3) TRANSFORMADA DE LAPLACE

Controle Automático I
Prof. Fernando Passold
2022

INTRODUÇÃO

Comportamento descrito por equações diferenciais

Domino tempo

Transformada de Laplace

Manipulação algébrica de equações

Domino s (domínio frequência)

Transformada Inversa de Laplace

Solução

Domino tempo

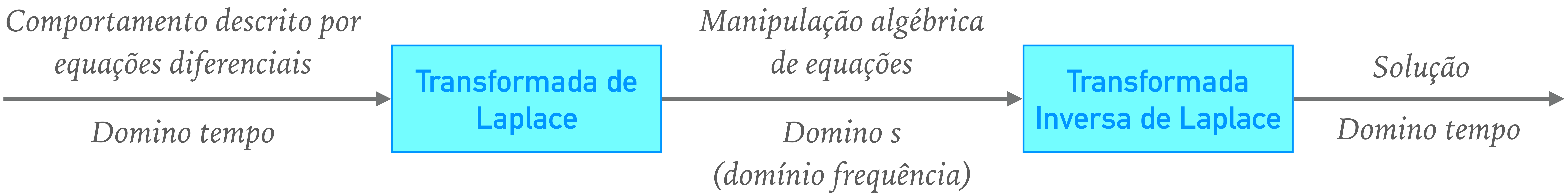
$$y(t) = a_2 \frac{\partial^2 x}{\partial t} + a_1 \frac{\partial x}{\partial t} + a_0 x$$

$$Y(S) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 x$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}$$

- Equações diferenciais que descrevem como um sistema se comporta com o tempo, são transformadas em relações algébricas não envolvendo o tempo, em que podemos realizar manipulações algébricas mais simples (normais).
- O comportamento do sistema, originalmente no domínio tempo será transladado para o domínio s, no qual são realizadas a manipulações algébricas.
- Usamos uma transformada inversa, para obter a solução de volta no domínio tempo.

INTRODUÇÃO



$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m t(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 r(t)$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}$$

- Na eq. Diferencial acima, $y(t)$ se refere à saída, $r(t)$ se refere à entrada, e a_i e b_i se referem à parâmetros do sistema.
- Origem das Equações diferenciais: Lei das malhas (somatório de d.d.p.'s) de Kischoff, lei dos nós (somatório das correntes) e leis de Newton (o somatório das forças é nula; ou somatório dos momentos é nulo).

DEFINIÇÃO

- O matemático francês P.S. de Laplace (1749–1827) descobriu um meio de resolver equações diferenciais: multiplicar cada termo na equação por e^{-st} e então integrar cada termo em relação ao tempo de zero para infinito:

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

onde: $s = \sigma + j\omega$, é uma variável complexa.

- A transformada inversa de Laplace é data por:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\, e^{st} ds = f(t)\, u(t)$$

onde $u(t) =$ função degrau: $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases}$

A notação para o limite inferior significa que mesmo que $f(t)$ seja descontínuo em $t = 0$, podemos iniciar a integração antes da descontinuidade desde que a integral convirja. Assim, podemos encontrar a transformada de Laplace das funções impulso.
Esta propriedade tem vantagens distintas ao aplicar a transformada de Laplace à solução de equações diferenciais onde as condições iniciais são descontínuas em $t = 0$.

DEFINIÇÃO

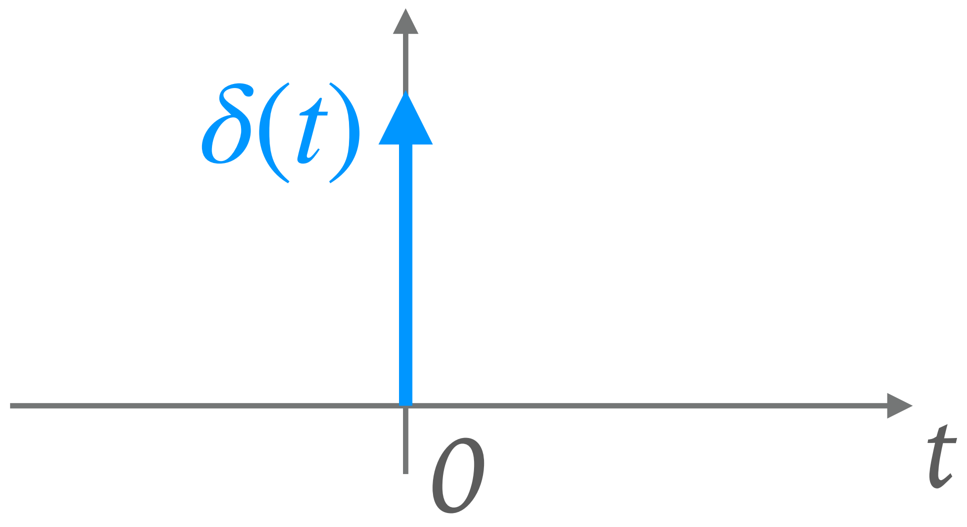
- O matemático francês P.S. de Laplace (1749–1827) descobriu um meio de resolver equações diferenciais: multiplicar cada termo na equação por e^{-st} e então integrar cada termo em relação ao tempo de zero para infinito:
  $$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$
  onde: $s = \sigma + j\omega$, é uma variável complexa.
- A transformada inversa de Laplace é data por:
  $$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\, e^{st} ds = f(t)\, u(t)$$
  onde $u(t) =$ função degrau: $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases}$

- Exemplo: Seja um resistor R, por onde passa a corrente i e seja v a d.d.p. sobre ele. Geralmente escrevemos:
  $v = Ri$
  Se v e i são ambas funções do tempo, podemos escrever:
  $v(t) = Ri(t)$
  Tomando a transformada de Laplace de i e v, a equação anterior torna-se:
  $V(s) = RI(s)$

TRANSFORMADA DE LAPLACE FUNÇÃO IMPULSO

- Definição: $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \forall\, 0^- < t < 0^+; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$$

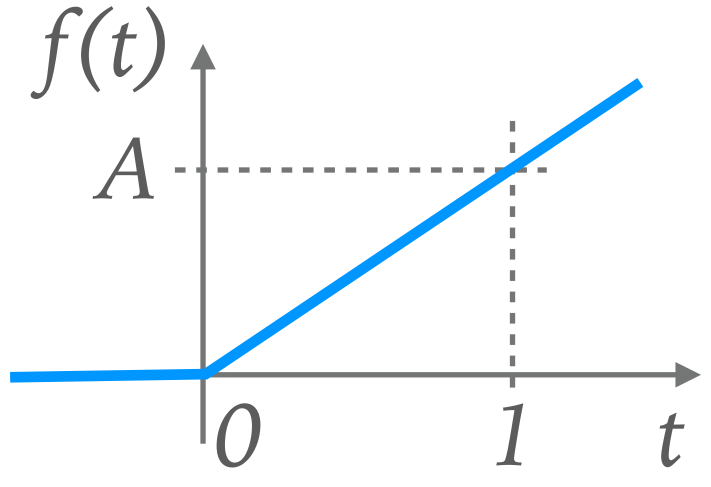


- $\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$

TRANSFORMADA DE LAPLACE DA FUNÇÃO DEGRAU

- A equação para esta função é: $f(t) = A \cdot u(t)$; (degrau de amplitude A), onde: $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

- *Solução:*



$$F(s) = \int_0^{\infty} A\, e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{A}{s} \left(e^{-st} \right) \Big|_0^{\infty}$$

quando $t = \infty$, o valor de $e^{-\infty}$ é 0; e quando $t = 0$, o valor de $e^{-0} = 1$.

Então:

$$F(s) = \frac{A}{s}$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE FUNÇÃO EXPONENCIAL

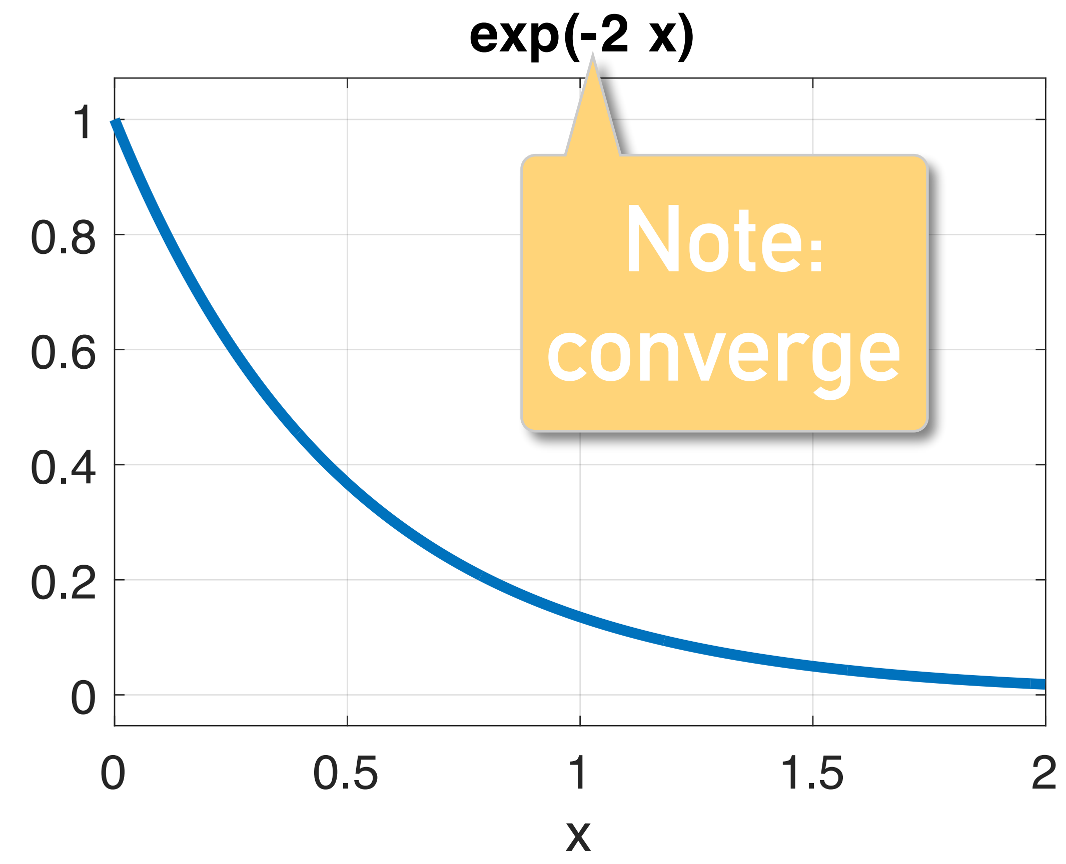
➤ Encontrar a transformada de Laplace de: $f(t) = Ae^{-at}u(t)$.

Solução:

Como a função não contém uma função de impulso, podemos substituir o limite inferior da Eq. De definição da transformada de Laplace por 0. Portanto,

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty Ae^{-at}e^{-st}dt = A\int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt$$

$$F(s) = -\frac{A}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{A}{s+a}$$



>> ezplot('exp(-2*x)',[0 2])

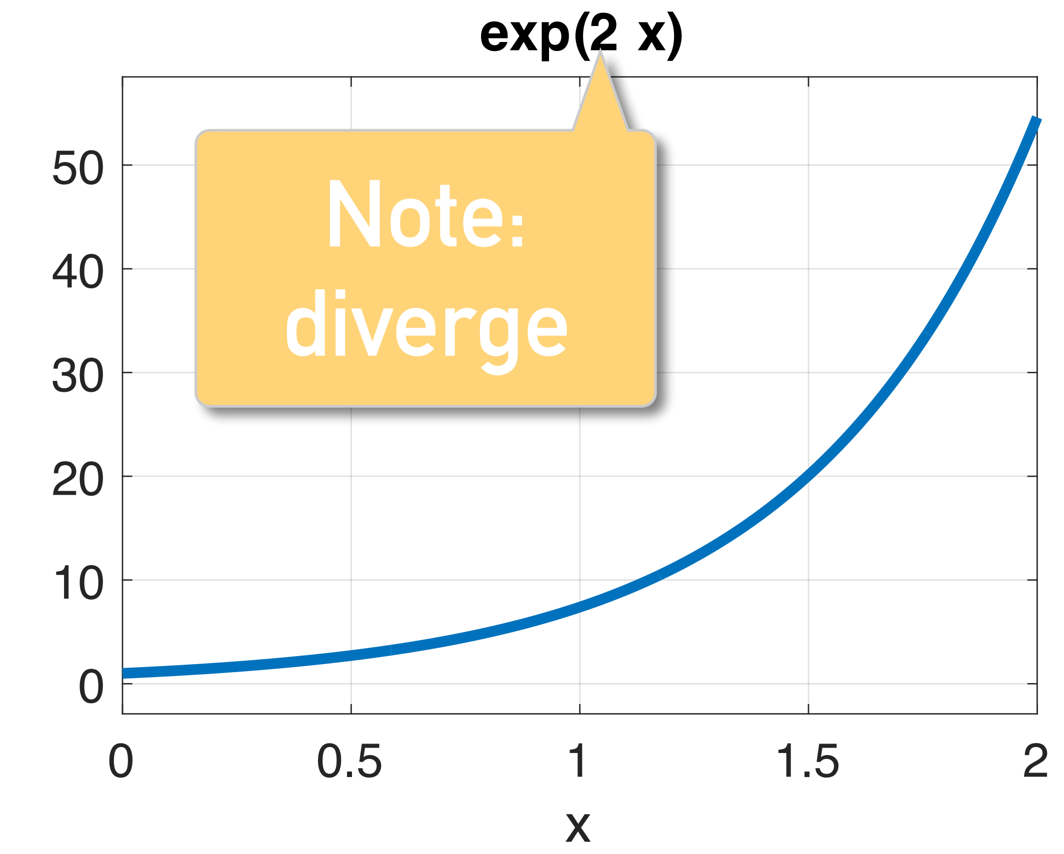
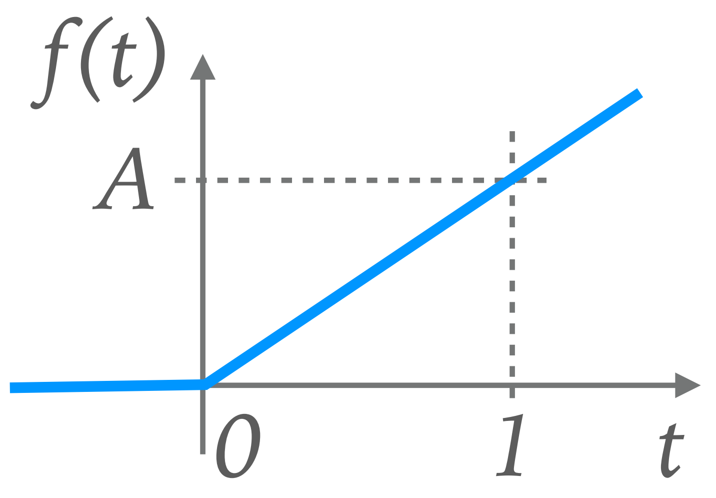
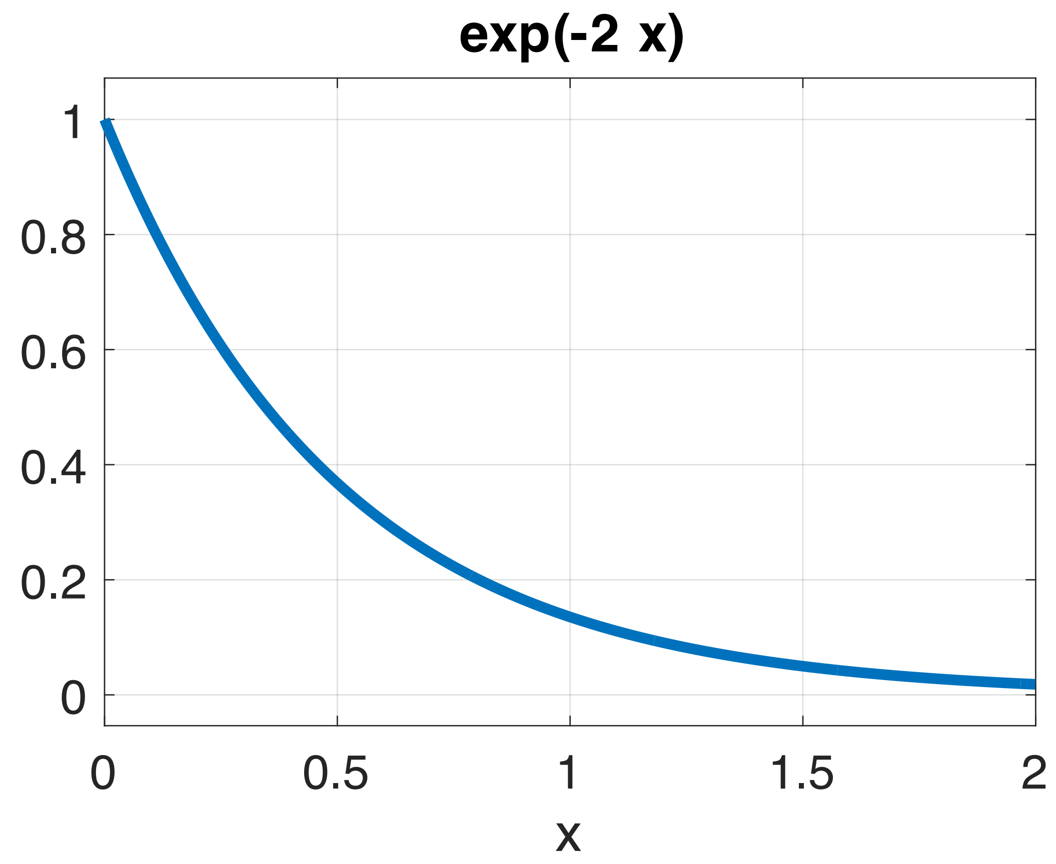


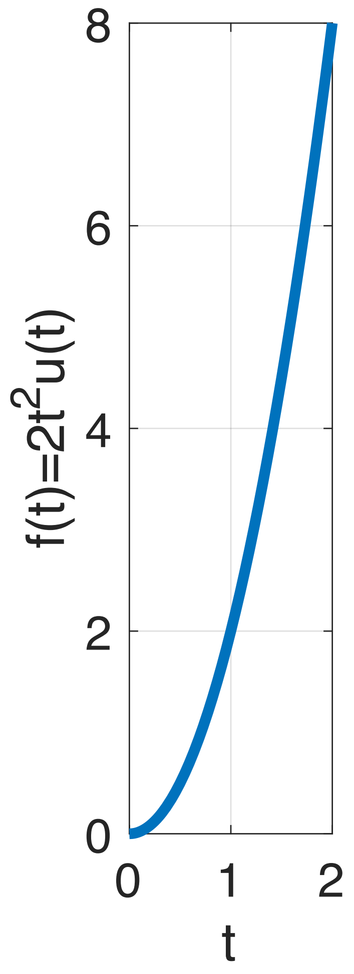
TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

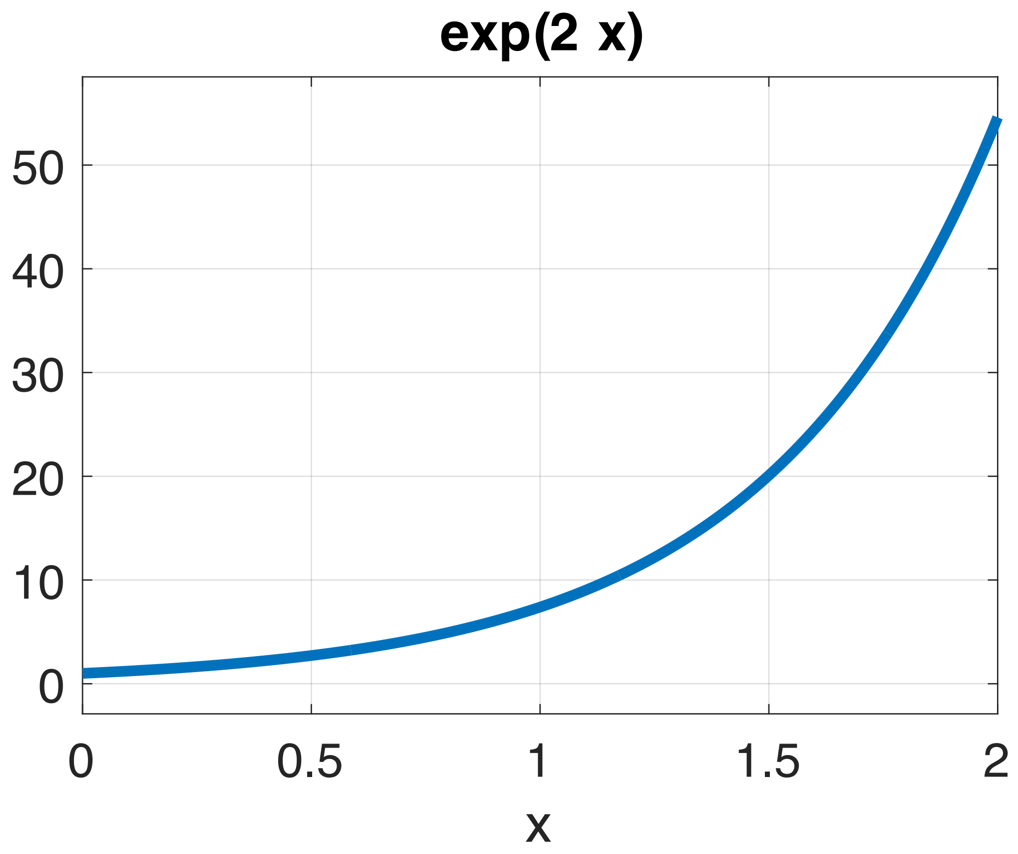
#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
1.	Impulso	$\delta(t)$	1
2.	Degrau	$A \cdot u(t)$	$A \cdot \dfrac{1}{s}$
3.	Reta	$A \cdot t \cdot u(t)$	$A \cdot \dfrac{1}{s^2}$
4.	Polinômio	$t^n \cdot u(t)$	$\dfrac{n!}{s^n + 1}$
5.	Exponencial	$B \cdot e^{-(a \cdot t)} \cdot u(t)$	$\dfrac{B}{s+a}$
6.	Senóide	$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	Cosseno	$\cos(\omega t)\, u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$





>> ezplot('exp(-2*x)',[0 2])





PROPRIEDADES TRANSFORMADA DE LAPLACE

#	Propriedade	Nome
1.	$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definição
2.	$\mathscr{L}\left\{kf(t)\right\} = kF(s)$	Linearidade
3.	$\mathscr{L}\left\{f_1(t) + f_2(t)\right\} = F_1(s) + F_2(s)$	Linearidade
4.	$\mathscr{L}\left\{e^{-at}f(t)\right\} = F(s+a)$	Deslocamento em freqüência
5.	$\mathscr{L}\left\{f(t-T)\right\} = e^{-sT}F(s)$	Deslocamento no tempo
6.	$\mathscr{L}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{a}F(s)$	Escalonamento
7.	$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right\} = sF(s) - f(0-)$	Diferenciação
8.	$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$	Diferenciação
9.	$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\right\} = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{k-1}(0-)$	Diferenciação
10.	$\mathscr{L}\left\{\int_{0-}^{t} f(\tau)\partial\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$	Integração
11.	$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$	Teorema Valor Final
12.	$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$	Teorema Valor Inicial

EXEMPLO TRANSFORMADA INVERSA DE

- Encontre a transformada inversa de Laplace de:

$$F(s) = \frac{1}{(s+3)^2}.$$

Solução:

Para resolver este item vamos fazer uso da teorema do deslocamento em freqüência, item (4) da tabela anterior e lembrar da transformada de Laplace de $f(t) = tu(t)$ (item 3 da tabela anterior).

Se a transformada inversa de $F(s) = 1/s^2$ é $tu(t)$, então a transformada inversa de $F(s+a) = 1/(s+a)^2$ é $e^{-at}tu(t)$.

Assim:

$$f(t) = e^{-3t}tu(t).$$

#	Propriedade	Nome
1.	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definição
2.	$\mathscr{L}\{kf(t)\} = kF(s)$	Linearidade
3.	$\mathscr{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$	Linearidade
4.	$\mathscr{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$	Deslocamento em freqüência
5.	$\mathscr{L}\{f(t-T)\} = e^{-sT}F(s)$	Deslocamento no tempo
6.	$\mathscr{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(s)$	Escalonamento
7.	$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right\} = sF(s) - f(0-)$	Diferenciação
8.	$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$	Diferenciação
9.	$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\right\} = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{k-1}(0-)$	Diferenciação
10.	$\mathscr{L}\left\{\int_{0-}^{t} f(\tau)\partial\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$	Integração
11.	$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$	Teorema Valor Final
12.	$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$	Teorema Valor Inicial

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

- Para encontrar a transformada de Laplace inversa de uma função complicada, podemos converter a função em uma soma de termos mais simples para os quais conhecemos a transformada de Laplace de cada termo. O resultado é chamado de expansão de frações parciais.

- Se $F_1(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$, onde a ordem de $N(s)$ é menor que a ordem de $D(s)$ então uma expansão em frações parciais pode ser realizada.

- Se a ordem de $N(s)$ é maior ou igual que a ordem de $D(s)$, então $N(s)$ deve ser dividido por $D(s)$ sucessivamente até que o resultando alcance um numerador possua ordem menor que o denominador. Por exemplo:

$$F_1(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6s + 7}{s^2 + s + 5}$$

devemos realizar a divisão, assim:

$$\begin{array}{rrrr|l}
s^3 & +2s^2 & +6s & +7 & s^2 + s + 5 \\ \cline{5-5}
-s^3 & -1s^2 & -5s & & s + 1 \\ \cline{1-3}
 & s^2 & +s & +7 & \\
 & -s^2 & -s & -5 & \\ \cline{2-4}
 & & & 2 &
\end{array}$$

$$F_1(s) = s + 1 + \frac{2}{s^2 + s + 5}$$

E então realizamos a transformada inversa de Laplace, obtendo:

$$f_1(t) = \frac{\partial \delta(t)}{\partial t} + \delta(t) + \mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{2}{s^2 + s + 5} \right\}$$

E então usando expansão em frações parciais, expandimos $F(s) = 1/\left(s^2 + s + 5\right)$.

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS (2)

- Expandindo: $F(s) = 1/\left(s^2 + s + 5\right)$.
- 3 Casos:
  - 1) raizes reais e distintas:
  - 2) raízes reais repetidas:
  - 3) raízes complexas:

```
>> roots([1 1 5])
ans =
         -0.5 +     2.1794i
         -0.5 -     2.1794i
```

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES REAIS E DISTINTAS

- Exemplo, seja: $F(s) = \dfrac{2}{s^2 + 3s + 2}$ (1).
- Esta função possui raízes em: $s = -1$ e $s = -2$.
- Então podemos re-escrever a expressão acima como:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+2)} (2)$$

onde R_1 e R_2 são os chamados "resíduos", que podem ser calculados da seguinte forma:

  - Para encontrar R_1, multiplicamos a eq. (2) por $(s+1)$, o que isola R_1:

$$\frac{2\cancel{(s+1)})}{\cancel{(s+1)}(s+2)} = R_1 + \frac{(s+1)R_2}{(s+2)}$$

$$R_1 = \frac{2}{(s+2)} - \frac{(s+1)R_2}{(s+2)}$$

quando fazemos s valer -1, cancelamos o termo R_2 e obtemos então:

$$R_1 = \frac{2}{(-1+2)} - \frac{\cancel{(-1+1)}^0 R_2}{(-1+2)} = 2$$

Eq.: $ax^2 + bc + c = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Ou simplesmente:
```
>> roots([1 3 2])
ans =
   -2
   -1
>>
```

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES REAIS E DISTINTAS

- Exemplo, seja: $F(s) = \dfrac{2}{s^2+3s+2}$ (1).
- Esta função possui raízes em: $s = -1$ e $s = -2$.
- Então podemos re-escrever a expressão acima como:

  $$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+2)} \quad (2)$$

  onde R_1 e R_2 são os chamados "resíduos", que podem ser calculados da seguinte forma:

  - Para encontrar R_1, multiplicamos a eq. (2) por $(s+1)$, o que isola R_1:

    $$\frac{2\cancel{(s+1)})}{\cancel{(s+1)}(s+2)} = R_1 + \frac{(s+1)R_2}{(s+2)}$$

    $$R_1 = \frac{2}{(s+2)} - \frac{(s+1)R_2}{(s+2)}$$

    quando fazemos s valer -1, cancelamos o termo R_2 e obtemos então:

    $$R_1 = \frac{2}{(-1+2)} - \frac{\cancel{(-1+1)}^0 R_2}{(-1+2)} = 2$$

- E R_2 pode ser encontrado da mesma forma, multiplicando (2) por $(s+2)$:

  $$\frac{2\cancel{(s+2)})}{(s+1)\cancel{(s+2)}} = \frac{R_1(s+2)}{(s+1)} + R_2$$

  e então fazendo s valer -2:

  $$R_2 = \frac{2}{(-2+1)} - \frac{R_1\cancel{(-2+2)}^0}{(-2+1)} = -2$$

- E assim (1) se transforma em:

  $$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2} = \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+2)}$$

- O que rende a seguinte transformada inversa de Laplace:

  $f(t) = (2e^{-2} - 2e^{-2t})u(t)$

#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
5.	Exponencial	$B \cdot e^{-(a \cdot t)} \cdot u(t)$	$\dfrac{B}{s+a}$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES REAIS E DISTINTAS

- De **forma geral**:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\ \cdots\ (s+p_n)} = \frac{R_1}{(s+p_1)} + \frac{R_2}{(s+p_2)} + \ldots + \frac{R_n}{(s+p_n)}$$

onde cada um dos resíduos R_i pode ser calculado multiplicando a eq. acima pela correspondente fração parcial.

Assim, se desejamos encontrar R_i, multiplicamos a eq. acima por $(s+p_i)$ e vamos obter algo como:

$$(s+p_i)F(s) = \frac{(s+p_i)N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\ \cdots\ (s+p_i)\ \cdots\ (s+p_n)}$$

$$= (s+p_i)\frac{R_1}{(s+p_1)} + (s+p_i)\frac{R_2}{(s+p_2)} + \ldots + K_i + \ldots + (s+p_i)\frac{K_n}{(s+p_n)}$$

fazendo $s = -p_i$, obtemos:

$$R_i = (s+p_i)F(s)\Big|_{s=-p_i} = \frac{\cancel{(s+p_i)}\,N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\ \cdots\ \cancel{(s+p_i)}\ \cdots\ (s+p_n)}\Bigg|_{s=-p_i}$$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES REAIS E DISTINTAS - EXEMPLO

- Dado a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} + 32y(t) = 32u(t)$$

resolva para $y(t)$ se as condições iniciais forem nulas.

Usar transformada de Laplace.

- *Solução:*

Tabela de Transformadas:

#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
2.	Degrau	$A \cdot u(t)$	$A \cdot \frac{1}{s}$

Usando uma tabela de transformadas de Laplace, suas Propriedades e lembrando das condições iniciais $(y(0^-) = 0$ *e* $\dot{y}(0^-) = 0)$ *temos que:*

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s}$$

#	Propriedade	Nome
7.	$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right\} = sF(s) - f(0-)$	Diferenciação
8.	$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$	Diferenciação

Isolando $Y(s)$, *temos:*

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2+12s+32)} = \frac{32}{s(s+4)(s+8)}$$

Expandindo $Y(s)$, *teremos:*

$$Y(s) = \frac{32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+4)} + \frac{R_3}{(s+8)}$$

Encontrando os resíduos:

$$y(t) = \left(1 - 2e^{-4t} + e^{-8t}\right)u(t)$$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES REAIS E DISTINTAS - EXEMPLO

- Dado a seguinte equação diferencial:

  $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} + 32y(t) = 32u(t)$$

  resolva para $y(t)$ se as condições iniciais forem nulas.

  Usar transformada de Laplace.

- *Solução:*

Usando uma tabela de transformadas de Laplace, suas Propriedades e lembrando das condições iniciais ($y(0^-) = 0$ *e* $\dot{y}(0^-) = 0$) *temos que:*

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s}$$

Isolando $Y(s)$*, temos:*

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2 + 12s + 32)} = \frac{32}{s(s+4)(s+8)}$$

Expandindo $Y(s)$*, teremos:*

$$Y(s) = \frac{32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+4)} + \frac{R_3}{(s+8)}$$

Encontrando os resíduos:

#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
2.	Degrau	$A \cdot u(t)$	$A \cdot \frac{1}{s}$
5.	Exponencial	$B \cdot e^{-(a \cdot t)} \cdot u(t)$	$\frac{B}{s+a}$

$$R_1 = \left.\frac{32 \cdot \cancel{s}}{\cancel{s}(s+4)(s+8))}\right|_{s=0} = \frac{32}{(4)(8)} = 1$$

$$R_2 = \left.\frac{32 \cdot \cancel{(s+4)}}{s\cancel{(s+4)}(s+8)}\right|_{s=-4} = \frac{32}{(-4)(-4+8)} = -2$$

$$R_3 = \left.\frac{32 \cdot \cancel{(s+8)}}{s(s+4)\cancel{(s+8))}}\right|_{s=-8} = \frac{32}{(-8)(-8+4)} = 1$$

E então:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+4)} + \frac{1}{(s+8)}$$

E então finalmente:

$$y(t) = \left(1 - 2e^{-4t} + e^{-8t}\right) u(t)$$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES REAIS E REPETIDAS

- Exemplo: $F(s) = \dfrac{2}{s^3+5s^2+8s+4} = \dfrac{2}{(s+1)(s+2)^2}$ (1)
- O denominador de $F(s)$ possui **raízes duplas** em $s = -2$.
- A expansão em frações parciais de (1) rende:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+2)^2} + \frac{R_3}{(s+2)} \qquad (2)$$

- R_1 pode ser encontrado como já realizado antes:

$$R_1 = \left.\frac{2\cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)}(s+2)^2}\right|_{s=-1} = \frac{2}{(-1+2)^2} = 2$$

- R_2 pode ser calculado, multiplicando-se a eq. (2) por $(s+2)^2$, o que leva à:

$$\frac{2}{(s+1)} = (s+2)^2\frac{R_1}{(s+1)} + R_2 + (s+2)R_3 \qquad (3)$$

$$R_2 = \frac{2}{(s+1)} - (s+2)^2\frac{R_1}{(s+1)} - (s+2)R_3$$

e depois fazendo $s = -2$, o que leva à:

$$R_2 = \frac{2}{(-2+1)} - \cancel{(-2+2)}^0\frac{R_1}{(-2+1))} + \cancel{(-2+2)^0}R_3 = -2$$

- Mas para determinar R_3, necessitamos **diferenciar a eq. (3) em relação à** s:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{2}{(s+1)}\right] = 2\cdot\frac{(-1)}{(s+1)^2} = \frac{-2}{(s+1)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{(s+2)^2\,R_1}{(s+1)}\right] = R_1\left[\frac{(2s+4)}{(s+1)} - \frac{(s+2)^2}{(s+1)^2}\right] = R_1\left[\frac{(2s+4)(s+1)-(s+2)^2}{(s+1)^2)}\right]$$

$$= R_1\left[\frac{(2s^2+6s+4)-(s^2+4s+4)}{(s+1)^2}\right] = R_1\left[\frac{s^2+2s}{(s+1)^2}\right] = R_1\left[\frac{s(s+2)}{(s+1)^2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[(s+2)\,R_3\right] = 1\cdot R_3$$

Juntando a expressão com as 3 derivadas da eq. (3):

$$\frac{-2}{(s+1)^2} = \frac{(s+2)s}{(s+1)^2}R_1 + R_3$$

$$R_3 = \frac{-2}{(s+1)^2} - \frac{(s+2)s}{(s+1)^2}R_1$$

fazendo-se $s = -2$, teremos agora:

$$R_3 = \frac{-2}{(-2+1)^2} - \frac{\cancel{(-2+2)}^0(-2)}{(-2+1)^2}R_1 = -2$$

- Finalmente:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)}$$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES REAIS E REPETIDAS

- Exemplo: $F(s) = \dfrac{2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} = \dfrac{2}{(s+1)(s+2)^2}$

  (1)

- O denominador de $F(s)$ possui **raízes duplas** em $s = -2$.
- A expansão em frações parciais de (1) rende:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+2)^2} + \frac{R_3}{(s+2)}$$

- Encontrando os residuos temos:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)}$$

- Consultando-se uma tabela de transformadas de Laplace, temos então que:

$$f(t) = 2e^{-t} - 2te^{-2t} - 2e^{-2t}$$

#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
1.	Impulso	$\delta(t)$	1
2.	Degrau	$A \cdot u(t)$	$A \cdot \dfrac{1}{s}$
3.	Reta	$A \cdot t \cdot u(t)$	$A \cdot \dfrac{1}{s^2}$
4.	Polinômio	$t^n \cdot u(t)$	$\dfrac{n!}{s^n + 1}$
5.	Exponencial	$B \cdot e^{-(a \cdot t)} \cdot u(t)$	$\dfrac{B}{s+a}$
6.	Senóide	$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	Cosseno	$\cos(\omega t)\, u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES REAIS E REPETIDAS

- Exemplo: $F(s) = \dfrac{2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} = \dfrac{2}{(s+1)(s+2)^2}$ (1)
- O denominador de $F(s)$ possui **raízes duplas** em $s = -2$.
- A expansão em frações parciais de (1) rende:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+2)^2} + \frac{R_3}{(s+2)} \qquad (2)$$

- R_1 pode ser encontrado como já realizado antes:

$$R_1 = \left.\frac{2\cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)}(s+2)^2}\right|_{s=-1} = \frac{2}{(-1+2)^2} = 2$$

- R_2 pode ser calculado, multiplicando-se a eq. (2) por $(s+2)^2$, o que leva à:

$$\frac{2}{(s+1)} = (s+2)^2 \frac{R_1}{(s+1)} + R_2 + (s+2)R_3 \qquad (3)$$

$$R_2 = \frac{2}{(s+1)} - (s+2)^2 \frac{R_1}{(s+1)} - (s+2)R_3$$

e depois fazendo $s = -2$, o que leva à:

$$R_2 = \frac{2}{(-2+1)} - \cancel{(-2+2)^0} \frac{R_1}{(-2+1))} + \cancel{(-2+2)^0} R_3 = -2$$

- Mas para determinar R_3, necessitamos **diferenciar a eq. (3) em relação à** s:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{2}{(s+1)}\right] = 2 \cdot \frac{(-1)}{(s+1)^2} = \frac{-2}{(s+1)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{(s+2)^2\, R_1}{(s+1)}\right] = R_1 \left[\frac{(2s+4)}{(s+1)} - \frac{(s+2)^2}{(s+1)^2}\right] = R_1 \left[\frac{(2s+4)(s+1) - (s+2)^2}{(s+1)^2)}\right]$$

$$= R_1 \left[\frac{(2s^2+6s+4) - (s^2+4s+4)}{(s+1)^2}\right] = R_1 \left[\frac{s^2+2s}{(s+1)^2}\right] = R_1 \left[\frac{s(s+2)}{(s+1)^2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[(s+2)\, R_3\right] = 1 \cdot R_3$$

Juntando a expressão com as 3 derivadas da eq. (3):

$$\frac{-2}{(s+1)^2} = \frac{(s+2)s}{(s+1)^2} R_1 + R_3$$

$$R_3 = \frac{-2}{(s+1)^2} - \frac{(s+2)s}{(s+1)^2} R_1$$

fazendo-se $s = -2$, teremos agora:

$$R_3 = \frac{-2}{(-2+1)^2} - \frac{\cancel{(-2+2)^0}(-2)}{(-2+1)^2} R_1 = -2$$

- Finalmente:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)}$$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES REAIS E REPETIDAS

- Exemplo: $F(s) = \dfrac{2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} = \dfrac{2}{(s+1)(s+2)^2} \qquad (1)$

- O denominador de $F(s)$ possui **raízes duplas** em $s = -2$.

- A expansão em frações parciais de (1) rende:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+2)^2} + \frac{R_3}{(s+2)} \qquad (2)$$

De forma geral:

Se $F(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} = \dfrac{N(s)}{(s+p_1)^r(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$, então:

$$F(s) = \frac{R_1}{(s+p_1)^r} + \frac{R_2}{(s+p_1)^{r-1}} + \ldots + \frac{R_r}{(s+p_1)} + \frac{R_{r+1}}{(s+p_2)} + \ldots + \frac{R_n}{(s+p_n)} \qquad (1)$$

Para encontrar K_1 até K_r, temos que primeiramente multiplicar a eq. (1) por $(s+p_1)^r$, obtendo $F_1(s)$ que é:

$$F_1(s) = (s+p_1)^r F(s) = \frac{(s+p_1)^r N(s)}{(s+p_1)^r(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$$F_1(s) = R_1 + (s+p_1)R_2 + (s+p_1)^2 R_3 + \ldots + (s+p_1)^{r-1}R_r + \\ + \frac{R_{r+1}(s+p_1)^r}{(s+p_2)} + \ldots + \frac{K_n(s+p_1)^r}{(s+p_n)}.$$

E então os resíduos são calculados na forma:

$$K_i = \frac{1}{(i-1)!} \cdot \left. \frac{d^{i-1}\, F_1(s)}{ds^{i-1}} \right|_{s=-p_i} \qquad i = 1,2,\ldots,r; \quad 0! = 1$$

- Mas para determinar R_3, necessitamos **diferenciar a eq. (3) em relação à** s:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{2}{(s+1)}\right] = 2 \cdot \frac{(-1)}{(s+1)^2} = \frac{-2}{(s+1)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{(s+2)^2\, R_1}{(s+1)}\right] = R_1\left[\frac{(2s+4)}{(s+1)} - \frac{(s+2)^2}{(s+1)^2}\right] = R_1\left[\frac{(2s+4)(s+1)-(s+2)^2}{(s+1)^2)}\right]$$

$$= R_1\left[\frac{(2s^2+6s+4)-(s^2+4s+4)}{(s+1)^2}\right] = R_1\left[\frac{s^2+2s}{(s+1)^2}\right] = R_1\left[\frac{s(s+2)}{(s+1)^2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[(s+2)\,R_3\right] = 1 \cdot R_3$$

Juntando a expressão com as 3 derivadas da eq. (3):

$$\frac{-2}{(s+1)^2} = \frac{(s+2)s}{(s+1)^2}R_1 + R_3$$

$$R_3 = \frac{-2}{(s+1)^2} - \frac{(s+2)s}{(s+1)^2}\,R_1$$

fazendo-se $s = -2$, teremos agora:

$$R_3 = \frac{-2}{(-2+1)^2} - \frac{\cancel{(-2+2)}^0(-2)}{(-2+1)^2}\,R_1 = -2$$

- Finalmente:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)}$$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES COMPLEXAS

```
>> roots([1 2 5])
ans =
-1 +          2i
-1 -          2i
```

- Exemplo: $F(s) = \dfrac{3}{s(s^2+2s+5)}$ (1)

  cujas raízes resultam em: $s=0$ e $s=-1 \pm j2$

A expansão em frações, neste caso, fica:

$$\frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2 s + R_3}{(s^2+2s+5)} \qquad (2)$$

R_1 pode ser encontrado da forma usual e resultará em $R_1 = 3/5$:

$$R_1 = \left.\frac{3\,\cancel{s}}{\cancel{s}\,(s^2+2s+5)}\right|_{s=0} = \frac{3}{5}$$

Já R_2 e R_3 são encontrados, multiplicando a eq. (2) pelo menor denominador comum $(s(s^2+2s+5))$:

$$\frac{3\cdot s\cancel{(s^2+2s+5)}}{\cancel{s(s^2+2s+5)}} = \frac{3\cdot \cancel{s}(s^2+2s+5)}{5\,\cancel{s}} + \frac{(R_2 s+R_3)\cdot s\,\cancel{(s^2+2s+5)}}{\cancel{(s^2+2s+5)}}$$

$$3 = \frac{3}{5}(s^2+2s+5) + (R_2 s + R_1)s$$

$$3 = \frac{3}{5}s^2 + \frac{6}{5}s + \frac{3}{\cancel{5}}\cdot\cancel{5} + R_2 s^2 + R_1 s$$

$$3 = \left(\frac{3}{5}+R_2\right)s^2 + \left(\frac{6}{5}+R_3\right)s + 3$$

Comparando os termos:

$$3 = \underbrace{\left(\frac{3}{5}+R_2\right)}_{=0}s^2 + \underbrace{\left(\frac{6}{5}+R_3\right)}_{=0}s + 3$$

Dai: $R_2 = -\dfrac{3}{5}$ e $R_3 = -\dfrac{6}{5}$.

Finalmente: $F(s) = \dfrac{3}{s(s^2+2s+5)} = \dfrac{3/5}{s} + \dfrac{(-3/5)s + (-6/5)}{s^2+2s+5}$

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left(\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right)$$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES COMPLEXAS

- Exemplo: $F(s) = \dfrac{3}{s(s^2+2s+5)} \qquad (1)$

  cujas raízes resultam em: $s = 0$ e $s = -1 \pm j2$

- A expansão em frações, resulta:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3/5}{s} + \frac{(-3/5)s + (-6/5)}{s^2+2s+5}$$

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left(\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right)$$

- O último termo envolve a transformadas de Laplace de uma função exponencial que amortece um cosseno e um seno:

$$\mathscr{L}\left\{Ae^{-at}\cos(\omega t)\right\} = \frac{A(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{Be^{-at}\sin(\omega t)\right\} = \frac{B\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{Ae^{-at}\cos(\omega t) + Be^{-at}\sin(\omega t)\right\} = \frac{A(s+a)+B\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

- Adaptando ao nosso caso, temos:

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left[\frac{(s+1)+(1/2)(2)}{(s+1)^2+2^2}\right]$$

- Consultando uma tabela de transformadas:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left[\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]$$

- Ou:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{1^2+(1/2)^2}e^{-t}\left[\cos(2t-\phi)\right]$$

onde $\phi = \arctan(1/2) = 26{,}57^o$, ou:

$$f(t) = 0{,}6 - 0{,}6 \cdot 1{,}118\ e^{-t}\ \cos(2t + 26{,}57^o)$$

$$f(t) = 0{,}6\left[1 - 1{,}118e^{-t}\cos(2t+26{,}57^o)\right]$$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES COMPLEXAS

- Exemplo: $F(s) = \dfrac{3}{s(s^2+2s+5)}$ (1)

  cujas raízes resultam em: $s = 0$ e $s = -1 \pm j2$

- A expansão em frações, resulta:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3/5}{s} + \frac{(-3/5)s + (-6/5)}{s^2+2s+5}$$

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left(\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right)$$

Com base em relações trigonométricas, pode-se escrever:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{1^2+(1/2)^2}e^{-t}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+(1/2)^2}}\cos 2t + \frac{1}{\sqrt{1^2+(1/2)^2}}\sin 2t\right)$$

onde:

$$\cos\phi = 1/\sqrt{1^2+(1/2)^2} \text{ e } \sin\phi = (1/2)/\sqrt{1^2+(1/2)^2}$$

Assim:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{1^2+(1/2)^2}e^{-t}\left(\cos\phi\cos 2t + \sin\phi\sin 2t\right)$$

- Adaptando ao nosso caso, temos:

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left[\frac{(s+1)+(1/2)(2)}{(s+1)^2+2^2}\right]$$

- Consultando uma tabela de transformadas:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left[\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]$$

Ou:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{1^2+(1/2)^2}e^{-t}\left[\cos(2t-\phi)\right]$$

onde $\phi = \arctan(1/2) = 26{,}57^o$, ou:

$$f(t) = 0{,}6 - 0{,}6\cdot 1{,}118\; e^{-t}\;\cos(2t + 26{,}57^o)$$

$$f(t) = 0{,}6\left[1 - 1{,}118e^{-t}\cos(2t+26{,}57^o)\right]$$

EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES COMPLEXAS

- Exemplo: $F(s) = \dfrac{3}{s(s^2+2s+5)}$ (1)

  cujas raízes resultam em: $s=0$ e $s=-1 \pm j2$

- A expansão em frações, resulta:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3/5}{s} + \frac{(-3/5)s + (-6/5)}{s^2+2s+5}$$

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left(\frac{s+2}{s^2+2s+5}\right)$$

- O último termo envolve a transformadas de Laplace de uma função exponencial que amortece um cosseno e um seno:

$$\mathscr{L}\left\{Ae^{-at}\cos(\omega t)\right\} = \frac{A(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{Be^{-at}\sin(\omega t)\right\} = \frac{B\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{Ae^{-at}\cos(\omega t) + Be^{-at}\sin(\omega t)\right\} = \frac{A(s+a)+B\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

- Adaptando ao nosso caso, temos:

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\left[\frac{(s+1)+(1/2)(2)}{(s+1)^2+2^2}\right]$$

- Consultando uma tabela de transformadas:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left[\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]$$

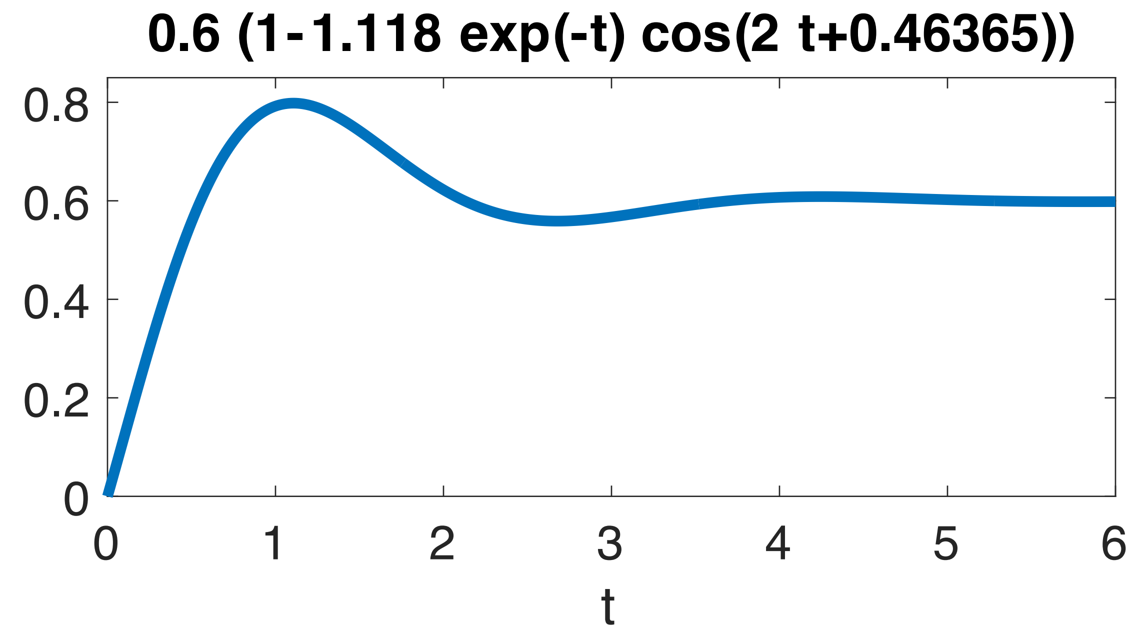
- Ou:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{1^2+(1/2)^2}e^{-t}\left[\cos(2t-\phi)\right]$$

onde $\phi = \arctan(1/2) = 26{,}57^o$, ou:

$$f(t) = 0{,}6 - 0{,}6 \cdot 1{,}118\ e^{-t}\ \cos(2t + 26{,}57^o)$$

$$f(t) = 0{,}6\left[1 - 1{,}118e^{-t}\cos(2t+26{,}57^o)\right]$$



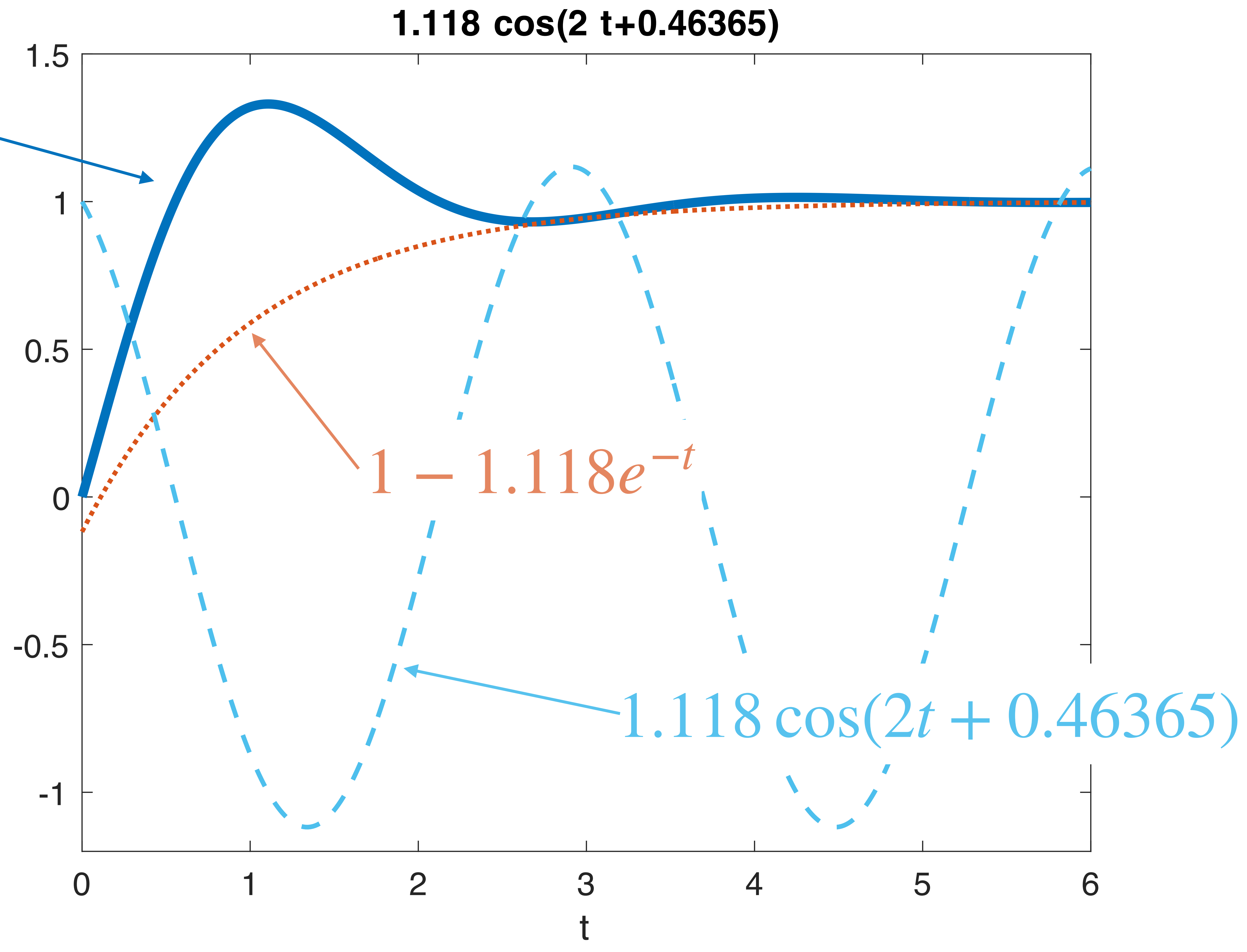
Comandos Matlab:

$$1 - 1.118e^{-t}\cos(2t + 0.46365)$$

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

$$f(t) = 0{,}6\left[1 - 1{,}118e^{-t}\cos(2t + 26{,}57^o)\right]$$

```
>> atan(1/2)
ans =       0.46365 % (rad)
>> ezplot('1-1.118*exp(-t)*cos(2*t+0.46365)', [0 6])
>> hold on
>> ezplot('1-1.118*exp(-t)', [0 6])
>> ezplot('1.118*cos(2*t+0.46365)', [0 6])
>> axis([0 6 -1.2 1.5])
```



EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - CASO DE RAÍZES COMPLEXAS

- Outra forma de resolver:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)}$$

Raízes de (s^2+2s+5) são $s = -1 \pm j2$, então:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+1+j2)} + \frac{R_3}{(s+1-j2)}$$

$$R_1 = \left. \frac{3\,\cancel{s}}{\cancel{s}\,(s^2+2s+5)} \right|_{s=0} = \frac{3}{5}$$

$$R_2 = \left. \frac{3}{s(s+1-j2)} \right|_{s=-1-j2} = -\frac{3}{20}(2+j1)$$

R_3 é o conjugado de R_2.

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{20}\left(\frac{2+j1}{s+1+j2} + \frac{2-j1}{s+1-j2}\right)$$

Lembrando relações trigonométricas:

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{20}\left[(2+j1)e^{-(1+j2)t} + (2-j1)e^{-(1-j2)t}\right]$$

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{20}e^{-t}\left[4\left(\frac{e^{j2t}+e^{-j2t}}{2}\right) + 2\left(\frac{e^{j2t}+e^{-j2t}}{2j}\right)\right]$$

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

$$f(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{1^2+(1/2)^2}\,(\cos 2t - \phi)$$

onde: $\phi = \tan^{-1}(1/2) = 26{,}57^o$.

Lembrando que:

$$\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} = \cos\theta$$

e:

$$\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} = \sin\theta$$

USANDO MATLAB

- A função ‘[R,p,k]=**residue**(N,D)’, onde:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{R_n}{s-p_n} + \ldots + \frac{R_2}{s-p_2} + \frac{R_1}{s-p_1} + k(s)$$

- Parâmetros de entrada:

  N é o vetor que contêm os coeficientes de $N(s)$,

  $N = [b_m \quad b_{m-1} \quad \ldots \quad b_1 \quad b_0];$

  D é o vetor que contêm os coeficientes de $D(s)$,

  $D = [a_n \quad a_{n-1} \quad \ldots \quad a_1 \quad a_0];$

- Parâmetros de saída:

  R é o vetor que contêm os resíduos,

  $R = [R_n \quad R_{n-1} \quad \ldots \quad R_1 \quad R_0];$

  P é o vetor que relaciona os pólos (raízes de $D(s)$),

  $p = [p_n \quad p_{n-1} \quad \ldots \quad p_1 \quad p_0];$

  e k corresponde ao (eventual) polinômio resultante (quando $\text{grau}\{N(s)\} > \text{grau}\{D(s)\}$; na maioria das vezes k=[ ]).

Exemplo1: $F(s) = \dfrac{2}{s^2 + 3s + 2}$

```
>> N=2;
>> D=[1 3 2];
>> [R,p,k]=residue(N,D)
R =
   -2
    2
p =
   -2
   -1
k =
    []
>>
```

Ou seja:

$$F(s) = -\frac{2}{(s+2)} + \frac{2}{(s+1)} + 0$$

```
>> roots(D)
ans =
   -2
   -1
>>
```

USANDO MATLAB

- A função '[R,p,k]=**residue**(N,D)', onde:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{R_n}{s-p_n} + \ldots + \frac{R_2}{s-p_2} + \frac{R_1}{s-p_1} + k(s)$$

- Parâmetros de entrada:

  N é o vetor que contêm os coeficientes de $N(s)$,

  $N = [b_m \quad b_{m-1} \quad \ldots \quad b_1 \quad b_0];$

  D é o vetor que contêm os coeficientes de $D(s)$,

  $D = [a_n \quad a_{n-1} \quad \ldots \quad a_1 \quad a_0];$

- Parâmetros de saída:

  R é o vetor que contêm os resíduos,

  $R = [R_n \quad R_{n-1} \quad \ldots \quad R_1 \quad R_0];$

  P é o vetor que relaciona os pólos (raízes de $D(s)$),

  $p = [p_n \quad p_{n-1} \quad \ldots \quad p_1 \quad p_0];$

  e k corresponde ao (eventual) polinômio resultante (quando grau$\{N(s)\} >$ grau$\{D(s)\}$; na maioria das vezes k=[ ]).

Exemplo2: $F(s) = \dfrac{2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$

```
>> N=2;
>> D=[1    5    8    4];
>> roots(D)
ans =
        -2
        -2
        -1
```

Ou seja:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+2)^2} + \frac{R_3}{(s+2)}$$

```
>> [R,p,k]=residue(N,D)
R =
        -2
        -2
         2
p =
        -2
        -2
        -1
k =
    []
```

Ou seja:

$$F(s) = -\frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)} + \frac{2}{(s+1)}$$

USANDO MATLAB

- A função '[R,p,k]=**residue**(N,D)', onde:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{R_n}{s-p_n} + \ldots + \frac{R_2}{s-p_2} + \frac{R_1}{s-p_1} + k(s)$$

- Parâmetros de entrada:

  N é o vetor que contêm os coeficientes de $N(s)$,

  $N = [b_m \quad b_{m-1} \quad \ldots \quad b_1 \quad b_0];$

  D é o vetor que contêm os coeficientes de $D(s)$,

  $D = [a_n \quad a_{n-1} \quad \ldots \quad a_1 \quad a_0];$

- Parâmetros de saída:

  R é o vetor que contêm os resíduos,

  $R = [R_n \quad R_{n-1} \quad \ldots \quad R_1 \quad R_0];$

  P é o vetor que relaciona os pólos (raízes de $D(s)$),

  $p = [p_n \quad p_{n-1} \quad \ldots \quad p_1 \quad p_0];$

  e k corresponde ao (eventual) polinômio resultante (quando grau$\{N(s)\}$ > grau$\{D(s)\}$; na maioria das vezes k=[ ]).

Exemplo3: $F(s) = \dfrac{3}{s(s^2+2s+5)}$

```
>> N=3;
>> D=[1    2    5    0];
>> roots(D)
ans =
      0 +       0i
     -1 +       2i
     -1 -       2i
```

Ou seja:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+1+j2)} + \frac{R_3}{(s+1-j2)}$$

```
>> [R,p,k]=residue(N,D)
R =
    -0.3 +     0.15i
    -0.3 -     0.15i
     0.6 +        0i
p =
     -1 +       2i
     -1 -       2i
      0 +       0i
k =
   []
```

Ou seja:

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \left(\frac{(3/10)+j(1{,}5/10)}{s+1+j2} + \frac{(3/10)-j(1{,}5/10)}{s+1-j2}\right)$$

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{20}\left(\frac{2+j1}{s+1+j2} + \frac{2-j1}{s+1-j2}\right)$$

$$0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \qquad 0{,}15 = \frac{15}{100} = \frac{1{,}5}{10}$$

USANDO MATLAB

- Função: 'ilaplace(F)' :
  retorna a Transformada Inversa de Laplace de F. Por padrão, a variável independente é *s* e a variável transformada é *t*. É esperado que *F* contenha a variável s do tipo 'syms', caso contrário, `ilaplace` usará a função `symvar` para avaliar a expressão *F*.

- Exemplo1:

$$F(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

```
>> roots([1 3 2])
ans =
    -2
    -1
>> syms s
>> F=2/(s^2+3*s+2)
F =
2/(s^2 + 3*s + 2)
>> f=ilaplace(F)
f =
2*exp(-t) - 2*exp(-2*t)
>> pretty(f)
2 exp(-t) - exp(-2 t) 2

>>
```

$$y(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$$

- Exemplo2:

$$F(s) = \frac{2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

```
>> roots([1 5 8 4])
ans =
          -2
          -2
          -1
>> syms s
>> F=2/(s^3+5*s^2+8*s+4);
>> f=ilaplace(F);
>> pretty(f)
2 exp(-t) - exp(-2 t) 2 - t exp(-2 t) 2

>>
```

$$y(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} - 2te^{-2t}$$

- Exemplo3:

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

```
>> roots([1 2 5 0])
ans =
        0 +        0i
       -1 +        2i
       -1 -        2i
>> syms s
>> F=3/(s^3+2*s^2+5*s);
>> f=ilaplace(F);
>> pretty(f)
          /            sin(2 t) \
   exp(-t) | cos(2 t) + -------- | 3
3          \               2     /
- - --------------------------------
5               5

>>
```

$$y(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{\sin 2t}{2}\right)$$

+ EXEMPLOS

- Seja a função transferência de um sistema dado por: $G(s) = \dfrac{s+3}{s^2+7s+10}$; encontre sua resposta quando o mesmo é submetido a uma entrada degrau.

- *Solução:*

$$Y(s) = U(s) \cdot G(s)$$

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^3+7s^2+10s} = \frac{s+3}{s(s^2+7s+10)}$$

Cujas raízes estão em: $s = 0$, $s = -2$ *e* $s = -5$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9$$

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \pm 3}{2 \cdot 1}$$

Então $Y(s)$ pode ser re-escrito para:

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^3+7s^2+10s} = \frac{s+3}{s(s+2)(s+5)}$$

$$Y(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s+5}$$

Encontrando os resíduos:

$$R_1 = F(s)\, s\Big|_{s=0} = \frac{\cancel{s}(s+3)}{\cancel{s}(s+2)(s+5)}\Big|_{s=0} = \frac{3}{(2)(5)} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$R_2 = F(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{\cancel{(s+2)}(s+5)}{s\cancel{(s+2)}(s+5)}\Big|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(3)} = -\frac{1}{6} = -0{,}16667$$

$$R_3 = F(s)(s+5)\Big|_{s=-5} = \frac{(s+3)\cancel{(s+5)}}{s(s+2)\cancel{(s+5)}}\Big|_{s=-5} = \frac{-2}{(-5)(-3)} = -\frac{2}{15} = -0{,}13333$$

Então:

$$Y(s) = \left(\frac{3}{10}\right)\frac{1}{s} - \left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{s+2} - \left(\frac{2}{15}\right)\frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \left(\frac{3}{10}\right) - \left(\frac{1}{6}\right)e^{-2t} - \left(\frac{2}{15}\right)e^{-5t}$$

+ EXEMPLOS

- Seja a função transferência de um sistema dado por: $G(s) = \dfrac{s+3}{s^2+7s+10}$; encontre sua resposta quando o mesmo é submetido a uma entrada degrau.
- *Solução:*

$$Y(s) = U(s) \cdot G(s)$$

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^3+7s^2+10s} = \frac{s+3}{s(s^2+7s+10)}$$

Cujas raízes estão em: $s = 0$, $s = -2$ *e* $s = -5$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9$$

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \pm 3}{2 \cdot 1}$$

Então $Y(s)$ *pode ser re-escrito para:*

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^3+7s^2+10s} = \frac{s+3}{s(s+2)(s+5)}$$

$$Y(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s+5}$$

Encontrando os resíduos:

$$R_1 = F(s)\, s \Big|_{s=0} = \frac{\cancel{s}(s+3)}{\cancel{s}(s+2)(s+5)}\Bigg|_{s=0} = \frac{3}{(2)(5)} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$R_2 = F(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{\cancel{(s+2)}(s+5)}{s\cancel{(s+2)}(s+5)}\Bigg|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(3)} = -\frac{1}{6} = -0{,}16667$$

$$R_3 = F(s)(s+5)\Big|_{s=-5} = \frac{(s+3)\cancel{(s+5)}}{s(s+2)\cancel{(s+5)}}\Bigg|_{s=-5} = \frac{-2}{(-5)(-3)} = -\frac{2}{15} = -0{,}13333$$

Então:

$$Y(s) = \left(\frac{3}{10}\right)\frac{1}{s} - \left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{s+2} - \left(\frac{2}{15}\right)\frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \left(\frac{3}{10}\right) - \left(\frac{1}{6}\right)e^{-2t} - \left(\frac{2}{15}\right)e^{-5t}$$

+ EXEMPLOS

- Seja a função transferência de um sistema dado por: $G(s) = \dfrac{s+3}{s^2+7s+10}$; encontre sua resposta quando o mesmo é submetido a uma entrada degrau.

Usando Matlab:

```
>> N=[1 3];
>> D=[1 7 10 0];
>> roots(D)
ans =
     0
    -5
    -2
>> [R,p,k]=residue(N,D)
R =
     -0.13333
     -0.16667
          0.3
p =
    -5
    -2
     0
k =
     []
```

```
>> syms s
>> Y=(s+3)/(s^3+7*s^2+10*s)
>> y=ilaplace(Y);
>> pretty(y)
 3   exp(-5 t) 2   exp(-2 t)
-- - ----------- - ---------
10        15            6
>>
```

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^3+7s^2+10s} = \frac{s+3}{s(s+2)(s+5)}$$

$$Y(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s+5}$$

Encontrando os resíduos:

$$R_1 = F(s)\, s \Big|_{s=0} = \frac{\cancel{s}(s+3)}{\cancel{s}(s+2)(s+5)}\Big|_{s=0} = \frac{3}{(2)(5)} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$R_2 = F(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{\cancel{(s+2)}(s+5)}{s\cancel{(s+2)}(s+5)}\Big|_{s=-2} = \frac{1}{(-2)(3)} = -\frac{1}{6} = -0{,}16667$$

$$R_3 = F(s)(s+5)\Big|_{s=-5} = \frac{(s+3)\cancel{(s+5)}}{s(s+2)\cancel{(s+5)}}\Big|_{s=-5} = \frac{-2}{(-5)(-3)} = -\frac{2}{15} = -0{,}13333$$

Então:

$$Y(s) = \left(\frac{3}{10}\right)\frac{1}{s} - \left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{s+2} - \left(\frac{2}{15}\right)\frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \left(\frac{3}{10}\right) - \left(\frac{1}{6}\right)e^{-2t} - \left(\frac{2}{15}\right)e^{-5t}$$

+ EXEMPLOS

- Encontre $y(t)$ para:

$$Y(s) = \frac{s+3}{s(s+2)^2(s+5)}$$

- Solução:

Neste caso:

$$Y(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+2)^2} + \frac{R_3}{s+2} + \frac{R_4}{s+5}$$

$$R_1 = sY(s)\Big|_{s=0} = \frac{\cancel{s}(s+3)}{\cancel{s}(s+2)^2(s+5)}\Bigg|_{s=0} = \frac{3}{(4)(5)} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

$$R_2 = (s+2)^2 Y(s) = \frac{\cancel{(s+2)}(s+3)}{s\cancel{(s+2)}(s+5)}\Bigg|_{s=-2}$$

$$R_2 = \frac{1}{(-2)(3)} = -\frac{1}{6}$$

$$R_3 = \frac{d}{ds}\left[(s+2)^2\ Y(s)\right]\Bigg|_{s=-2}$$

$$R_3 = \frac{d}{ds}\left[\frac{s+3}{s(s+5)}\right]\Bigg|_{s=-2} = \frac{s(s+5)-(s+3)(2s+5)}{[s(s+5)]^2}\Bigg|_{s=-2}$$

$$R_3 = -\frac{7}{36} = -0{,}19444$$

$$R_4 = (s+5)Y(s)\Big|_{s=-5} = \frac{(s+3)\cancel{s+5)}}{s(s+2)^2\cancel{(s+5)}}\Bigg|_{s=-5} = \frac{-2}{(-5)(9)} = \frac{2}{45} = 0{,}044444$$

$$Y(s) = \left(\frac{3}{20}\right)\frac{1}{s} - \left(\frac{7}{36}\right)\frac{1}{s+2} - \left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{(s+2)^2} + \left(\frac{2}{45}\right)\frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \frac{3}{20} - \left(\frac{7}{36}\right)e^{-2t} - \left(\frac{1}{6}\right)te^{-2t} + \left(\frac{2}{45}\right)e^{-5t}$$

+ EXEMPLOS

- Encontre $y(t)$ para:

$$Y(s) = \frac{s+3}{s(s+2)^2(s+5)}$$

- Solução:

```
Usando Matlab:
>> N=[1 3];
>> D=poly([0 -2 -2 -5]);
>>
[R,p,k]=residue(N,D)
R =
     0.044444
     -0.19444
     -0.16667
         0.15
p =
           -5
           -2
           -2
            0
k =
     []
```

```
>>
>> syms s
>> Y=(s+3)/(s*(s+2)^2*(s+5))
Y =
(s + 3)/(s*(s + 2)^2*(s + 5))
>> pretty(Y)
       s + 3
------------------
         2
s (s + 2)  (s + 5)

>> y=ilaplace(Y);
>> pretty(y)
exp(-5 t) 2   exp(-2 t) 7   t exp(-2 t)    3
----------- - ----------- - ----------- + --
    45            36             6        20
>>
```

$$R_3 = \frac{d}{ds}\left[(s+2)^2\ Y(s)\right]\Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = \frac{d}{ds}\left[\frac{s+3}{s(s+5)}\right]\Big|_{s=-2} = \frac{s(s+5)-(s+3)(2s+5)}{[s(s+5)]^2}\Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = -\frac{7}{36} = -0{,}19444$$

$$R_4 = (s+5)Y(s)\Big|_{s=-5} = \frac{(s+3)\cancel{(s+5)}}{s(s+2)^2\cancel{(s+5)}}\Big|_{s=-5} = \frac{-2}{(-5)(9)} = \frac{2}{45} = 0{,}044444$$

$$Y(s) = \left(\frac{3}{20}\right)\frac{1}{s} - \left(\frac{7}{36}\right)\frac{1}{s+2} - \left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{(s+2)^2} + \left(\frac{2}{45}\right)\frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \frac{3}{20} - \left(\frac{7}{36}\right)e^{-2t} - \left(\frac{1}{6}\right)te^{-2t} + \left(\frac{2}{45}\right)e^{-5t}$$

+ EXEMPLOS

- Encontre $f(t)$ para:

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s^2+4s+5)}$$

- Solução:

```
>> roots([1 4 5])
ans =
        -2 +        1i
        -2 -        1i
```

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s+2-j)(s+2+j)}$$

$$F(s) = \frac{R_1}{s+5} + \frac{R_2}{s+2-j} + \frac{R_3}{s+2+j}$$

$$R_1 = (s+5)F(s)\Big|_{s=-5}$$

$$R_2 = (s+2-j)F(s)\Big|_{s=-2+j}$$

$$R_3 = (s+2+j)F(s)\Big|_{s=-2-j} = R_2^*$$

$$R_1 = \frac{s+3}{s^2+4s+5}\Bigg|_{s=-5} = -\,0{,}2$$

$$R_2 = \frac{s+3}{(s+5)(s+2+j)}\Bigg|_{s=-2+j} = \frac{-2+j+3}{(-2+j+5)(-2+j+2+j)}$$

$$R_2 = 0{,}1 - j0{,}2$$

$$R_3 = R_2^* = 0{,}1 + j0{,}2$$

$$F(s) = -\frac{0{,}2}{s+5} + \frac{0{,}1-j0{,}2}{s+2-j} + \frac{0{,}1+j0{,}2}{s+2+j}$$

$$f(t) = -\,0{,}2e^{-5t} + \left(0{,}1-j0{,}2\right)e^{(-2+j)t} + \left(0{,}1+j0{,}2\right)e^{(-2-j)t}$$

$$f(t) = -\,0{,}2e^{-5t} + e^{-2t}\left[0{,}1\left(e^{jt}+e^{-jt}\right) - j0{,}2\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)\right]$$

$$f(t) = -\,0{,}2e^{-5t} + e^{-2t}\left[0{,}2\frac{(e^{jt}+e^{-jt})}{2} + 0{,}4\frac{(e^{jt}-e^{-jt})}{j2}\right]$$

$$f(t) = 0{,}2e^{-5t} + e^{-2t}\left(0{,}2\cos t + 0{,}4\sin t\right)$$

$$f(t) = 0{,}2e^{-5t} + e^{-2t}\sqrt{0{,}2^2+0{,}4^2}\cos(t+\phi)$$

$$f(t) = -\,0{,}2e^{-5t} + 0{,}44721e^{-2t}\cos(t+\phi)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}2}{0{,}1}\right) = 63{,}4^o$$

Lembrando que:

$$\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} = \cos\theta$$

e:

$$\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} = \sin\theta$$

+ EXEMPLOS

- Encontre $f(t)$ para:

  $$F(s) = \frac{s+3}{(s+5)(s^2+4s+5)}$$

- Solução:

Note:

$$\frac{R_2}{(s+2-j)} + \frac{R_3}{(s+2+j)} = \frac{Ke^{j\phi}}{(s+2-j)} + \frac{Ke^{-j\phi}}{(s+2+j)}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{Ke^{j\phi}}{(s+2-j)} + \frac{Ke^{-j\phi}}{(s+2+j)}\right] =$$

$$= Ke^{j\phi}e^{-(2-j)t} + Ke^{-j\phi}e^{-(2+j)t}$$

$$= Ke^{-2t}\left[e^{j(t+\phi)} + e^{-j(t+\phi)}\right]$$

$$= 2Ke^{-2t}\frac{\left[e^{j(t+\phi)} + e^{-j(t+\phi)}\right]}{2}$$

$$= Me^{-2t}\cos(t+\phi)$$

$$= Me^{\sigma t}\cos(\omega t+\phi)$$

$$K = |R_2| = |R_3| = \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}2^2} = 0{,}224$$

$$\phi = \angle K = \tan^{-1}(0{,}2/0{,}1) = 63{,}4^o$$

$$M = 2K = 0{,}448$$

$$R_2 = \left.\frac{s+3}{(s+5)(s+2+j)}\right|_{s=-2+j} = \frac{-2+j+3}{(-2+j+5)(-2+j+2+j)}$$

$$R_2 = 0{,}1 - j0{,}2$$

$$R_3 = R_2^* = 0{,}1 + j0{,}2$$

$$F(s) = -\frac{0{,}2}{s+5} + \frac{0{,}1-j0{,}2}{s+2-j} + \frac{0{,}1+j0{,}2}{s+2+j}$$

$$f(t) = -0{,}2e^{-5t} + \left(0{,}1 - j0{,}2\right)e^{(-2+j)t} + \left(0{,}1 + j0{,}2\right)e^{(-2-j)t}$$

$$f(t) = -0{,}2e^{-5t} + e^{-2t}\left[0{,}1\left(e^{jt}+e^{-jt}\right) - j0{,}2\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)\right]$$

$$f(t) = -0{,}2e^{-5t} + e^{-2t}\left[0{,}2\frac{(e^{jt}+e^{-jt})}{2} + 0{,}4\frac{(e^{jt}-e^{-jt})}{j2}\right]$$

$$f(t) = 0{,}2e^{-5t} + e^{-2t}\left(0{,}2\cos t + 0{,}4\sin t\right)$$

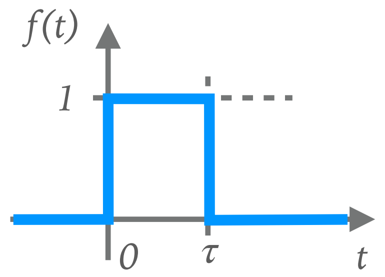
$$f(t) = 0{,}2e^{-5t} + e^{-2t}\sqrt{0{,}2^2 + 0{,}4^2}\cos(t+\phi)$$

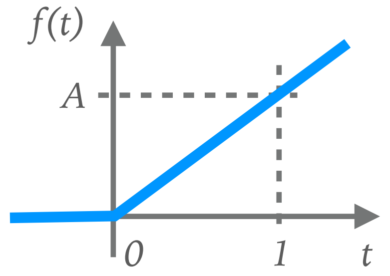
$$f(t) = -0{,}2e^{-5t} + 0{,}44721e^{-2t}\cos(t+\phi)$$

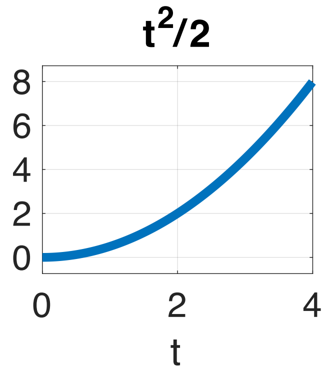
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}2}{0{,}1}\right) = 63{,}4^o$$

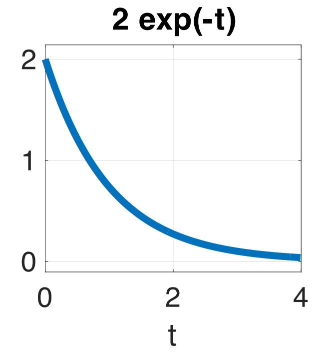
TABELA (AUMENTADA) DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

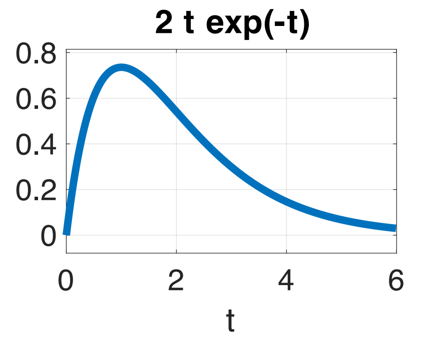
#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
1.	Impulso	$\delta(t)$	1
2.	Degrau	$A \cdot u(t)$	$A \cdot \frac{1}{s}$
3.	Degrau com atraso no tempo	$u(t-\tau)$	$\frac{e^{-s\tau}}{s}$
4.	Pulso retangular (duração τ)		$\frac{1-e^{-s\tau}}{s}$
5.	Rampa (reta)	$A \cdot t \cdot u(t)$	$\frac{A}{s^2}$
6.	Função Quadrática	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$
7.	Polinômio	$t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{s^n+1}$
8.	Exponencial	$B \cdot e^{-(a \cdot t)} \cdot u(t)$	$\frac{B}{s+a}$
9.	Tempo $\times$ exponencial	$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
		$t^2 e^{-at}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$
10.	Exponencial assintótica	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)}$
		$t-\frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$
		$1-e^{-at}-ate^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$
		$(1-at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$

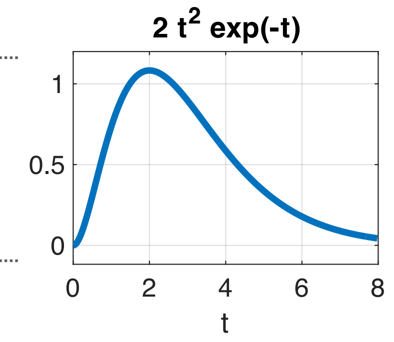


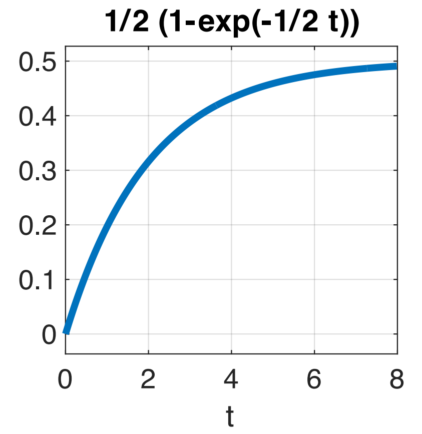


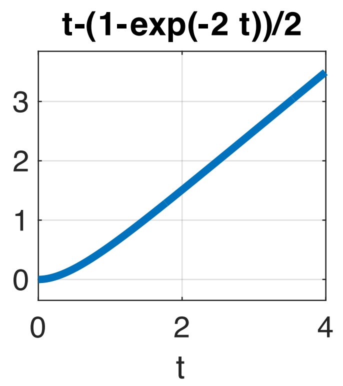


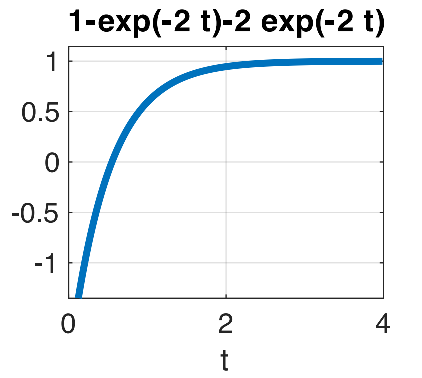












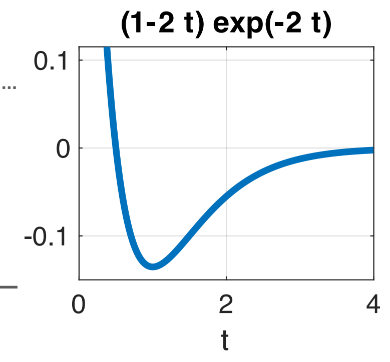
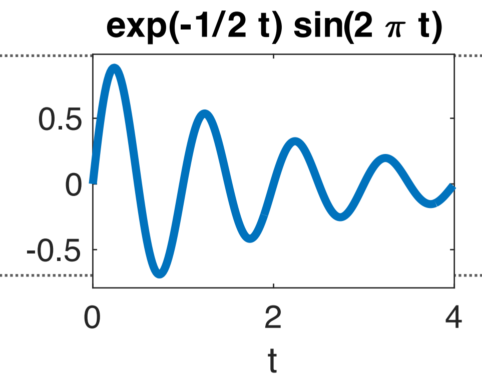
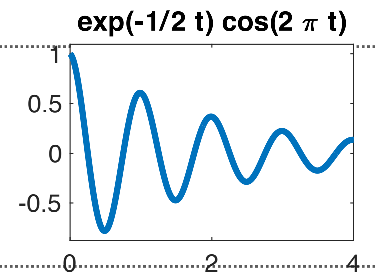
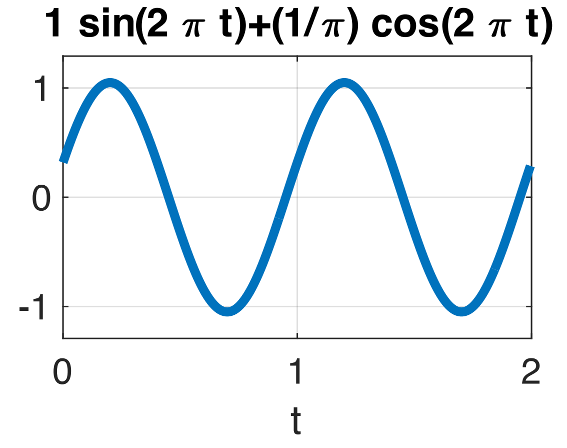


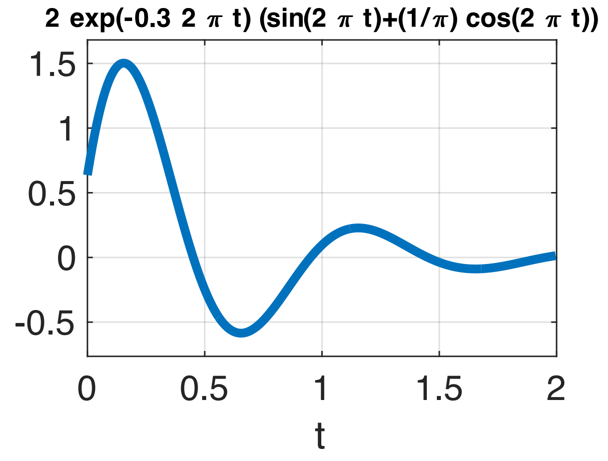
TABELA (AUMENTADA) DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

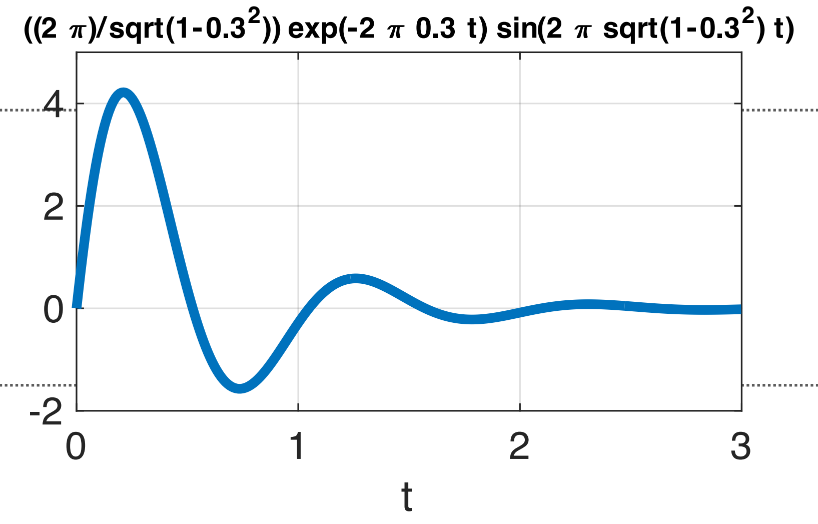
#	Obs.	$f(t)$	$F(s)$
11.	Senóide	$\sin(\omega t)\cdot u(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
12.	Cosseno	$\cos(\omega t)\, u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
13.	Senoide amortecida	$e^{-at}\sin(\omega_d t)$	$\dfrac{\omega_d}{(s+a)^2+\omega_d^2}$
14.	Cosseno amortecido	$e^{-at}\cos(\omega_d t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_d^2}$
15.	Oscilação amortecida	$e^{-at}\left[B\cos(\omega_d t)+\dfrac{C-aB}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]$	$\dfrac{Bs+C}{(s+a)^2+\omega_d^2}$
16.	Oscilação amortecida	$Me^{-at}\cos(\omega_d t+\phi)$ $M=\sqrt{B^2+\left(\dfrac{C-aB}{\omega_d}\right)^2}$ $\phi=-\operatorname{atan}\left(\dfrac{C-aB}{B\omega_d}\right)=-\operatorname{atan2}(C-aB,B\omega_d)$	$\dfrac{Bs+C}{(s+a)^2+\omega_d^2}$
17.		$\dfrac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega t}\sin\left[\omega\sqrt{(1-\zeta^2)}\;t\right]$	$\dfrac{\omega^2}{s^2+2\zeta\omega s+\omega^2}$
18.		$1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega t}\sin\left[\omega\sqrt{(1-\zeta^2)}\;t+\phi\right]$ (para $\zeta=\cos\phi$)	$\dfrac{\omega^2}{s(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)}$ (para $\zeta<1$)

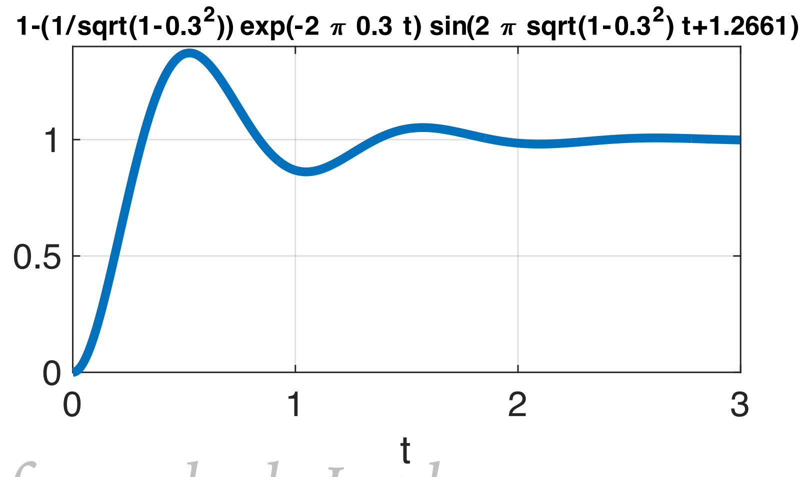












+ EXEMPLOS

- Encontre $y(t)$ para:

  $$Y(s) = \frac{s+3}{s(s+2)^2(s+5)}$$

- Solução:

Neste caso:

$$Y(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{(s+2)^2} + \frac{R_3}{s+2} + \frac{R_4}{s+5}$$

$$R_1 = sY(s)\Big|_{s=0} = \frac{\cancel{s}(s+3)}{\cancel{s}(s+2)^2(s+5)}\Big|_{s=0} = \frac{3}{(4)(5)} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

$$R_2 = (s+2)^2 Y(s) = \frac{\cancel{(s+2)}(s+3)}{s\cancel{(s+2)}(s+5)}\Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = \frac{d}{ds}\left[(s+2)^2\ Y(s)\right]\Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = \frac{d}{ds}\left[\frac{s+3}{s(s+5)}\right]\Big|_{s=-2} = \frac{s(s+5)-(s+3)(2s+5)}{[s(s+5)]^2}\Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = -\frac{7}{36} = -\,0{,}19444$$

$$R_4 = (s+5)Y(s)\Big|_{s=-5} = \frac{(s+3)\cancel{s+5)}}{s(s+2)^2\cancel{(s+5)}}\Big|_{s=-5} = \frac{-2}{(-5)(9)} = \frac{2}{45} = 0{,}044444$$

$$Y(s) = \left(\frac{3}{20}\right)\frac{1}{s} - \left(\frac{7}{36}\right)\frac{1}{s+2} - \left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{(s+2)^2} + \left(\frac{2}{45}\right)\frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \frac{3}{20} - \left(\frac{7}{36}\right)e^{-2t} - \left(\frac{1}{6}\right)te^{-2t} + \left(\frac{2}{45}\right)e^{-5t}$$

+ EXEMPLOS

- Encontre $y(t)$ para:

$$Y(s) = \frac{s+3}{s(s+2)^2(s+5)}$$

- Solução:

```
Usando Matlab:
>> N=[1 3];
>> D=poly([0 -2 -2 -5]);
>> [R,p,k]=residue(N,D)
R =
     0.044444
     -0.19444
     -0.16667
         0.15
p =
           -5
           -2
           -2
            0
k =
     []
```

```
>>
>> syms s
>> Y=(s+3)/(s*(s+2)^2*(s+5))
Y =
(s + 3)/(s*(s + 2)^2*(s + 5))
>> pretty(Y)
         s + 3
------------------
            2
s (s + 2)  (s + 5)

>> y=ilaplace(Y);
>> pretty(y)
exp(-5 t) 2   exp(-2 t) 7   t exp(-2 t)    3
----------- - ----------- - ----------- + --
    45            36             6        20
>>
```

$$R_3 = \frac{d}{ds}\left[(s+2)^2\ Y(s)\right]\Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = \frac{d}{ds}\left[\frac{s+3}{s(s+5)}\right]\Big|_{s=-2} = \frac{s(s+5)-(s+3)(2s+5)}{[s(s+5)]^2}\Big|_{s=-2}$$

$$R_3 = -\frac{7}{36} = -\,0{,}19444$$

$$R_4 = (s+5)Y(s)\Big|_{s=-5} = \frac{(s+3)\cancel{(s+5)}}{s(s+2)^2\cancel{(s+5)}}\Big|_{s=-5} = \frac{-2}{(-5)(9)} = \frac{2}{45} = 0{,}044444$$

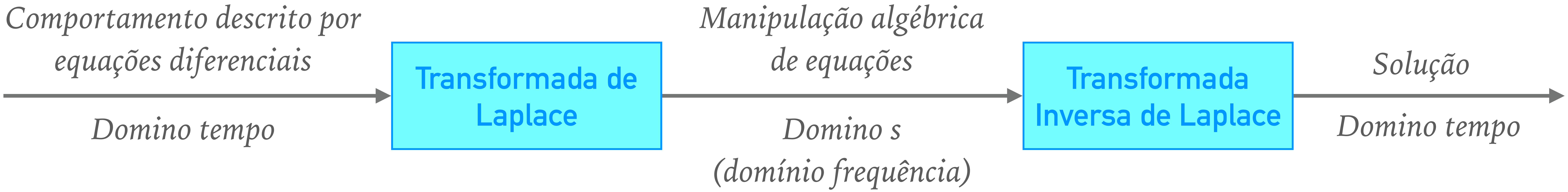
$$Y(s) = \left(\frac{3}{20}\right)\frac{1}{s} - \left(\frac{7}{36}\right)\frac{1}{s+2} - \left(\frac{1}{6}\right)\frac{1}{(s+2)^2} + \left(\frac{2}{45}\right)\frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \frac{3}{20} - \left(\frac{7}{36}\right)e^{-2t} - \left(\frac{1}{6}\right)te^{-2t} + \left(\frac{2}{45}\right)e^{-5t}$$

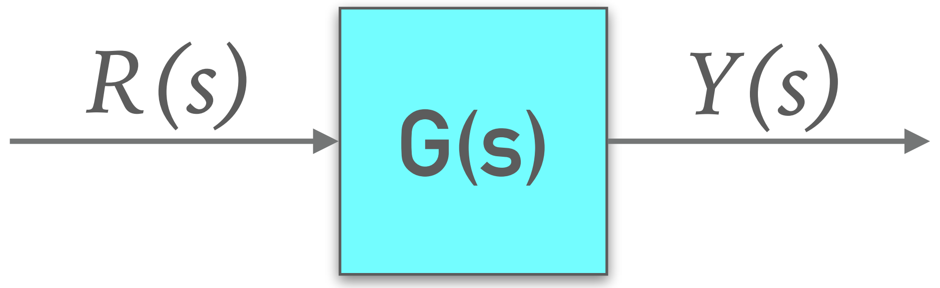
REVISANDO A FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA

- Um sistema de n-ésima ordem, linear, invariante no tempo, pode ser descrito pela equação diferencial:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$



$$\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0\right) R(s)$$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad \therefore \quad Y(s) = R(s)G(s)$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}$$

EXEMPLOS DE USO:

- Ex_1: Encontre a função transferência para:

$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = u(t).$$

- *Solução:*

$$sC(s) + 2C(s) = U(s)$$

A função transferência, $G(s)$, fica então:

$$G(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+2}$$

EXEMPLOS DE USO:

- Ex_1: Encontre a função transferência para:

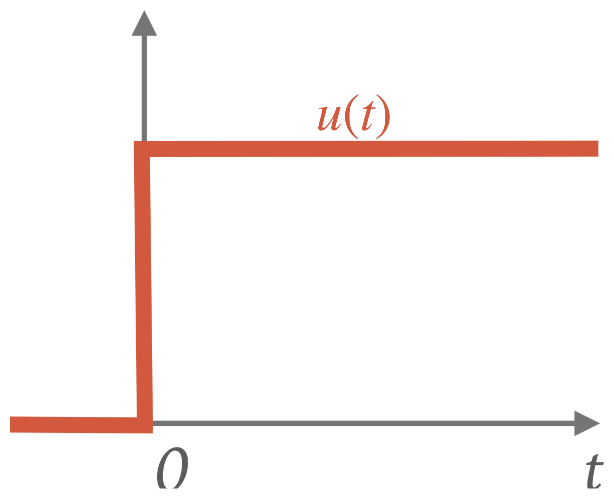
$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = u(t).$$

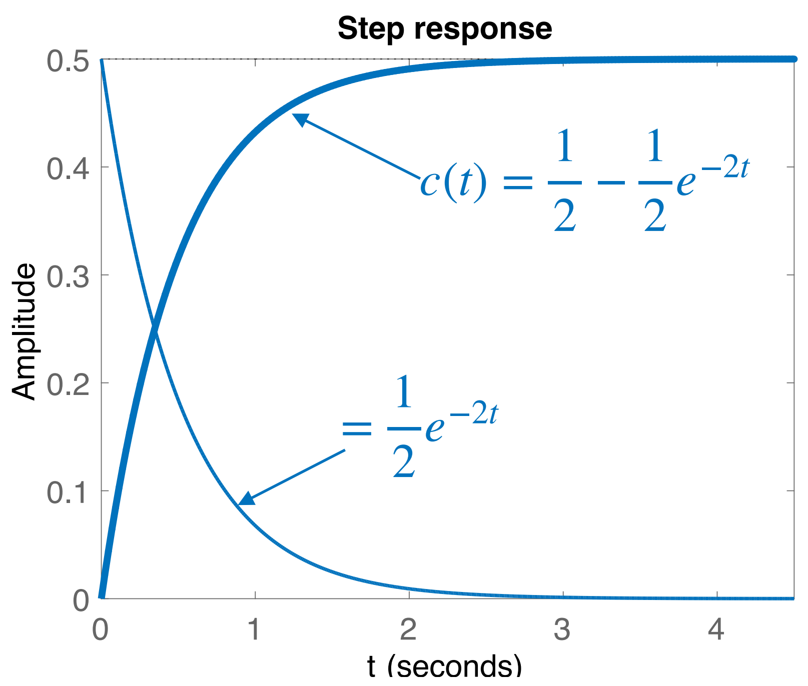
- *Solução:*

$$sC(s) + 2C(s) = U(s)$$

A função transferência, $G(s)$, fica então:

$$G(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+2}$$





- Ex_2: Encontre o resultado para $c(t)$, quando este sistema é submetido a uma entrada degrau.
- *Solução:*

$$C(s) = U(s) \cdot G(s)$$

A transformada de Laplace de um degrau é: $U(s) = 1/s$, então:

$$C(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

A expansão da expressão anterior leva à:

$$C(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2}$$

Realizando a transformada inversa de Laplace, encontramos $c(t)$:

$$c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$