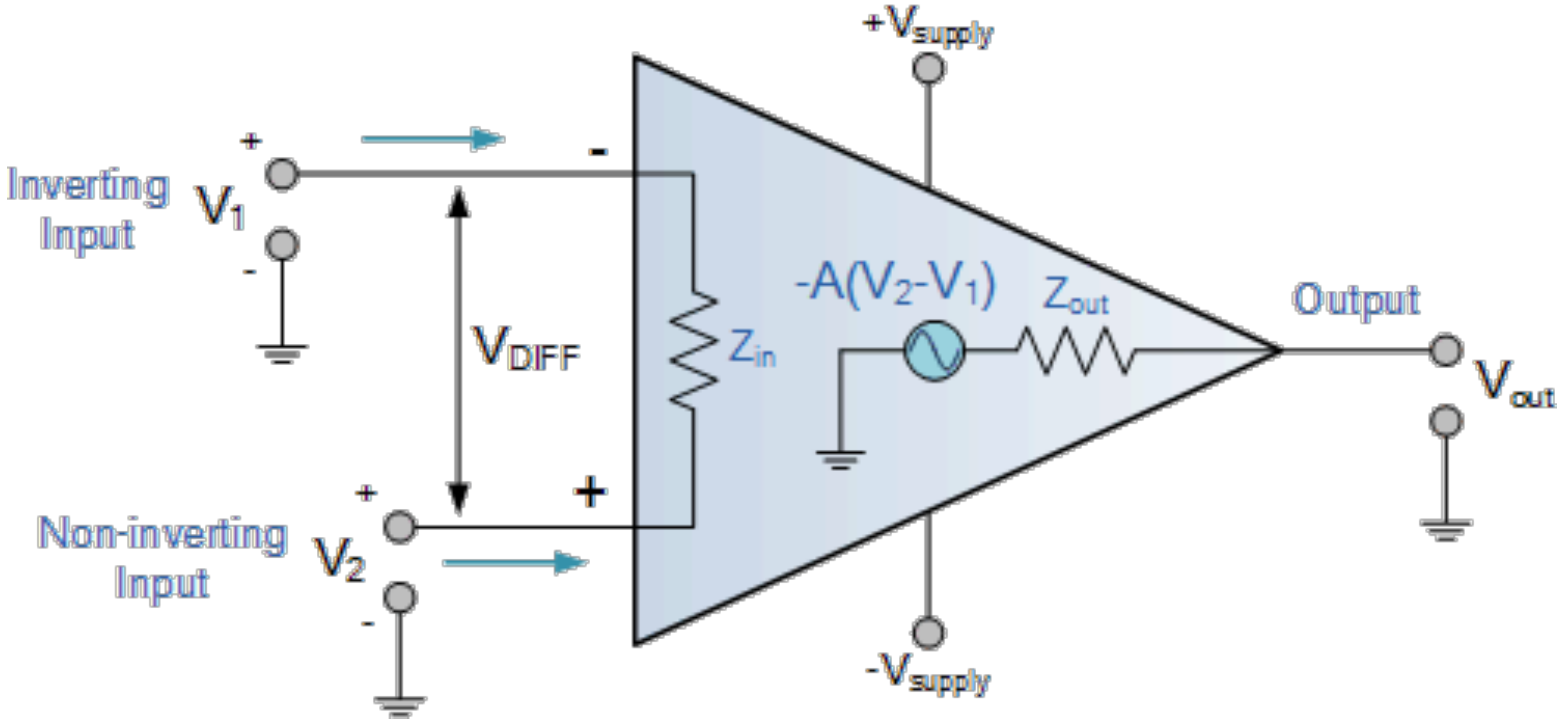


- **Ganho de malha-aberta**:
  Infinito – A principal função de um amplificador operacional é amplificar o sinal de entrada e quanto mais ganho em malha aberta ele tiver, melhor. O ganho de malha aberta é o ganho do amplificador operacional sem feedback positivo ou negativo e, para esse amplificador, o ganho será infinito, mas os valores reais típicos variam de cerca de 20.000 a 200.000.

- **Impedância de entrada**, (Z_{IN}):
  Infinita – A impedância de entrada é a razão entre a tensão de entrada e a corrente de entrada e é considerada infinita para evitar que qualquer corrente flua da fonte de alimentação para os circuitos de entrada do amplificador ($I_{IN} = 0$). Os amplificadores operacionais reais têm correntes de fuga de entrada de alguns pico-amps a alguns mili-amps.

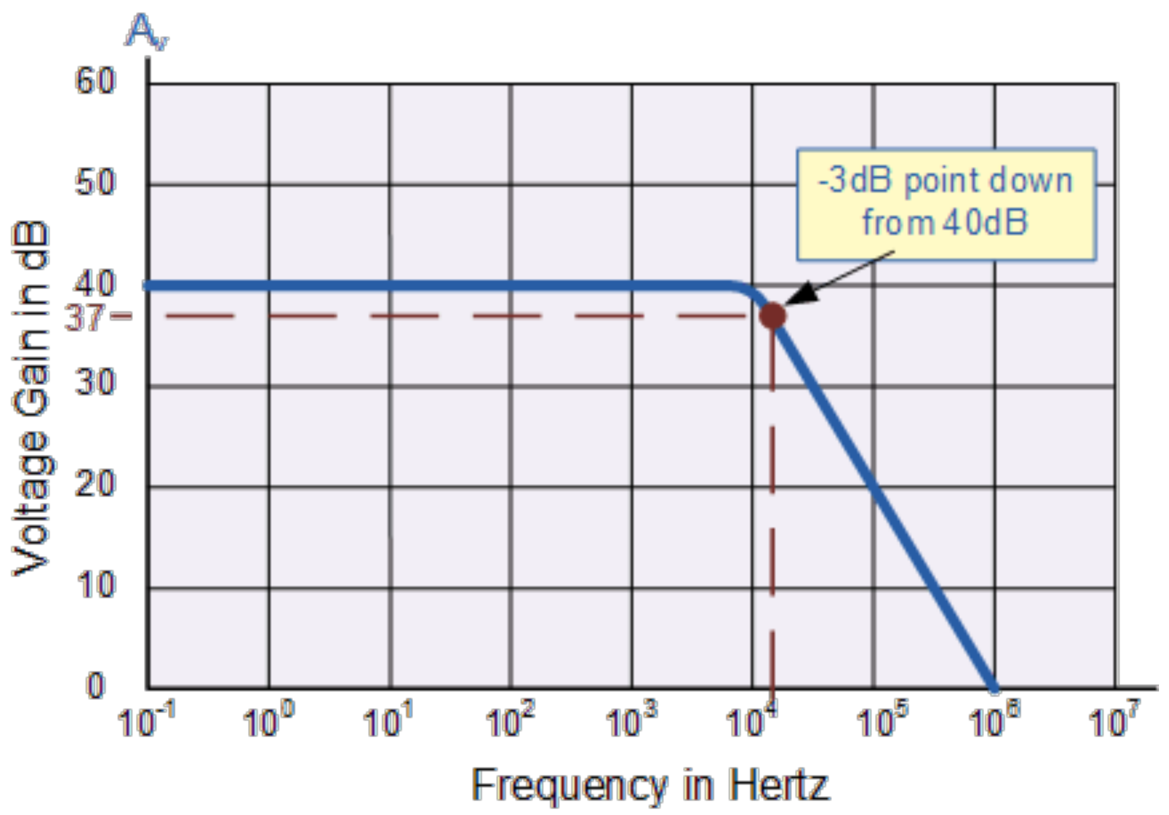
- **Impedância de saída**, (Z_{OUT}):
  Zero – A impedância de saída do amplificador operacional ideal é assumida como zero atuando como uma fonte de tensão interna perfeita sem resistência interna para que ele possa fornecer a corrente necessária para a carga. Esta resistência interna está efetivamente em série com a carga, reduzindo assim a tensão de saída disponível para a carga. Os amplificadores operacionais reais têm impedâncias de saída na faixa de 100-20kΩ.

AMPLIFICADORES OPERACIONAIS



$$A = \frac{V_{out}}{V_{in}}$$

$$A\Big|_{dB} = 20\log(A) = 20\log\frac{V_{out}}{V_{in}}$$



- **Largura de banda,** (BW):
  Infinito – Um amplificador operacional ideal tem uma resposta de frequência infinita e pode amplificar qualquer sinal de frequência de DC para as frequências AC mais altas, portanto, supõe-se que tenha uma largura de banda infinita. Com amplificadores operacionais reais, a largura de banda é limitada pelo produto Gain-Bandwidth (GBP), que é igual à frequência em que o ganho do amplificador se torna unitário.
  $\text{GBP} = \text{Ganho} \times \text{Largura de Banda} = A \times BW$
  A largura de banda dos amplificadores operacionais é a faixa de frequência na qual o ganho de tensão do amplificador está acima de **70,7%** ou **-3dB** (onde 0dB é o máximo) — ver fig. ao lado.

- **Tensão de *Offset*,** (V_{IO}):
  Zero – A saída do amplificador será zero quando a diferença de tensão entre as entradas inversora e não inversora for igual a zero, ou quando ambas as entradas estiverem aterradas. Os amplificadores operacionais reais têm uma certa quantidade de tensão de compensação de saída.

AMPLIFICADORES OPERACIONAIS (2): AMPLIFICADOR INVERSOR

- **Amplificador Inversor:**

- Equações:

$$i_1 = \frac{e_1 - e'}{R_1} \quad \text{e:} \quad i_2 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

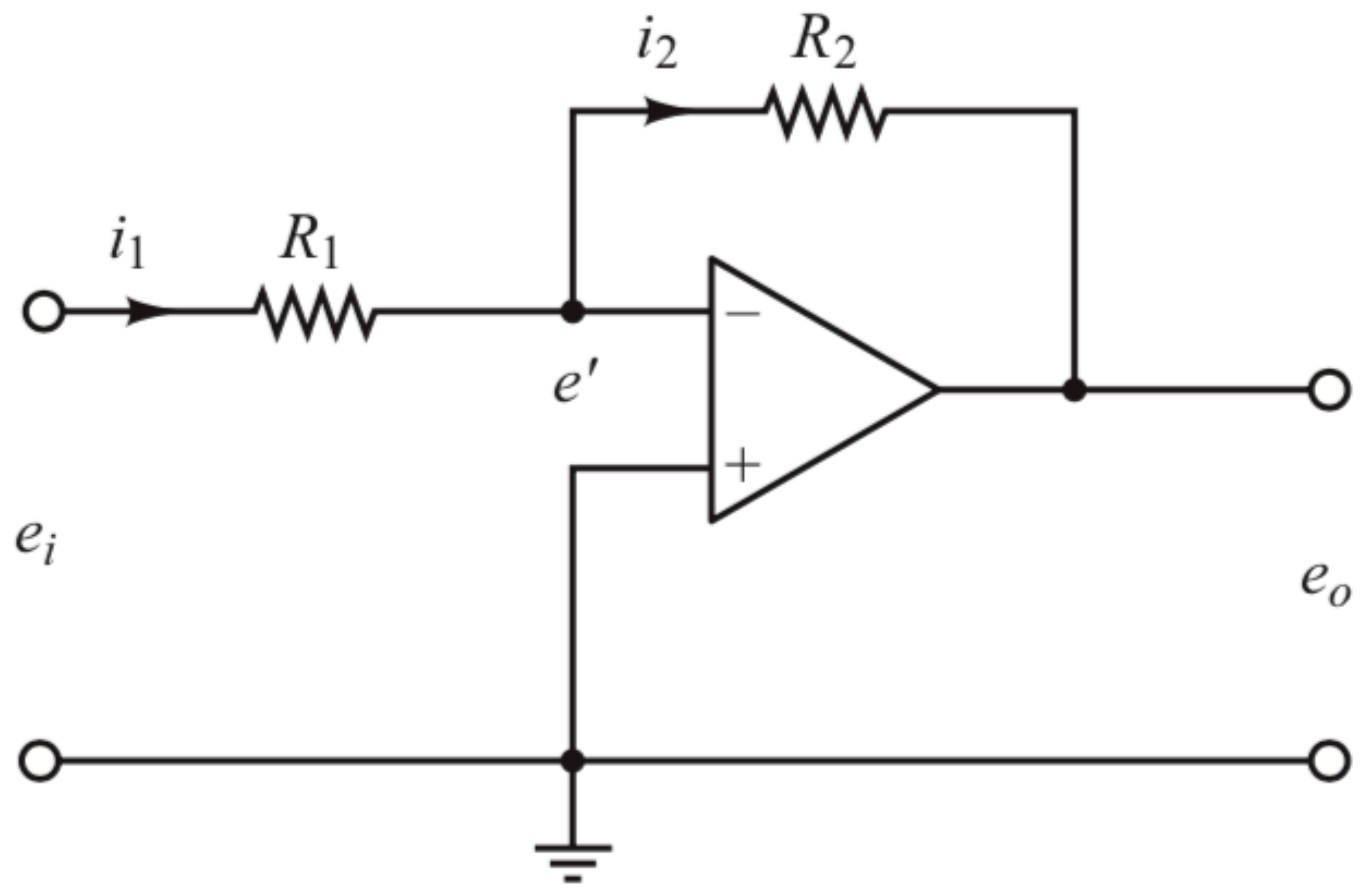
Como a corrente que flue pelo amplificador é desprezível, praticamente: $i_1 = i_2$, e então:

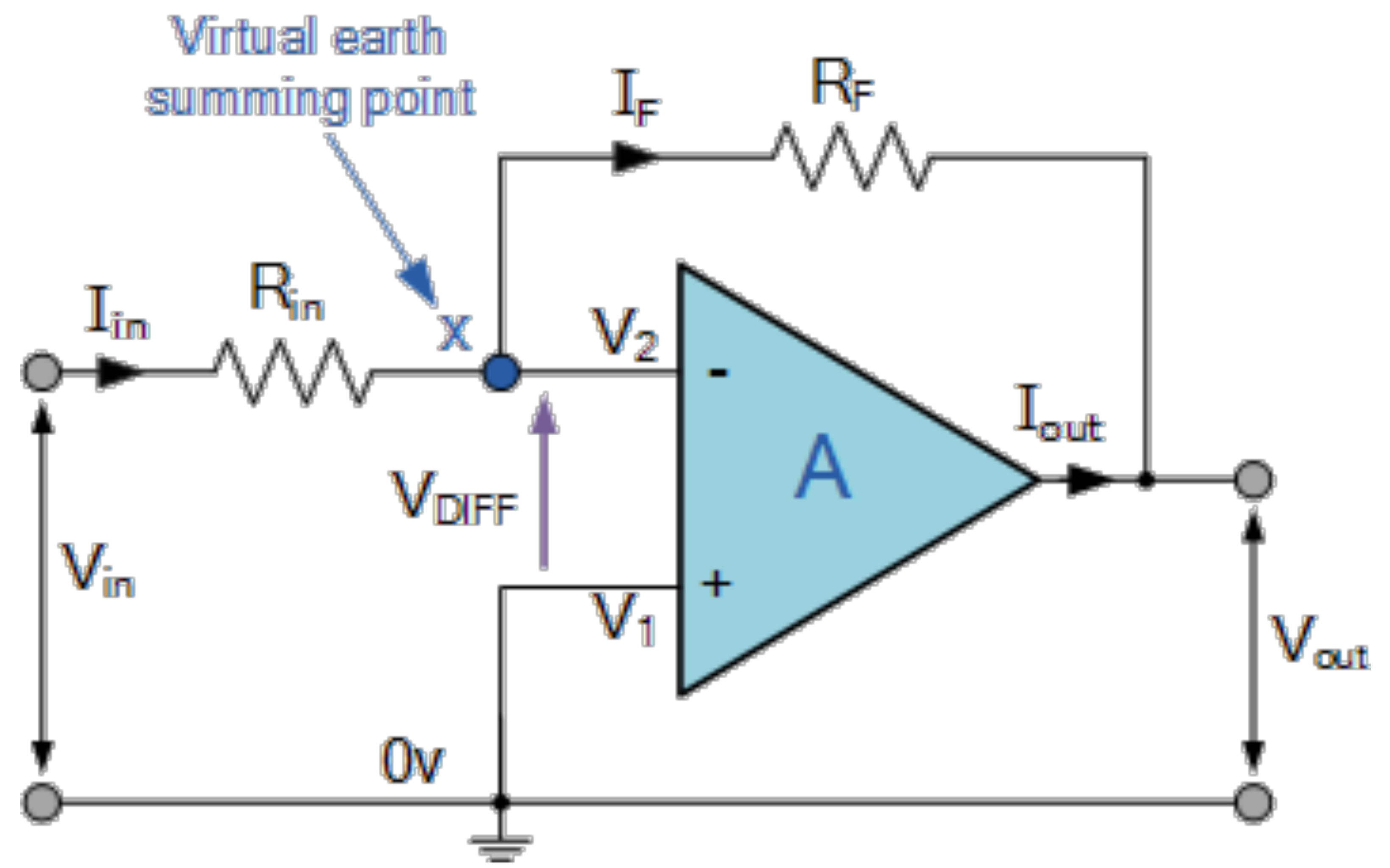
$$\frac{e_1 - e'}{R_1} = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

Como ainda: $K(0 - e') = e_o$, $K \gg 1$, e $e' \cong 0$, então:

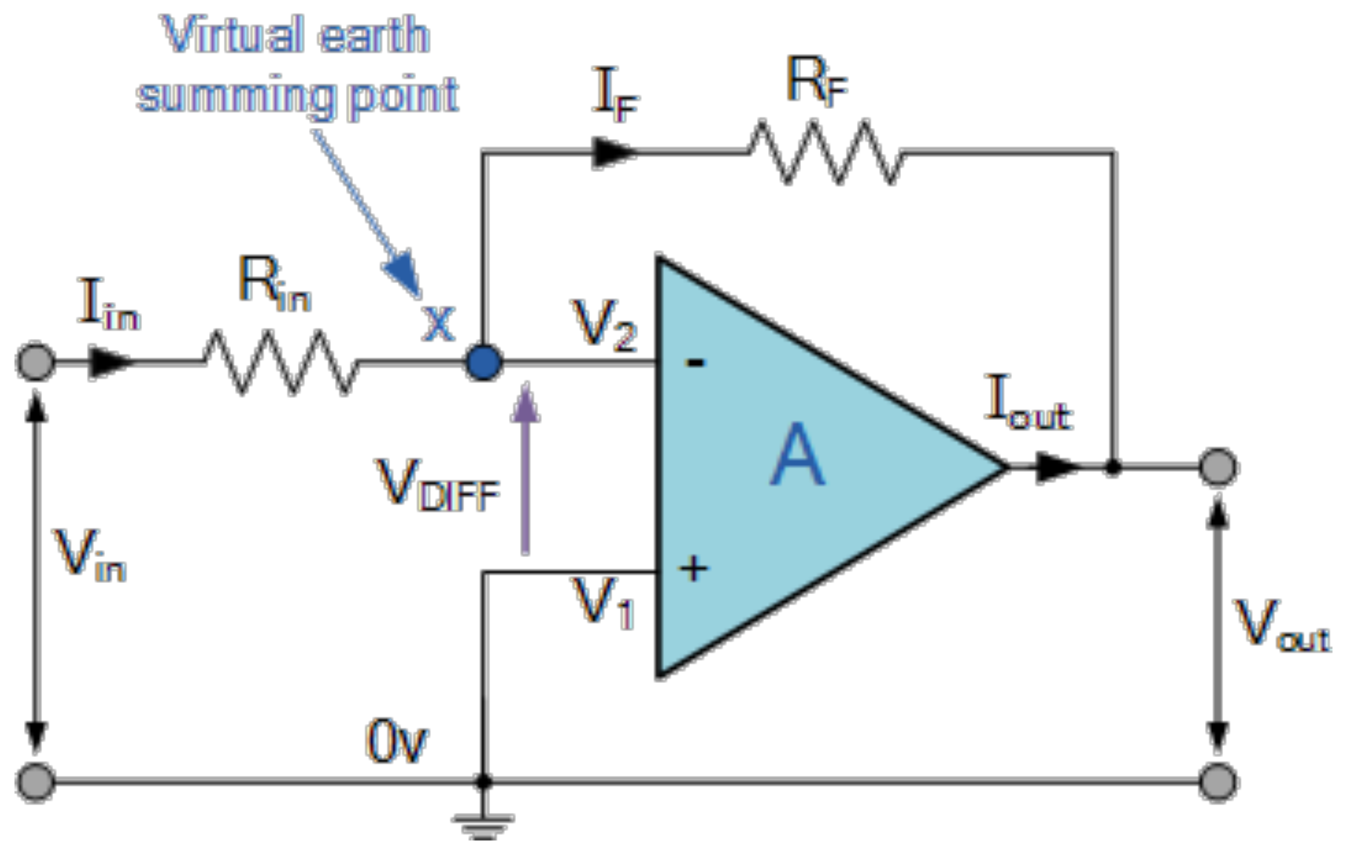
$$\frac{e_i}{R_1} = \frac{-e_o}{R_2}$$

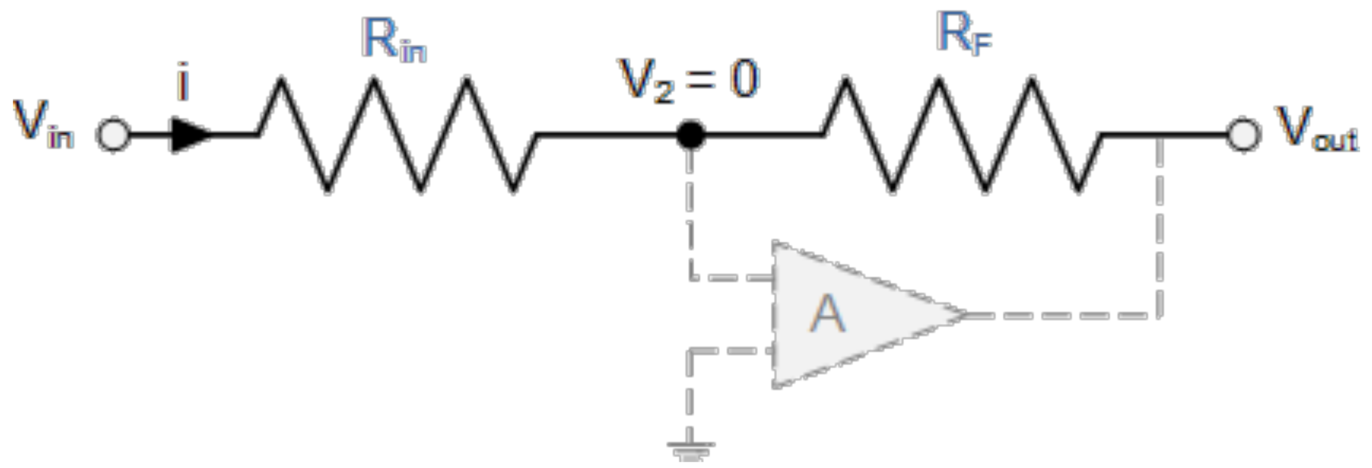
$$e_o = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right) e_i$$





AMPLIFICADORES OPERACIONAIS (2): AMPLIFICADOR INVERSOR





$$i = \frac{V_{in} - V_{out}}{R_{in} + R_f}$$

$$i = \frac{V_{in}}{R_{in}} - \frac{V_2}{R_{in}} = \frac{V_2}{R_f} - \frac{V_{out}}{R_f}$$

$$\frac{V_{in}}{R_{in}} = V_2\left(\frac{1}{R_{in}} + \frac{1}{R_f}\right) - \frac{V_{out}}{R_f}$$

Como: $i = \dfrac{V_{in} - 0}{R_{in}} = \dfrac{0 - V_{out}}{R_f} \quad \therefore \quad \dfrac{R_f}{R_{in}} = \dfrac{0 - V_{out}}{V_{in} - 0}$

- **Amplificador Inversor:**
- Neste circuito, o amplificador operacional é conectado com realimentação para produzir uma operação em malha fechada.
- Duas regras muito importantes (sobre amplificadores inversores):
  - "Nenhuma corrente flui para o terminal de entrada", e
  - "V1 sempre é igual a V2". No entanto, em circuitos de amplificador operacional do mundo real, ambas as regras são ligeiramente quebradas.
- Isso ocorre porque a junção da entrada e do sinal de feedback (ponto x) está no mesmo potencial que a entrada positiva (+) que está em zero volts ou terra então, esta junção é uma "Terra Virtual". Devido a este nó de terra virtual, a resistência de entrada do amplificador é igual ao valor do resistor de entrada, R_{in} e o ganho de malha fechada do amplificador inversor pode ser definido pela razão dos dois resistores externos:

$$\text{Ganho}(A_v) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{R_f}{R_{in}}$$

- **Amplificador Não-Inversor:**
- Equações:

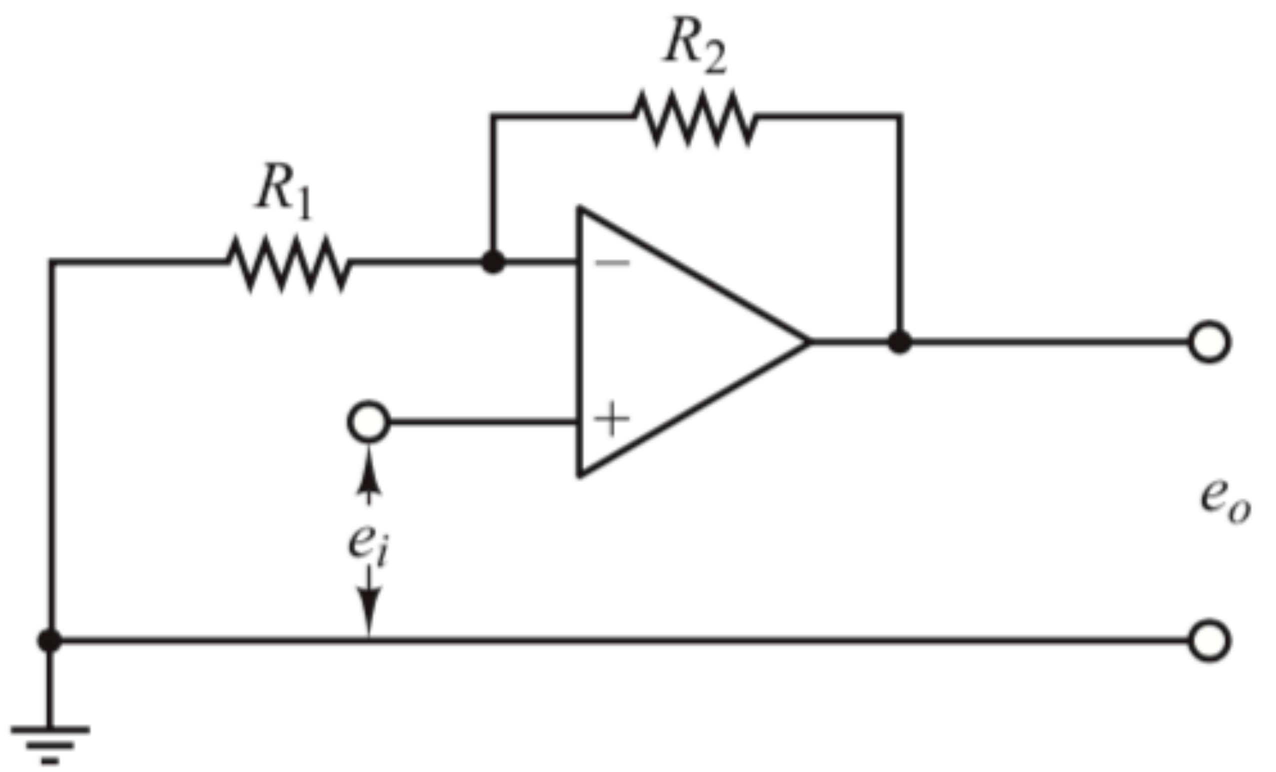
$$e_o = K\left[e_i - \left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)e_o\right]$$

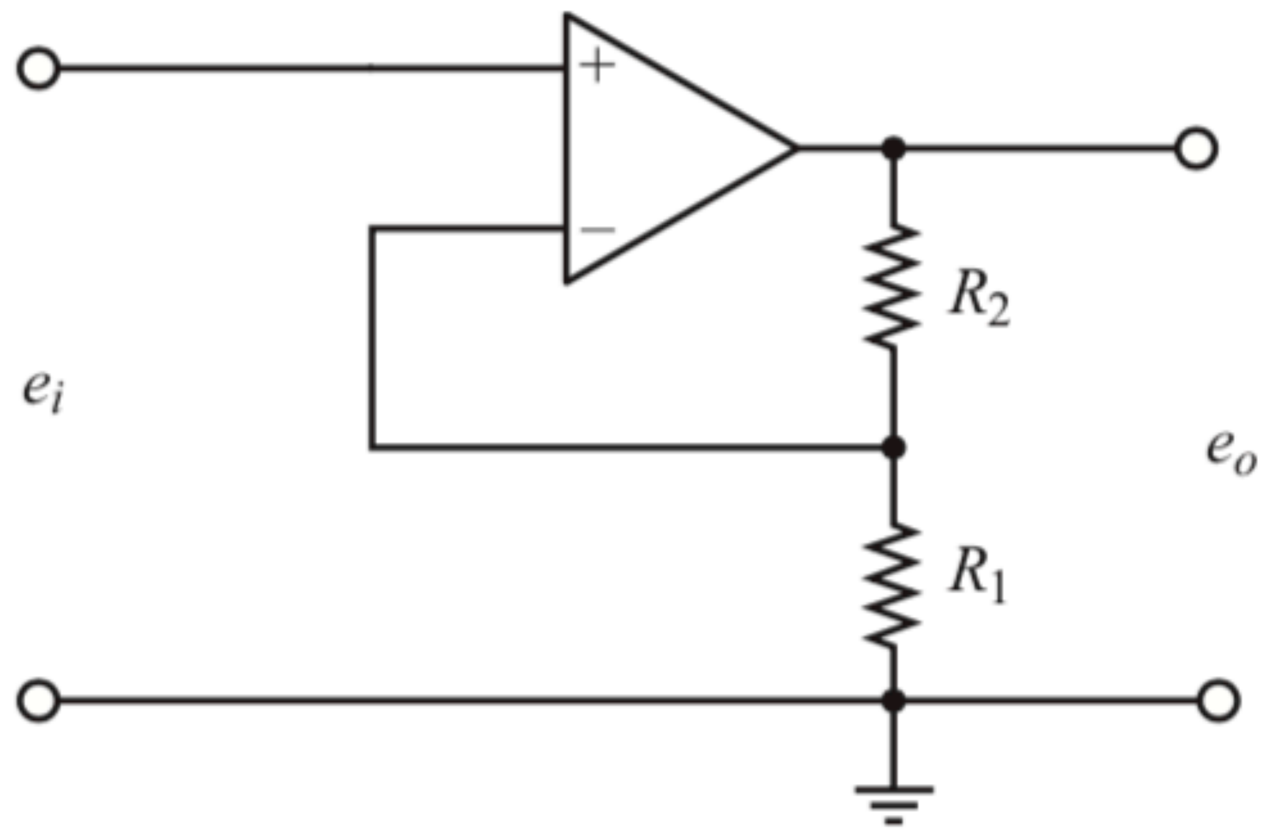
$K =$ ganho do amp.op.

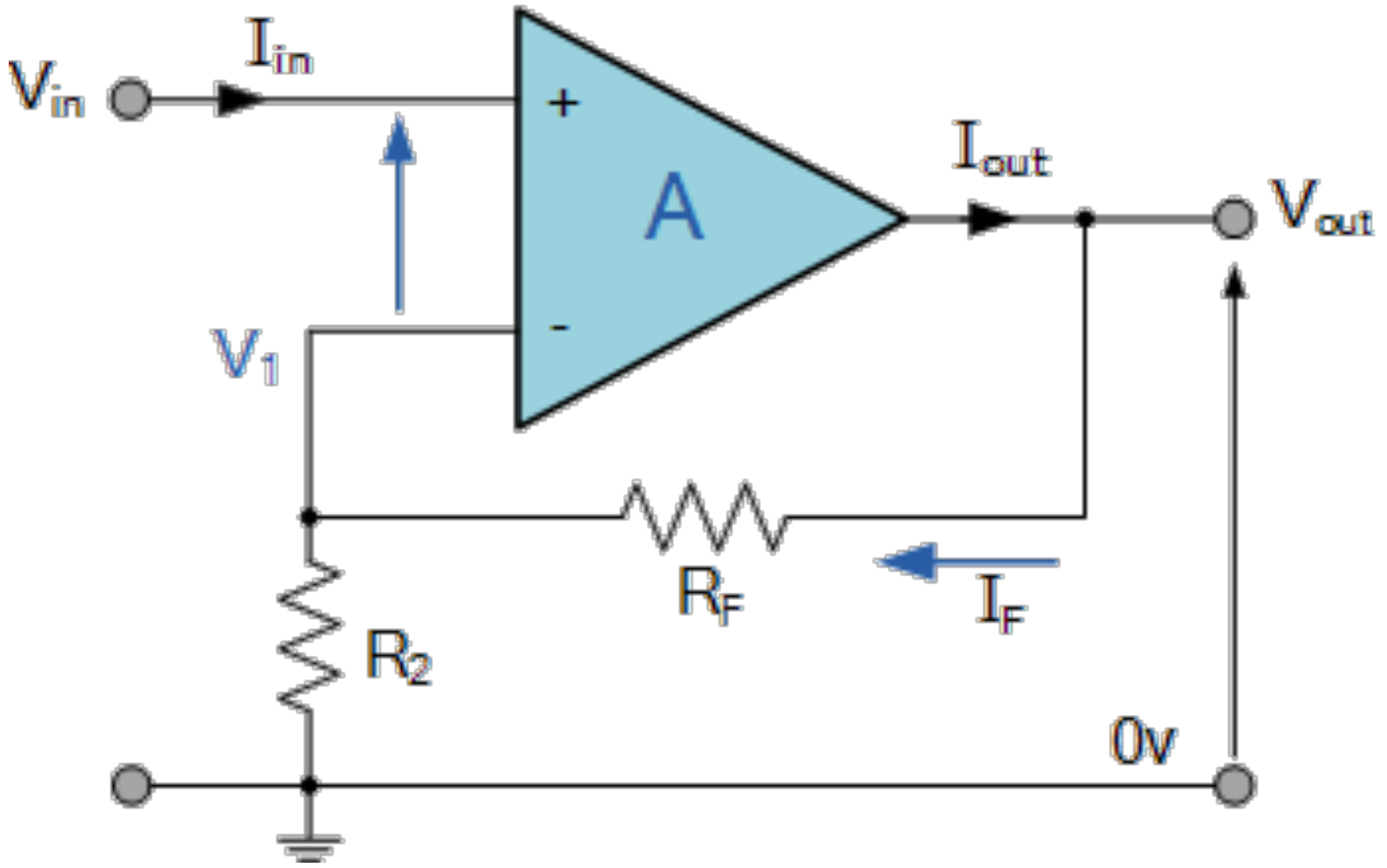
$$e_i = \left(\frac{R_1}{R_1+R_2} + \frac{1}{K}\right)e_o$$

Como: $K \gg 1$; Se $R_1/(R_1+R_2) \gg 1/K$, então:

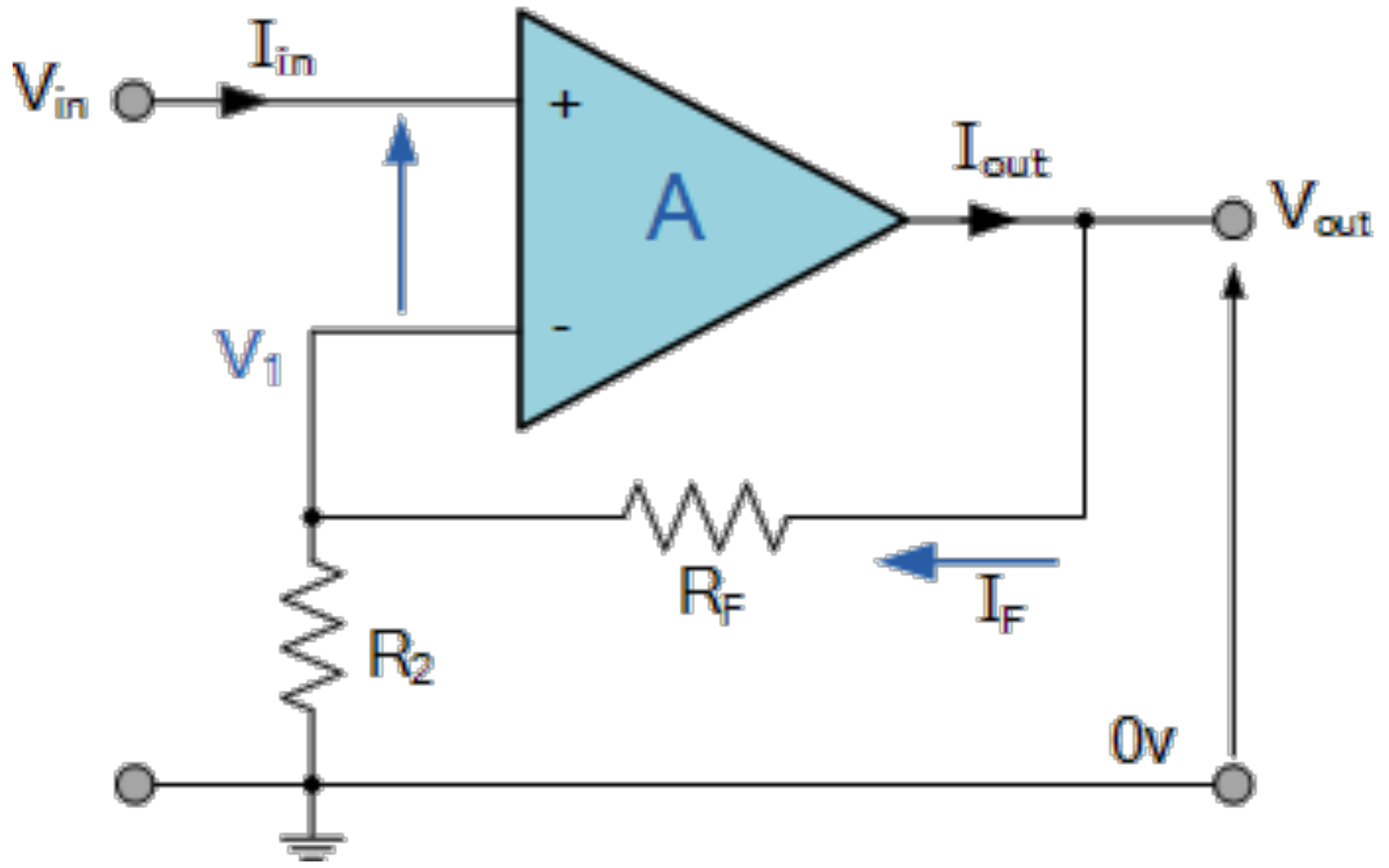
- $$e_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)e_i$$

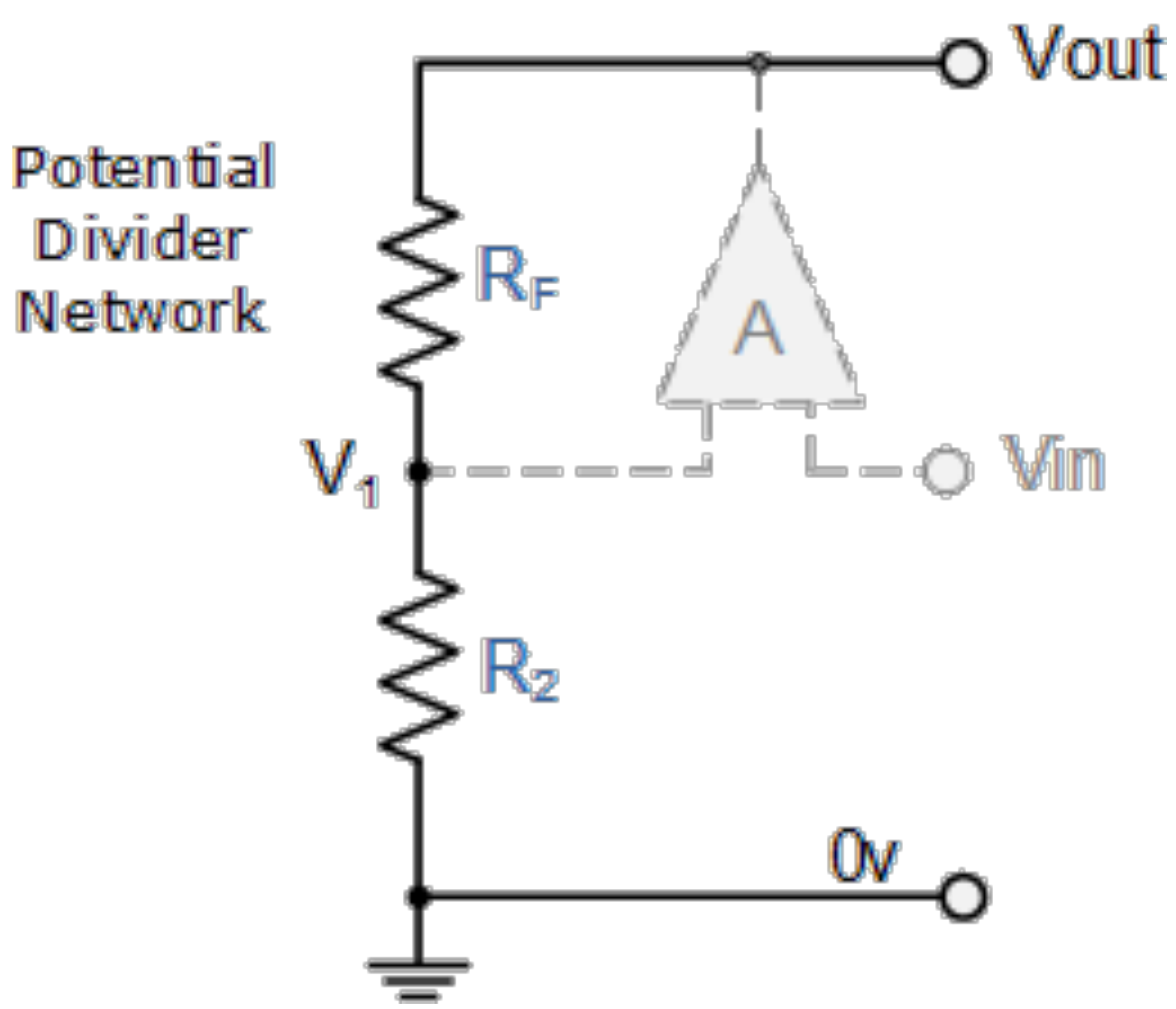






AMPLIFICADORES OPERACIONAIS (3): AMPLIFICADOR NÃO-INVERSOR





$$V_1 = \frac{R_2}{R_2 + R_f} \times V_{out}$$

Ponto de soma ideal: $V_1 = V_{in}$

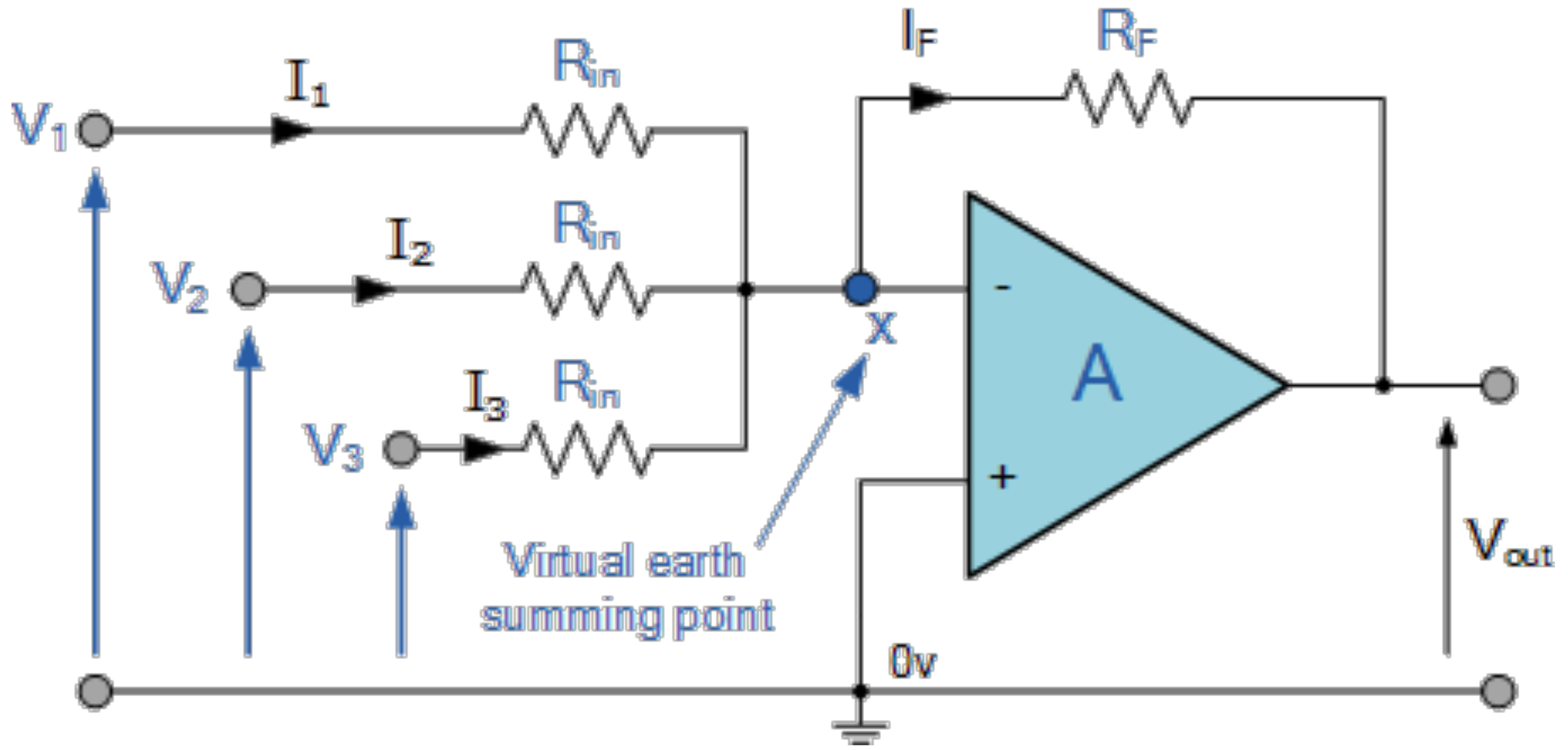
Ganho de tensão: $A_v = \dfrac{V_{out}}{V_{in}}$

Então: $A_v = \dfrac{V_{out}}{V_{in}} = \dfrac{R_2 + R_f}{R_2}$

- **Amplificador Não-Inversor:**
- Antes foi dito que para um amp-op ideal "Nenhuma corrente flui para o terminal de entrada" e que "V_1 sempre é igual aV_2" . Isso ocorreu porque a junção do sinal de entrada e do sinal de feedback (V_1) estavam no mesmo potencial.
- Em outras palavras, a junção é um ponto de soma de "terra virtual". Por causa deste nó de terra virtual, os
  resistores R_f e R_2 formam uma rede divisora de potencial simples através do amplificador não inversor com o ganho de tensão do circuito sendo determinado pelas razões de R_2 e R_f:

  Ganho, $A_v = 1 + \dfrac{R_f}{R_2}$

AMPLIFICADORES OPERACIONAIS (4): AMPLIFICADOR SOMADOR PONDERADO



$$I_F = I_1 + I_2 + I_3 = -\left(\frac{V_1}{R_{in}} + \frac{V_2}{R_{in}} + \frac{V_3}{R_{in}}\right)$$

Invertendo a eq. anterior:

$$V_{out} = -\frac{R_f}{R_{in}} \times V_{in}$$

Então: $-V_{out} = \left(\frac{R_F}{R_{in}}V_1 + \frac{R_F}{R_{in}}V_2 + \frac{R_F}{R_{in}}V_3\right)$

Se todos os R_{in} forem iguais:

$$-V_{out} = \frac{R_F}{R_{in}}\left(V_1 + V_2 + V_3 + \ldots\right)$$

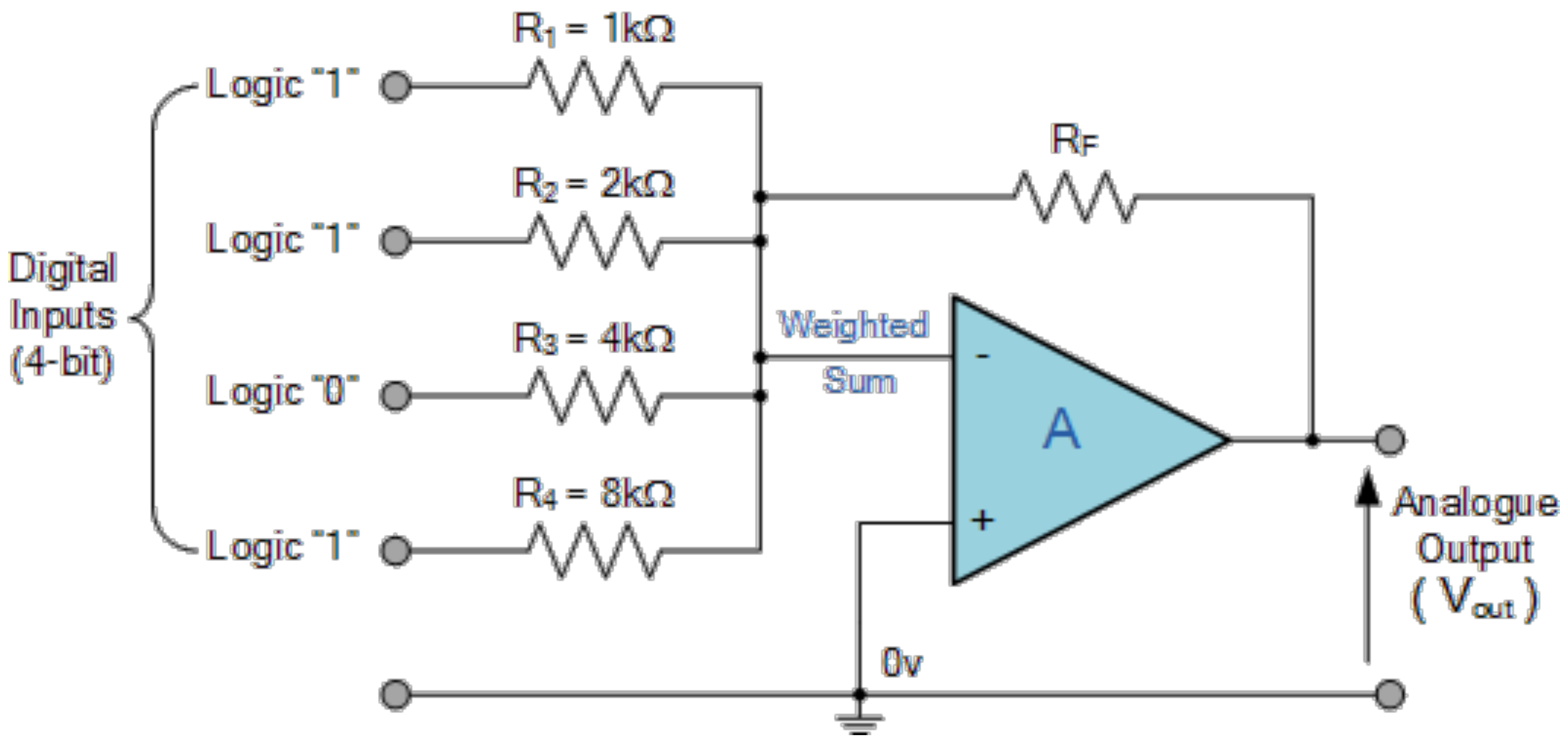
Se os R_{in} forem diferentes (amplificador somador ponderado), então teremos:

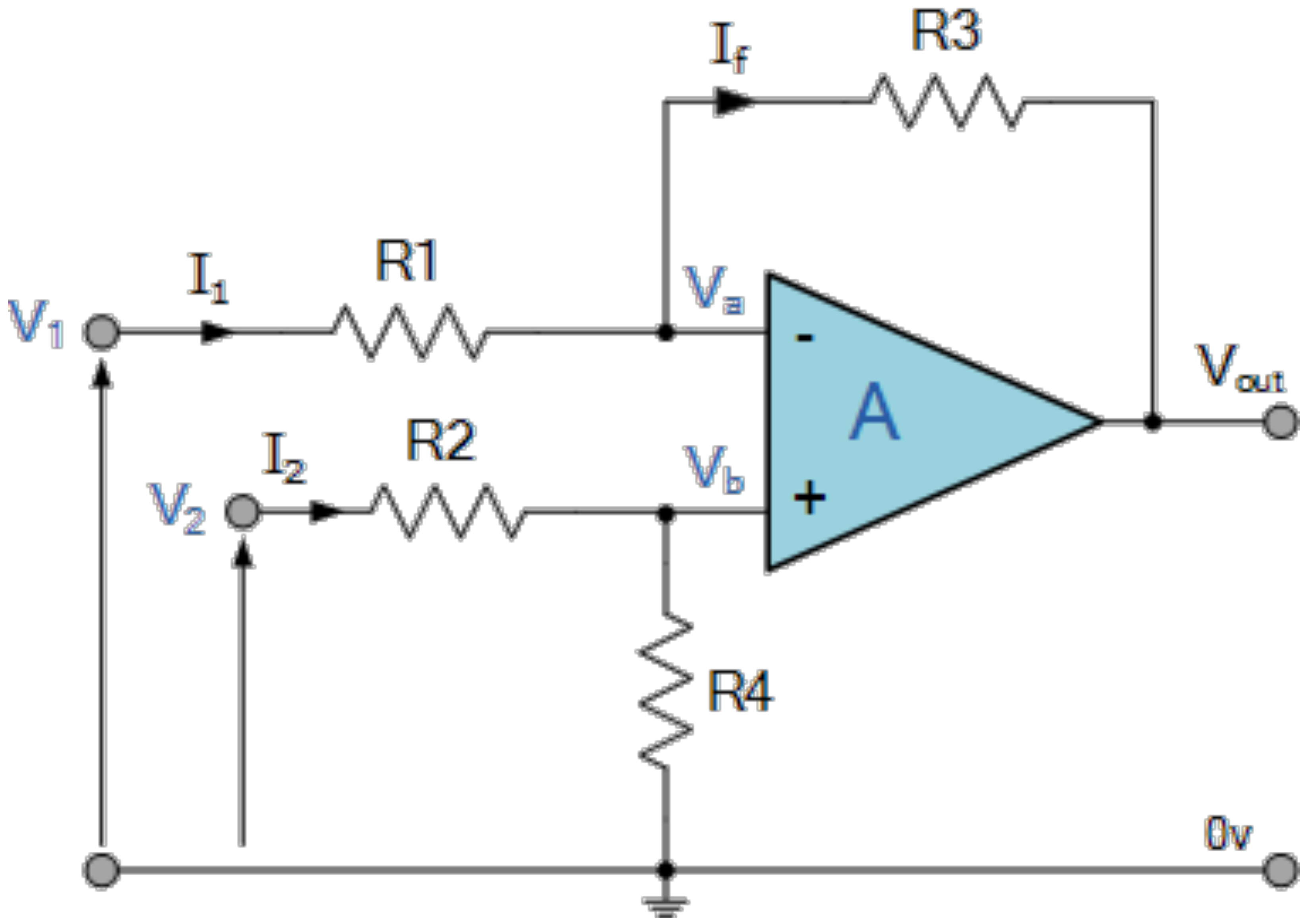
$$-V_{out} = V_1\left(\frac{R_F}{R_1}\right) + V_2\left(\frac{R_F}{R_2}\right) + V_3\left(\frac{R_F}{R_3}\right) + \ldots$$

$$-V_{out} = R_F\left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \ldots\right)$$

- **Circuito Amplificador Inversor Somador Poderado**

Circuito D/A de 4-bits:





Conectando-se as entradas referenciadas em relação ao terra (0 v), podemos usar superposição para resolver a tensão de saída V_{out}:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_a}{R_1},\ I_2 = \frac{V_2 - V_b}{R_2},\ I_f = \frac{V_a - V_{out}}{R_3}$$

No ponto de somatório: $V_a = V_b$ e $V_b = V_2\left(\frac{R_4}{R_2 + R_4}\right)$

➤ **Circuito Amplificador Diferencial**

Se $V_2 = 0 \Rightarrow V_{out(a)} = -\,V_1\left(\frac{R_3}{R_1}\right)$

Se $V_1 = 0 \therefore V_{out(b)} = V_2\left(\frac{R_4}{R_2 + R_4}\right)\left(\frac{R_1 + R_3}{R_1}\right)$

$$V_{out} = -\,V_{out(a)} + V_{out(b)}$$

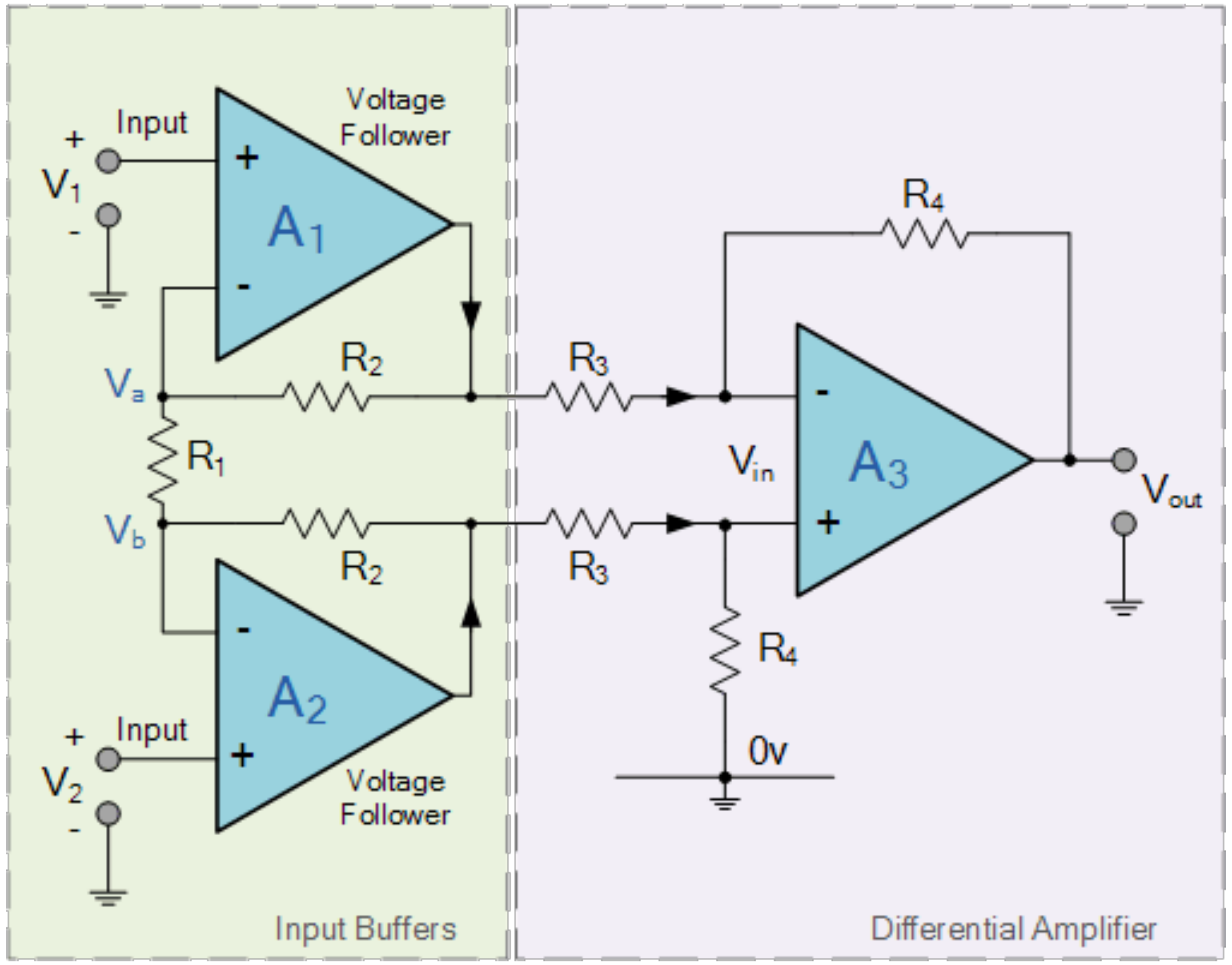
Então:

$$V_{out} = -\,V_1\left(\frac{R_3}{R_1}\right) + V_2\left(\frac{R_4}{R_2 + R_4}\right)\left(\frac{R_1 + R_3}{R_1}\right)$$

Se $R_1 = R_2$ e $R_3 = R_4$, a expressão se simplifica para:

$V_{out} = \frac{R_3}{R_1}\left(V_2 - V_1\right)$ ☜ que é a eq. do amplificador diferencial.

- ➤ Se $V_1 > V_2 \Rightarrow$ a soma de tensão de saída será negativa.
- ➤ Se $V_2 > V_1 \Rightarrow$ a soma da tensão de saída será positiva.



Ref.:

https://www.electronics-tutorials.ws/opamp/opamp_5.html

➤ Circuito Amplificador de Instrumentação (AI)

Equação:

$$V_{out} = (V_2 - V_1)\left[1 + \frac{2R_2}{R_1}\right]\left(\frac{R_4}{R_3}\right)$$

- ➤ São amplificadores diferenciais de ganho muito alto que possuem uma alta impedância de entrada e uma saída de terminação simples. São usados para amplificar sinais diferenciais muito pequenos derivados de strain-gauges, termopares ou de sensores de corrente em sistemas de controle de motores.
- ➤ Ao contrário dos amp-op's padrão em que seu ganho em malha fechada é determinado por um feedback resistivo externo conectado entre seu terminal de saída e um terminal de entrada, positivo ou negativo, os AI's possuem um resistor de feedback interno que é efetivamente isolado de seus terminais de entrada já que o sinal de entrada é aplicado através de duas entradas diferenciais, V_1 e V_2 .
- ➤ O AI também possui uma taxa de rejeição de modo comum, *CMRR*, (saída nula quando $V_1 = V_2$) muito boa, bem superior a 100dB em DC.
- ➤ Geralmente suas entradas possuem uma alta impedância de entrada (Z_{in}).

- **Análise…**
- Equações:

$$i_1 = \frac{e_1 - e'}{R_1},\ i_2 = C\frac{d}{dt}(e' - e_o),\ i_3 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

A corrente que flui pelo amp.op. é desprezível,

então: $i_1 = i_2 + i_3$ e:

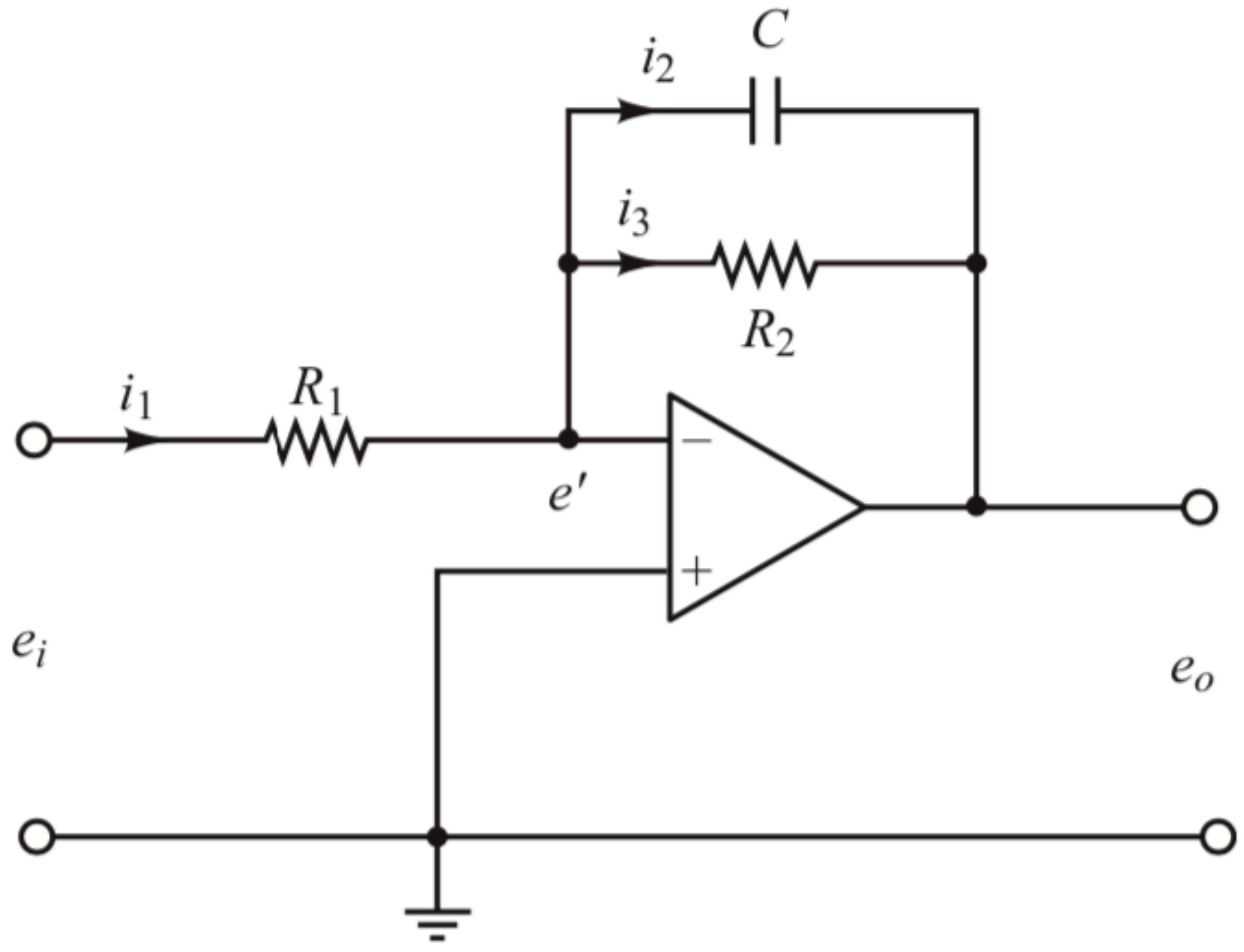
$$\frac{e_i - e'}{R_1} = C\frac{d}{dt}(e' - e_o) + \frac{e' - e_o}{R_2}$$

como: $e' \cong 0$:

$$\frac{e_i}{R_1} = -C\frac{d\,e_o}{dt} - \frac{e_o}{R_2}$$

usando Laplace:

$$\frac{E_i(s)}{R_1} = -\left(\frac{R_2Cs + 1}{R_2}\right)E_o(s)$$



- Finalmente:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_2Cs + 1}\right)$$

AMPLIFICADORES OPERACIONAIS (7): INTEGRADOR (PARCIAL)

Análise como impedâncias complexas e lembrando que trata-se de estrutura de amplificador inversor, teremos:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\left(\frac{Z_f}{Z_{in}}\right)$$

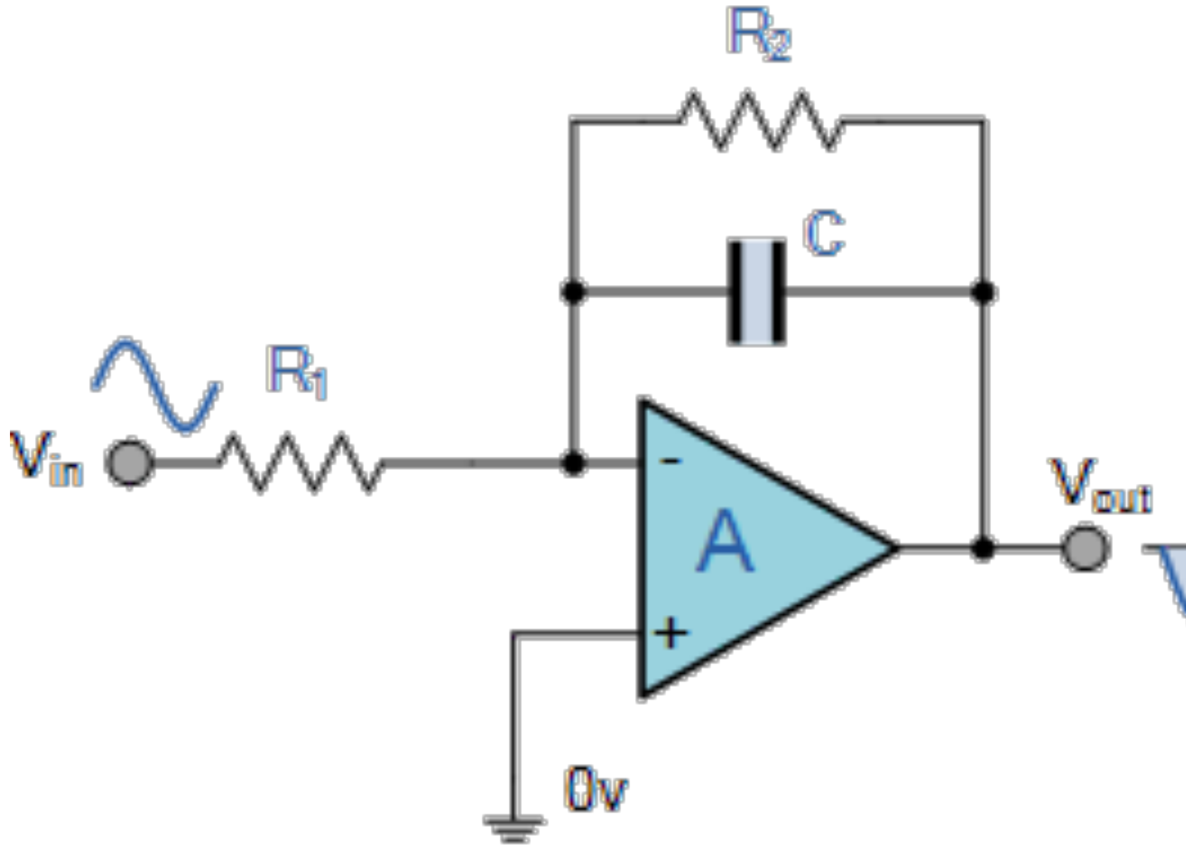
$$Z_{in} = R_1$$

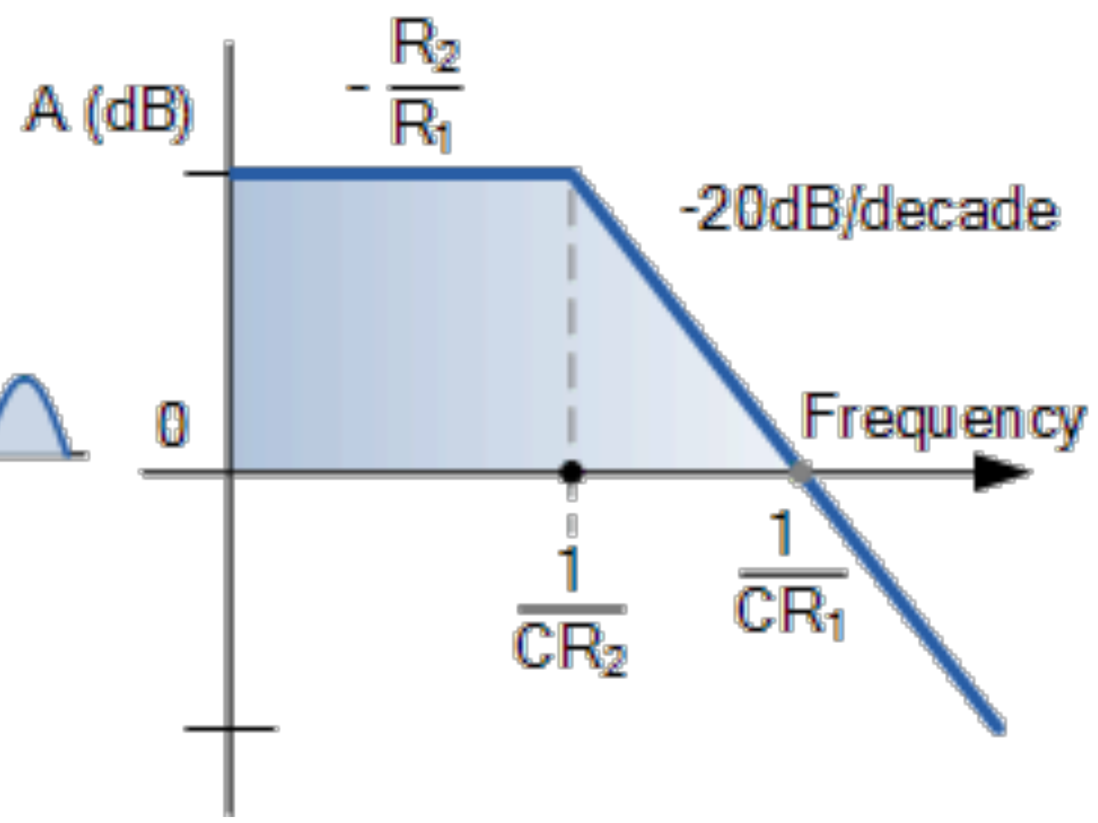
$Z_f = \dfrac{V_2}{i_{R_2} + i_C}$, onde: $I_{R_2}(s) = \dfrac{V_2(s)}{R_2}$ e $I_C(s) = C \cdot s\, V_2(s)$, então:

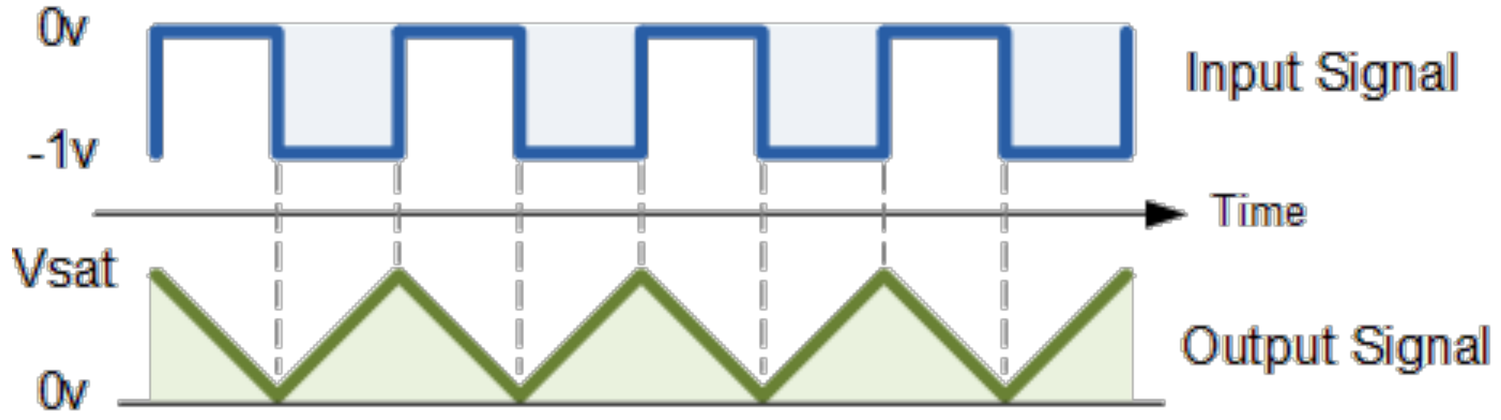
$$Z_f = \frac{\cancel{V_2(s)}}{sC\cancel{V_2(s)} + \frac{1}{R_2}\cancel{V_2(s)}} = \frac{1}{sC + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{sR_2C + 1}$$

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{Z_f}{Z_{in}} = \frac{\frac{R_2}{sR_2C+1}}{\frac{R_1}{1}} = -\frac{R_2}{sR_1R_2C + R_1}$$

Isolando R_2, obteremos ☞







➤ Eq. final:

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_2Cs + 1}\right)$$