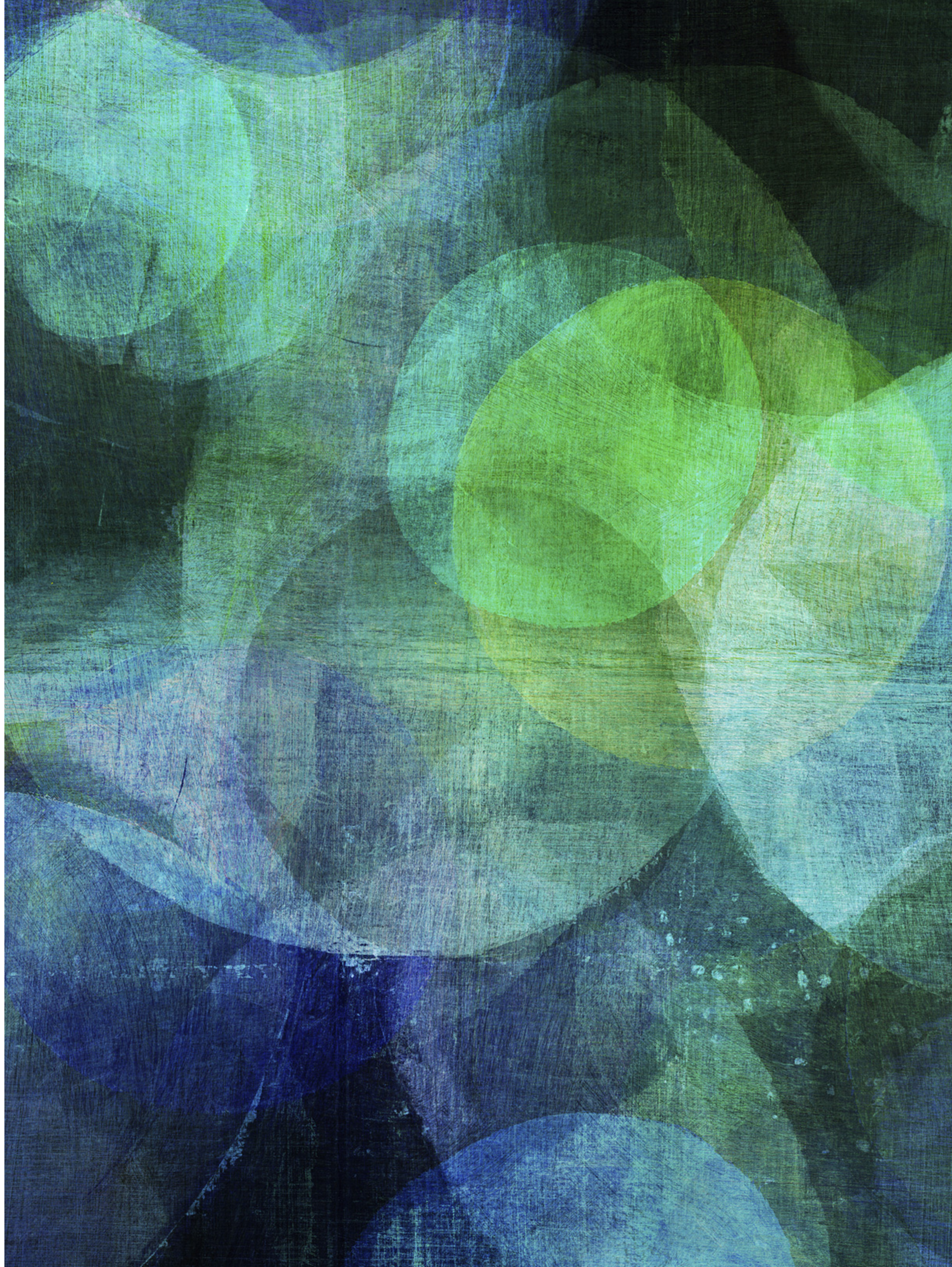
2) MODELAGEM MATEMÁTICA
PARTE II

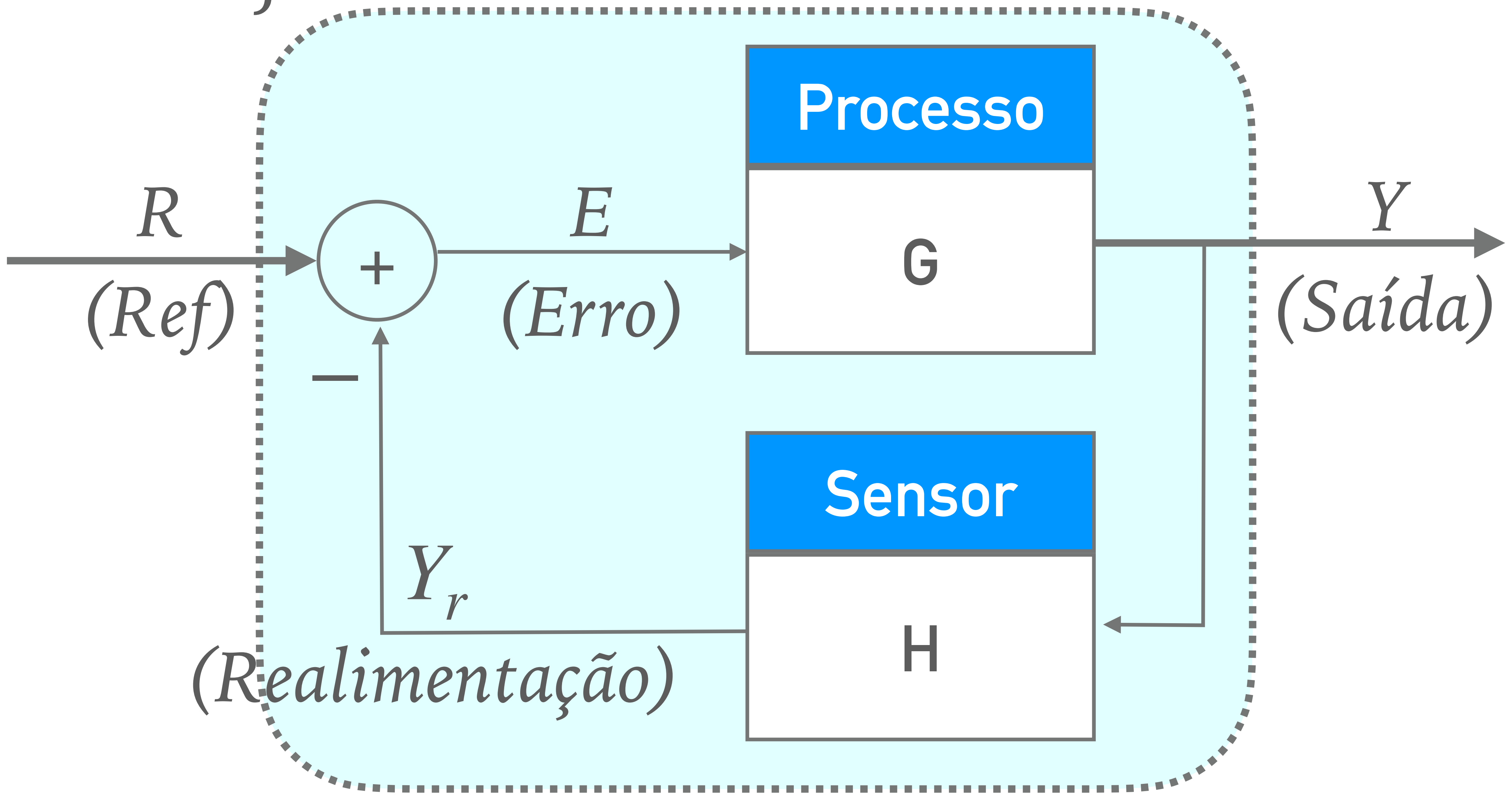
Controle Automático I
Prof. Fernando Passold
2022

REVISÕES

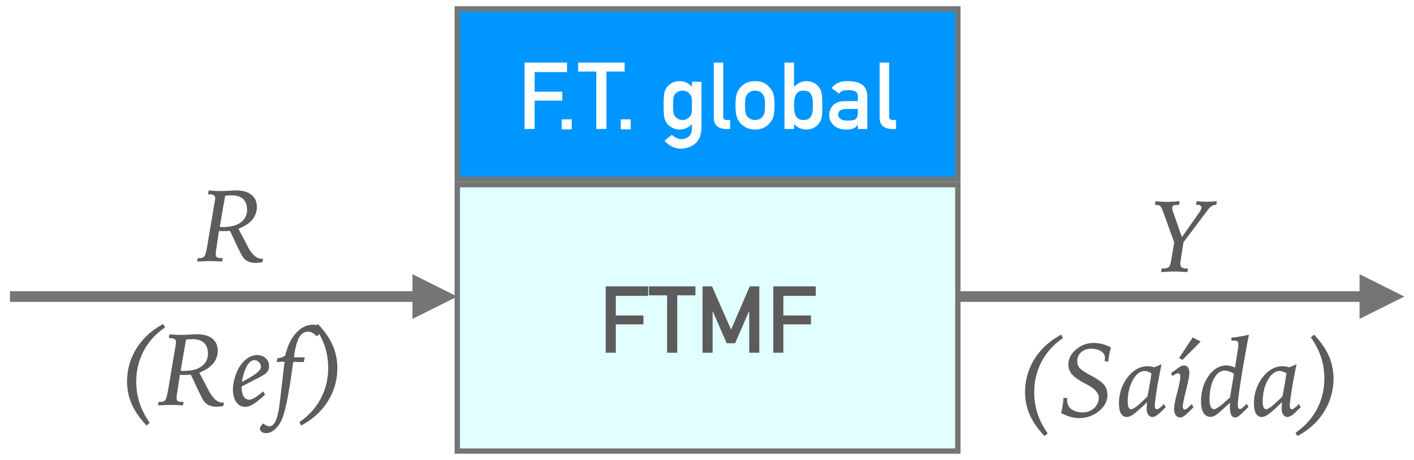


FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA DE MALHA-FECHADA

- Seja:



Deseja-se obter o sistema equivalente em MF, ou seja:



Dedução:

(1) $Y = E \cdot G$

(2) $E = R - Y_r$

(3) $Y_r = Y \cdot H$

Substituindo-se (3) em (2):

(4) $E = R - Y \cdot H$

Substituindo-se (4) em (1):

$$Y = [R - Y \cdot H]\, G$$

$$Y = R \cdot G - Y \cdot H \cdot G$$

Isolando Y:

$$Y \left[1 + H \cdot G\right] = R \cdot G$$

Como queremos $\dfrac{Y}{R}$:

$$FTMF = \frac{Y}{R} = \frac{G}{1 + H \cdot G}$$

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

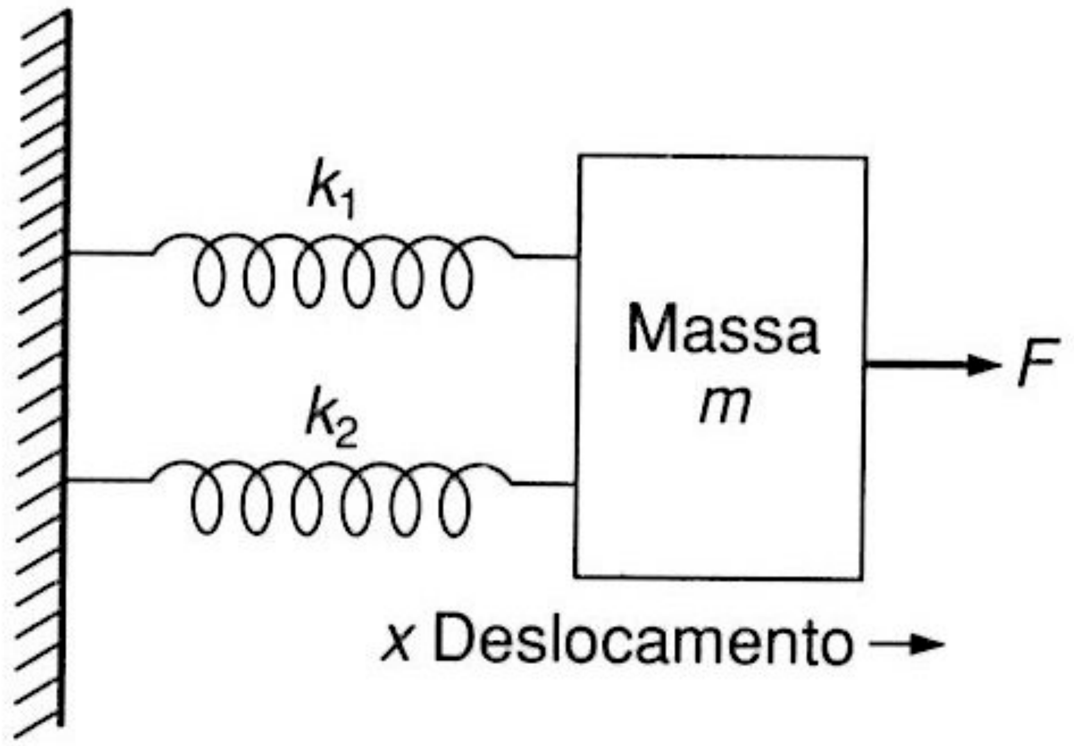
	Unidade	Símbolo	Variável
Comprimento	Metro	m	x
Massa	Quilograma	Kg	m
Tempo	Segundo	s	t
Temperatura	Kelvin	K	
Corrente elétrica	Ampère	A	i
Velocidade	Metros por segundo	m/s	$v = \dot{x}$
Área	Metro quadrado	m^2	
Força	Newton	$N = kg.m/s^2$	F
Torque	Quilogrâmetro	kg.m	T
Pressão	Pascal	Pa	
Energia	Joule	J=Nm	E
Potência	Watt	W=J/s	P

RESUMO EQUAÇÕES BLOCOS MECÂNICOS

Bloco	Equação	Energia	
Mola translacional	$F = k\,x$	$E = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{F^2}{k}$	*Armazenamento de energia*
Mola torcional	$T = k\,\theta$	$E = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{T^2}{k}$	
Massa	$F = m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = m\,\ddot{x}$	$E = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2 = \dfrac{m\ddot{x}}{2}$	
Momento de Inércia	$T = I\,\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = I\,\ddot{\theta}$	$E = \dfrac{1}{2}\,I\,\omega^2 = \dfrac{1}{2}\,I\,\ddot{\theta}^2$	
Amortecimento translacional	$F = c\,\dfrac{dx}{dt} = c\,\dot{x}$	$P = c\,v^2 = c\,\ddot{x}$	*Dissipação de energia*
Amortecimento rotacional	$T = c\,\dfrac{d\theta}{dt} = c\,\dot{\theta}$	$P = c\,\omega^2 = c\,\ddot{\theta}^2$	

MODELANDO SISTEMAS MECÂNICOS

- Ex_1: Determine a eq. Diferencial que descreva as relações entre a entrada de força e as saída de deslocamento x para o sistema mostrado ao lado.



Solução:

O conjunto de forças aplicadas à massa é F menos as forças resistentes exercidas por cada uma das moas, então:

Somatório de forças $= F - k_1x - k_2x$

Se o somatório de forças causa alguma aceleração da massa, então:

Somatório de forças $= m\dfrac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$

Portanto: $m\ddot{x} = F - k_1x - k_2x$

$$\boxed{m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = F}$$

MODELANDO SISTEMAS MECÂNICOS

➤ Ex_2: Determine a eq. Diferencial que descreva o movimento da massa m_1 a figura ao lado quando a forças F é aplicada.

Solução:

O primeiro passo é considerar a massa m_1 e as forças que agem sobre ela. Estas forças são exercidas pelas 2 molas. A força exercida pela mola inferior é resultado da tração na mesma. A quantidade tracionada é: $x_1 - x_2$. Assim, a força associada é dada por: $k_1(x_1 - x_2)$. A força exercida pela mola superior é resultado da tração sofrida por: $x_2 - x_3$ e então é: $k_2(x_3 - x_2)$. Assim, o somatório de forças que agem sobre a massa é dado por:
Somatório de forças

$$= k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_3 - x_2).$$

Este somatório de forças provocará uma aceleração na massa, Assim:

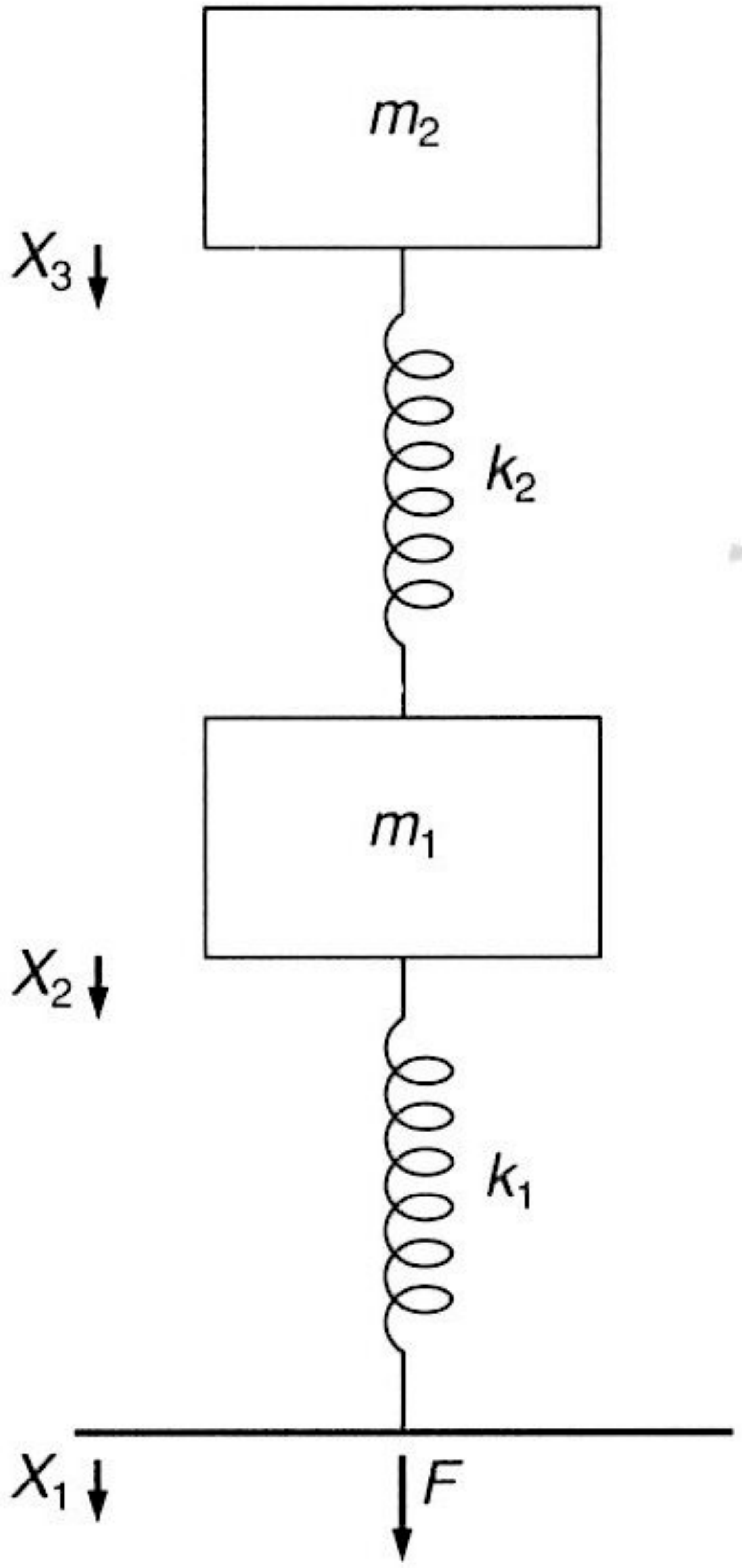
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_3 - x_2).$$

Mas a força que causa a distância na mola inferior é F. Assim:

$$F = k_1(x_2 - x_1).$$

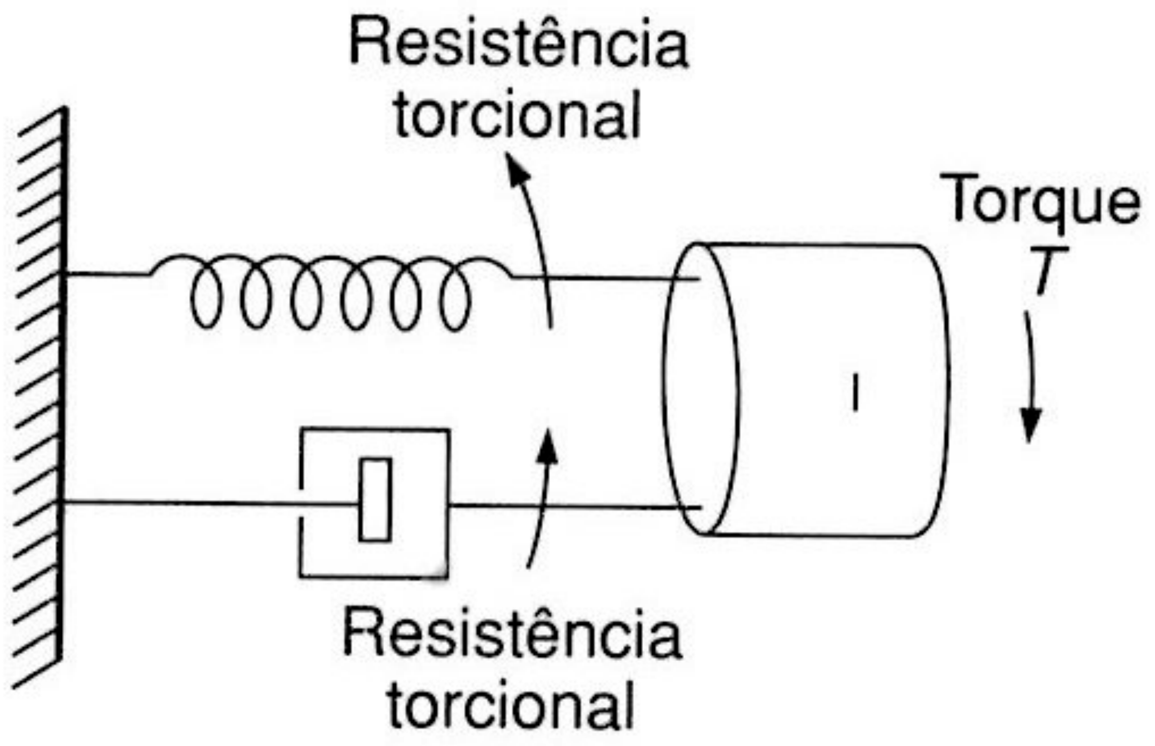
A equação final pode ser escrita então como:

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + k_2(x_3 - x_2) = F}$$



MODELANDO SISTEMAS MECÂNICOS

- Ex_3: Um motor é usado para acionar uma carga. Imaginar um modelo e obter a equação diferencial para ele.



Solução:

A eq. Diferencial é igual à:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + k\theta = T$$

Ou:

$$I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = T$$

BLOCOS DE SISTEMAS ELÉTRICOS

- Os blocos básicos de sistemas elétricos passivos são: indutores, capacitares e resistires.

- A diferença de potencial (d.d.p.) v em um **indutor** depende da variação de corrente (di/dt) através dele, ou seja:
  $$v = L\frac{di}{dt}$$
  onde $L =$ indutância. O sentido da diferença de potencial é contrário ao da fonte de excitação usada para gerar a corrente através do induto e é portanto, chamada força contra-elettomotriz (*f.c.e.m.*). A equação anterior pode ser rearranjada para:
  $$i = \frac{1}{L}\int v\,dt.$$

BLOCOS DE SISTEMAS ELÉTRICOS

- Para um **capacitor**, a diferença de potencial depende da carga q armazenada nas suas placas em determinado instante, ou seja:
  $v = \dfrac{q}{C}$ (1)
  onde $C =$ Capacitância.

- A corrente i que flui através do capacitor é dada pela razão da carga em movimento nas placas do mesmo, ou seja:
  $i = \dfrac{d\,q}{t};$

- A carga total q nas placas, é dada por:
  $q = \displaystyle\int i\,dt.$

- A eq. (1) pode ser re-escrita como:
  $v = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i\,dt \quad (2)$

- Como: $v = q/C$, temos então:
  $\dfrac{d\,v}{dt} = \dfrac{1}{C}\dfrac{d\,q}{dt}.$

- Mas como: $i = d\,q/dt$:
  $i = C\dfrac{d\,v}{dt}.$

BLOCOS DE SISTEMAS ELÉTRICOS

- Já a d.d.p. v sobre um resistor em qualquer instante de tempo depende da corrente i através dele:

  $v = R\,i;$

  onde $R =$ resistência.

BLOCOS DE SISTEMAS ELÉTRICOS

- Quanto a energia envolvida em sistemas elétricos…
- O capacitor e o indutor armazenam energia que pode ser liberada posteriormente.
- O resistor não armazena energia; ao contrário, a dissipa.
- A energia armazenada num indutor percorrido pela corrente i é dada por: $E = \frac{1}{2}Li^2.$
- Já a energia armazenada por um capacitor sujeito a d.d.p. v, é dada por: $E = \frac{1}{2}Cv^2.$
- Por fim, a energia dissipada por um resistor quando existe uma d.d.p. v sobre ele, é dado por: $P = \frac{1}{R}v^2$

RESUMO EQUAÇÕES PARA SISTEMAS ELÉTRICOS

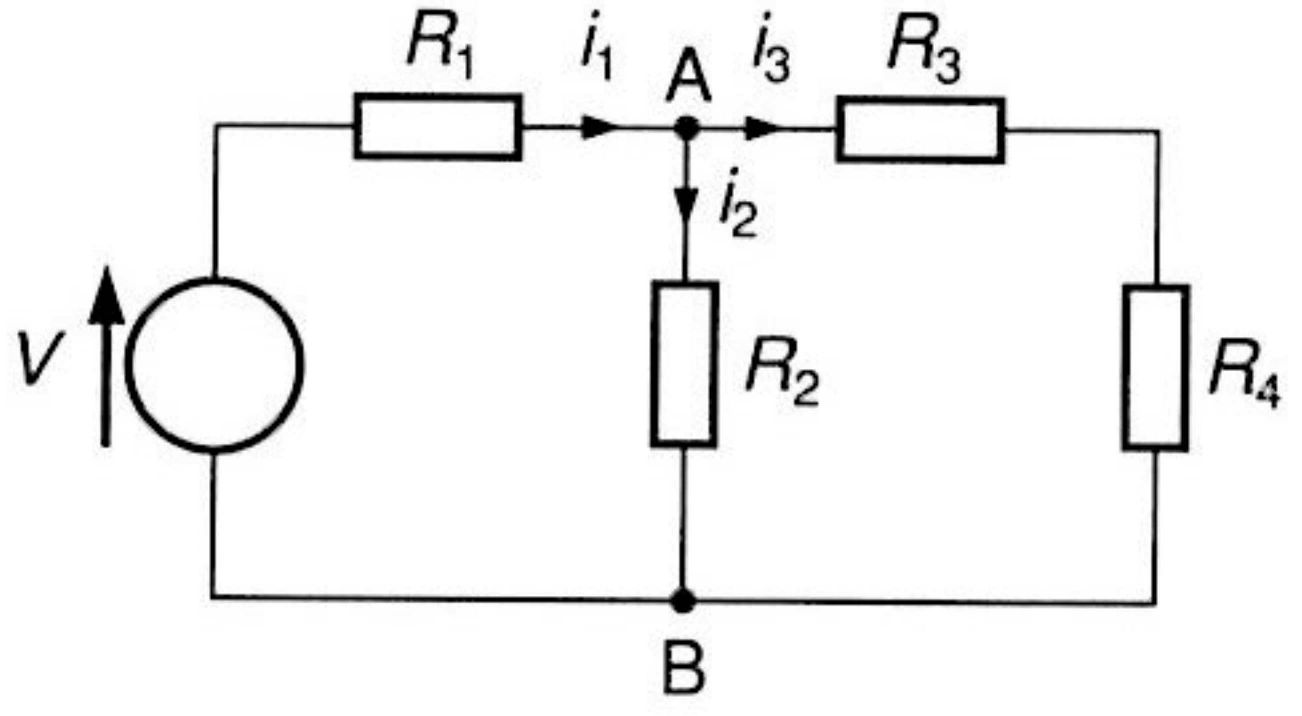
Bloco	Equações		Energia	
Indutor	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$i = \dfrac{1}{L}\int v dt$	$E = \dfrac{1}{2}Li^2$	*Energia armazenada*
Capacitor	$v = \dfrac{1}{C}\int i dt$	$i = C\dfrac{dv}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}Cv^2$	
Resistor	$v = Ri$	$i = \dfrac{v}{R}$	$P = \dfrac{1}{R}v^2$	*Energia dissipada*

CONSTRUINDO MODELOS PARA SISTEMAS ELÉTRICOS

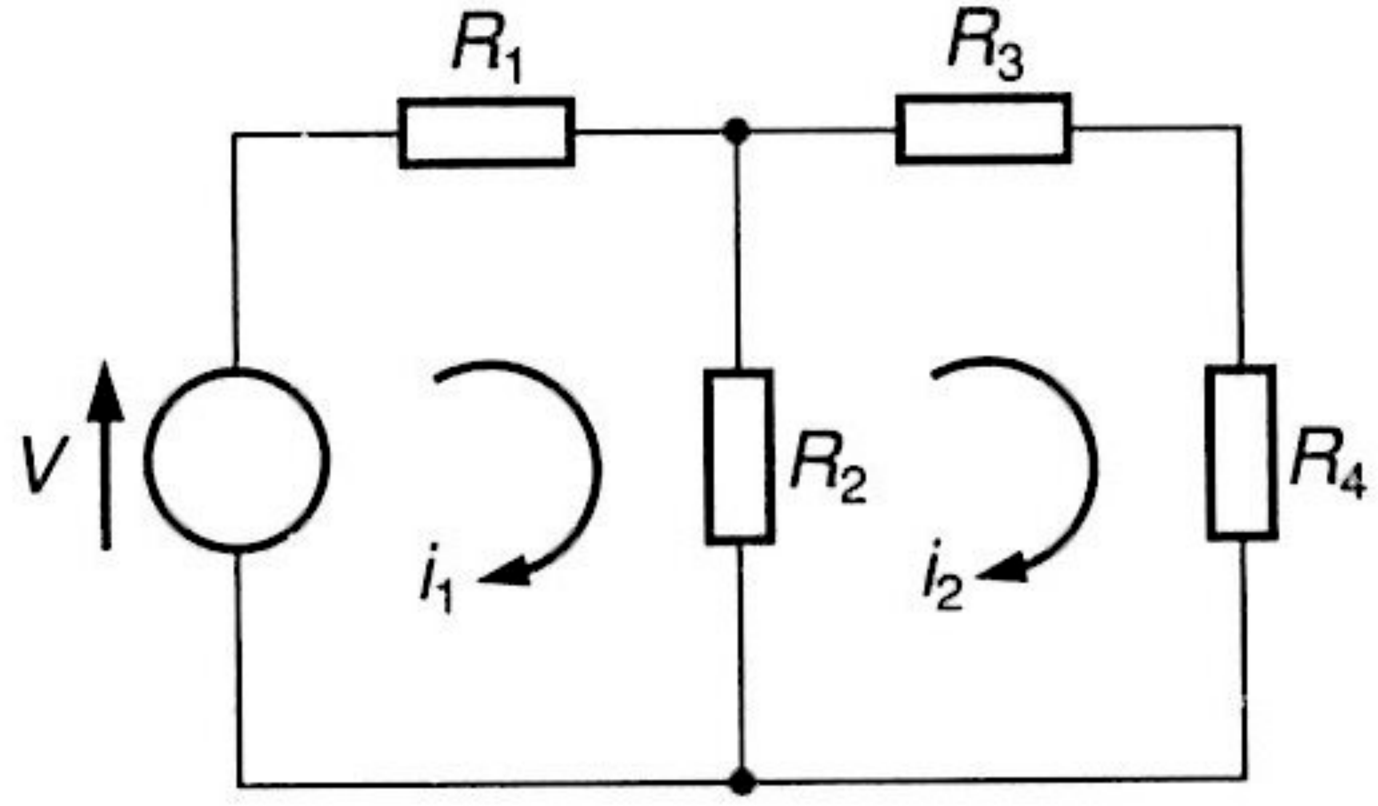
- As equações que descrevem circuitos elétricos podem ser combinadas usando ***Leis de Kirchoff***:

- 1ª-lei (**análise nodal**): a corrente total que flui em direção a um nó é igual à corrente total que deixa este nó, isto é, a soma algébrica das correntes nos nós é nula (zero).
  No exemplo: $i_1 = i_2 + i_3$.

- 2ª-lei (**análise de malha**): Em um circuito fechado, a soma algébrica das d.d.p.'s em cada elemento é igual à força eletromotriz aplicada.
  No exemplo: $v = i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_2$.



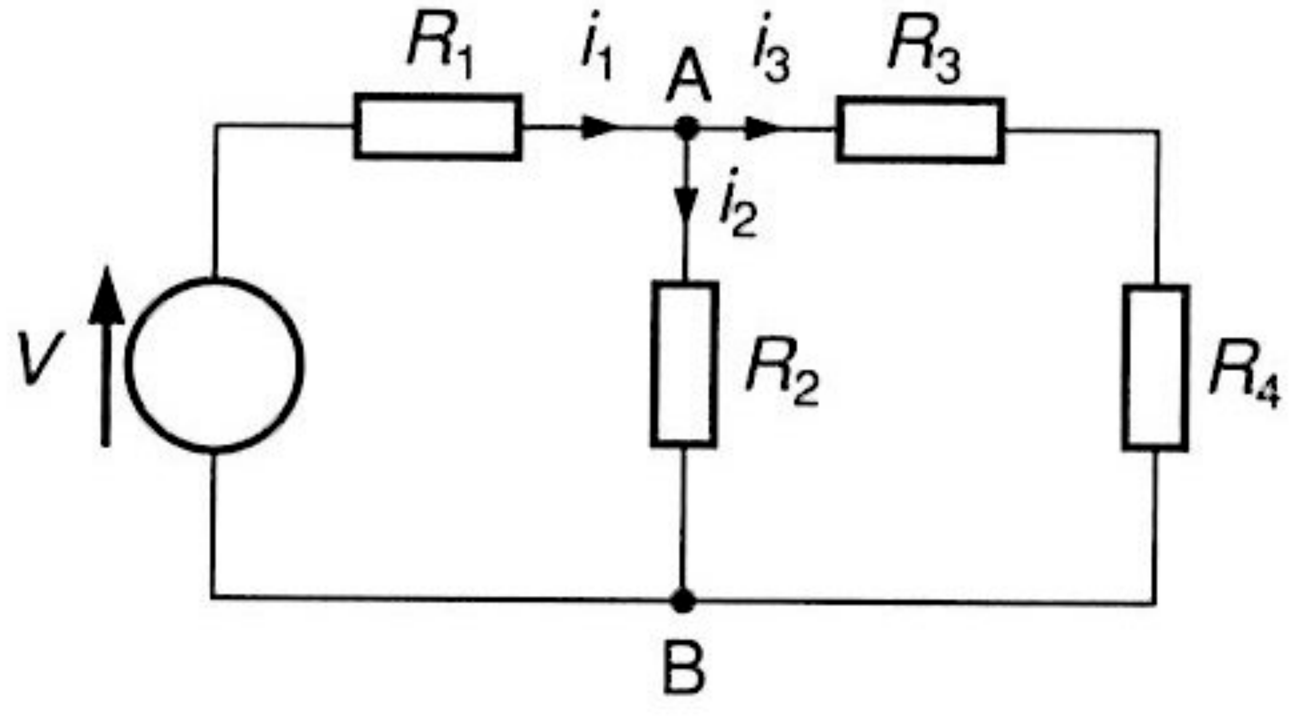
(1) Análise nodal.



(2) Análise de malha.

CONSTRUINDO MODELOS PARA SISTEMAS ELÉTRICOS

- 1ª-lei (**análise nodal**): a corrente total que flui em direção a um nó é igual à corrente total que deixa este nó, isto é, a soma algébrica das correntes nos nós é nula (zero).
  No exemplo: $i_1 = i_2 + i_3$.

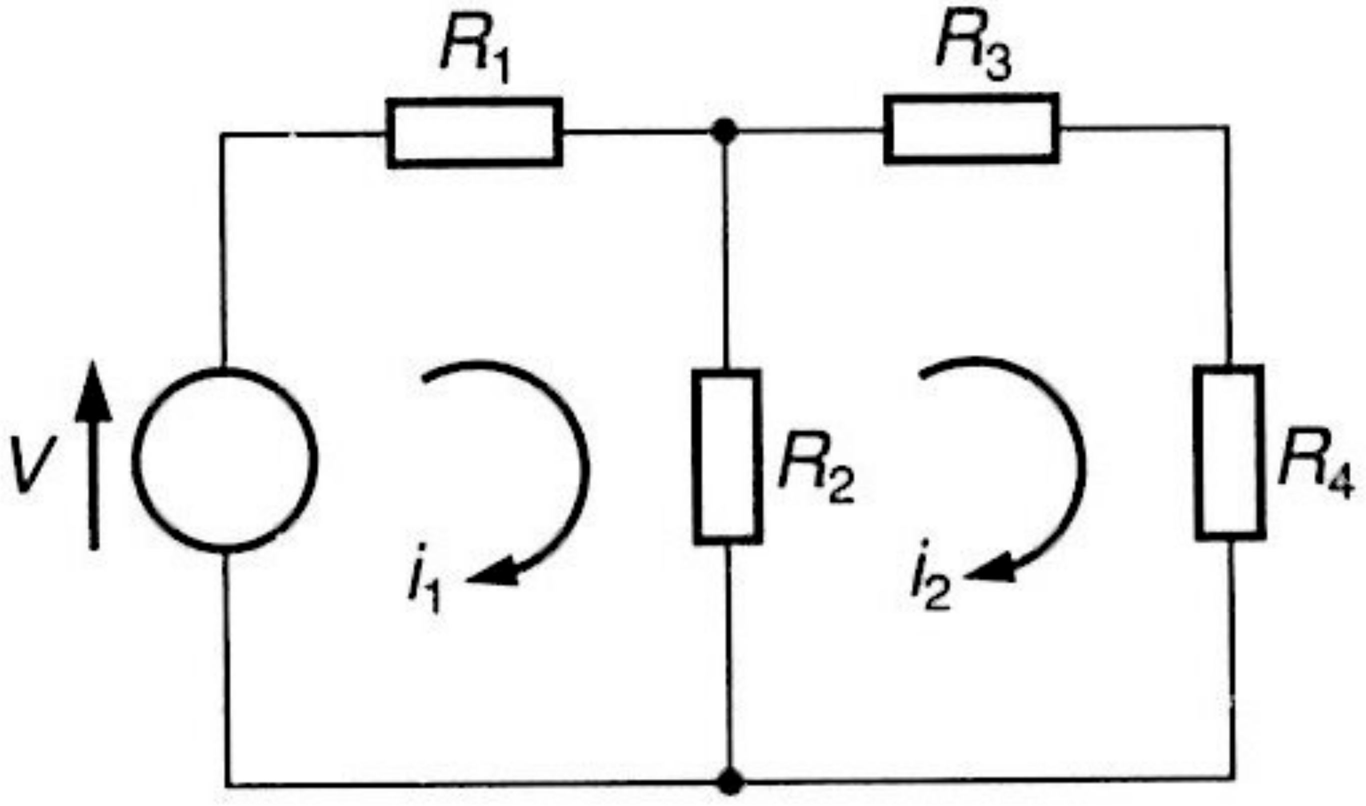


(1) Análise nodal.

- Continuando deduções….
  A corrente que passa por R_1 é i_1; a tensão neste resistor é: $(v - v_A)$, assim:
  $i_1 R_1 = v - v_A$.
  A corrente em R_2 é i_2; e a d.d.p. em R_2 é v_4, então:
  $i_2 R_2 = v_A$.
  A corrente i_3 passa por R_3 que está em série com R_4; entre R_3 e R_4 existe a d.d.p. v_A:
  $v_A = i_3(R_3 + R_4)$
  Equacionando as correntes teremos:
  $$\frac{v - v_A}{R_1} = \frac{v_A}{R_2} + \frac{v_A}{(R_3 + R_4)}$$

CONSTRUINDO MODELOS PARA SISTEMAS ELÉTRICOS

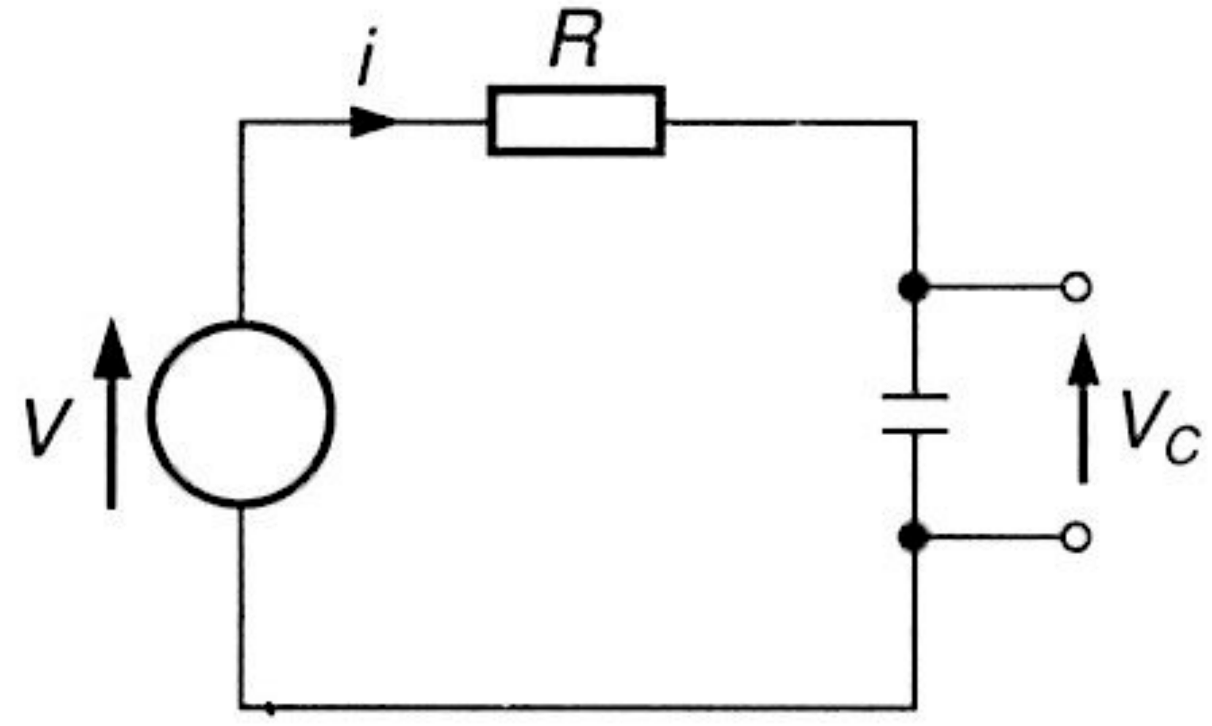
- 2ª-lei (**análise de malha**): Em um circuito fechado, a soma algébrica das d.d.p.'s em cada elemento é igual à força eletromotriz aplicada.
  No exemplo: $v = i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_2$.
- Continuando as deduções:
  $v = i_1(R_1 + R_2) - i_2 R_2$.
  Pelo desenho ao lado, para a malha de corrente i_2, não existe nenhuma *fem*:
  $0 = i_2 R_3 + i_2 R_4 + (i_2 - i_1) R_2$,
  que rearranjada, resulta em:
  $i_2(R_3 + R_4 + R_2) = i_1 R_2$.
  Substituindo por i_2 na eq. Para primeira malha, temos:
  $$v = i_1(R_1 + R_2) - \frac{i_1 R_2^2}{(R_3 + R_4 + R_2)};$$
  $$v = \frac{i_1(R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_2 R_4)}{R_3 + R_4 + R_2}.$$
- Obs.: em geral, quando o número de nós é menor que o número de malhas, é mais fácil empregar análise nodal.



(2) Análise de malha.

MODELO DE SISTEMA ELÉTRICO RC SÉRIE

- Um sistema elétrico simples consiste em um resistor em série com um capacitor (figura ao lado). Busque uma relação entre v e v_C.



- *Solução:*

  Aplicando a análise de malhas ao percurso fechado, temos:

  $v = v_R + v_C$;

  onde $v_R =$ *d.d.p. no resistor e* $v_C =$ *d.d.p. no capacitor.*

  Como se trata de uma única malha, a corrente em todos os elementos será a mesma, i.

  Sabemos ainda que $v_R = Ri$, *então:*

  $v = Ri + v_C$

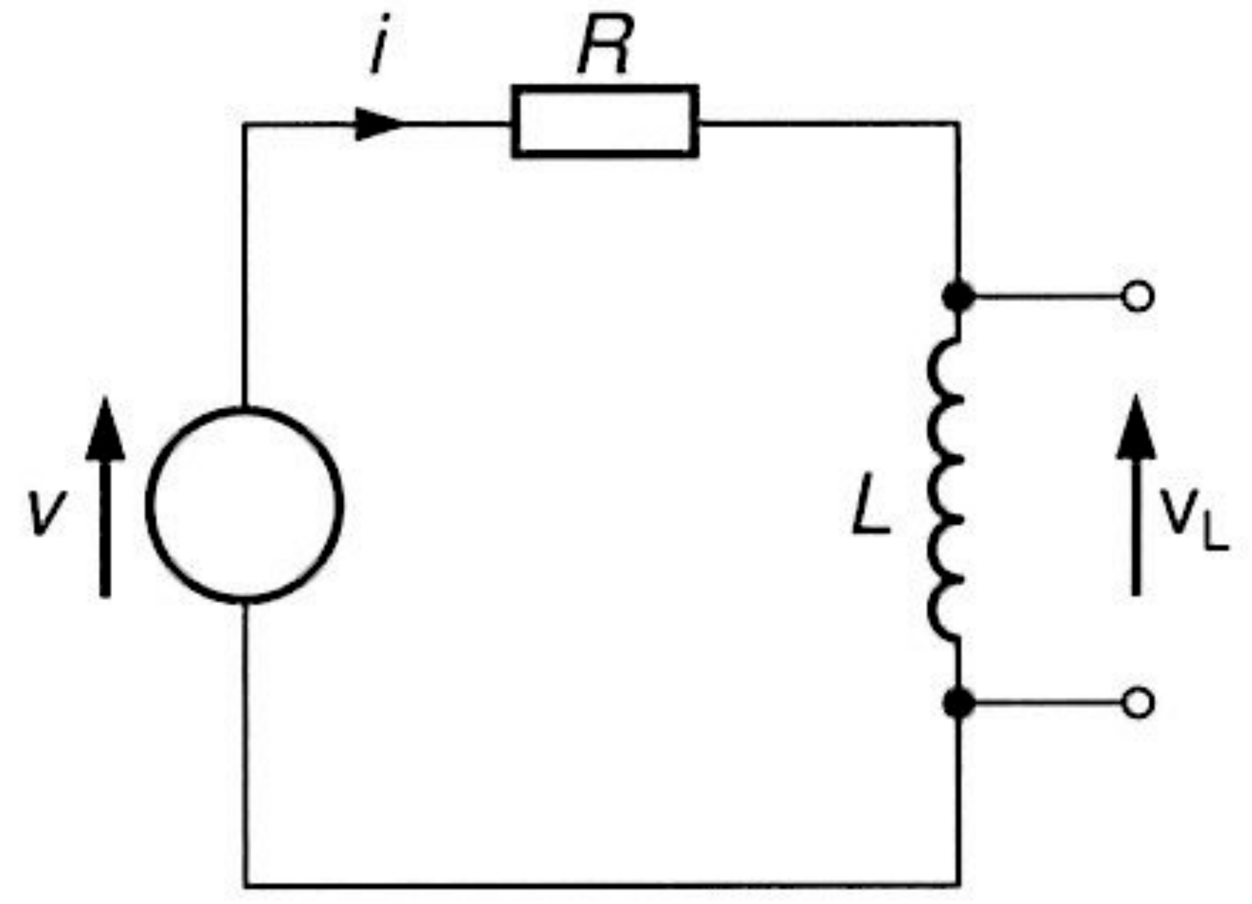
  Sabemos também que i *sobre o capacitor é dada por:* $i = C(\partial v_c / \partial t)$, *então:*

  $v = RC\dfrac{\partial v_C}{\partial t} + v_C$, *ou:*

  $v = RC\dot{v}_C + v_c$.

MODELO DE SISTEMA ELÉTRICO RL SÉRIE

- Um sistema elétrico simples consiste em um resistor em série com um indutor (figura ao lado). Busque uma relação entre v e v_L.



- *Solução:*
  Aplicando análise nodal, teremos:
  $v = v_R + v_L.$
  Como: $v_R = Ri$*, teremos:*
  $v = Ri + v_L.$
  E de acordo com: $i = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int v_L\,\partial t$*, ficamos com:*
  $$v = \frac{R}{L}\int v_L\,\partial t + v_L.$$

MODELO DE SISTEMA ELÉTRICO RLC SÉRIE

- A figura ao lado mostra um circuito série RLC. Busque uma relação entre v e v_C.
- *Solução: aplicando análise de malha obtemos:*

  $v = v_R + v_L + v_C$.

  Como existe somente uma malha, a corrente i será a mesma em todos os elementos do circuito.

  Lembrando que: $v_R = iR$ e $v_L = L\dfrac{\partial i}{\partial t}$ *, teremos:*

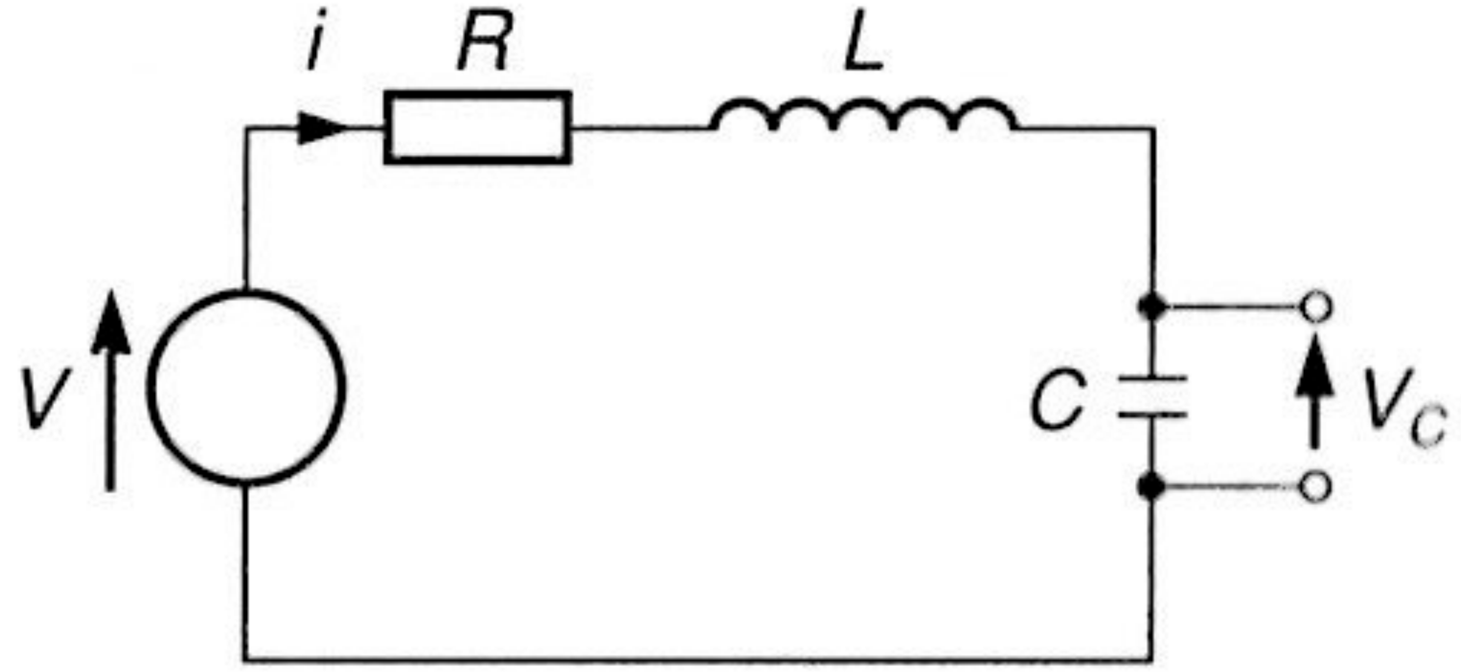
  $v = iR + L\dfrac{\partial i}{\partial t} + v_C$;

  Como ainda: $i = C\dfrac{\partial v_c}{\partial t}$,

  então: $\dfrac{\partial i}{\partial t} = C\dfrac{\partial\left(\frac{\partial v_C}{\partial t}\right)}{\partial t}$

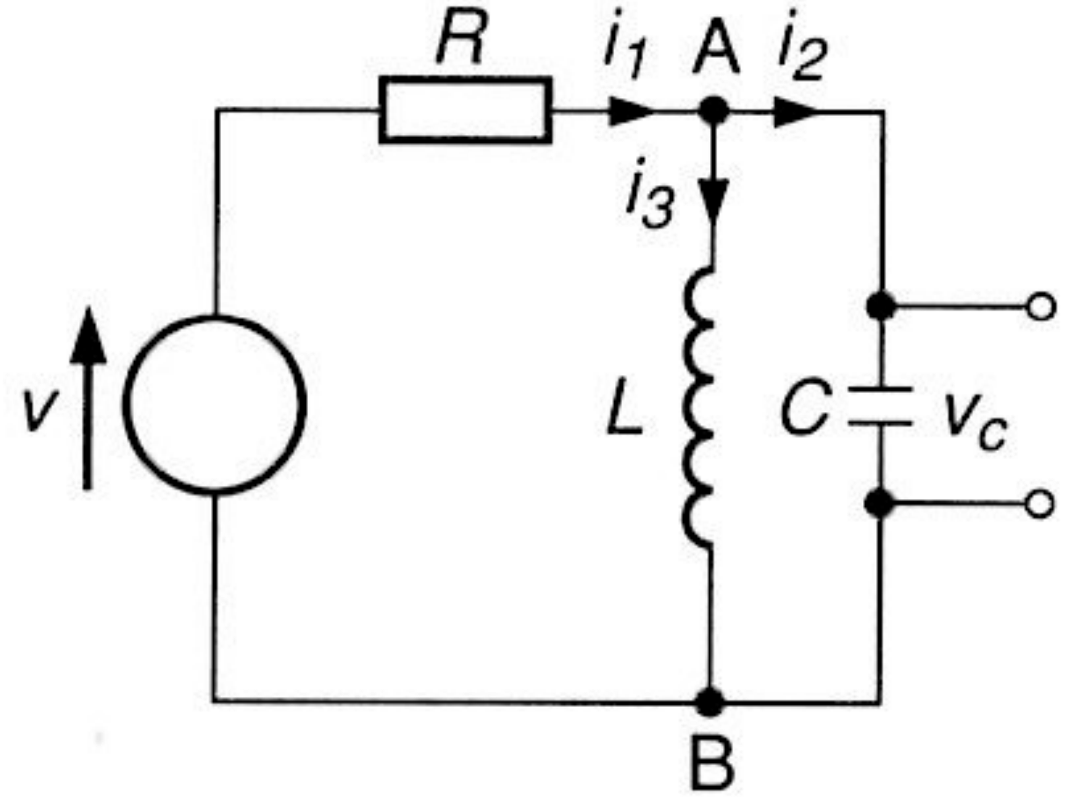
  Assim:

  $v = RC\dfrac{\partial v_c}{\partial t} + LC\dfrac{\partial^2 v_C}{\partial t^2} + v_C$ *ou:* $v = RC\dot{v}_C + LC\ddot{v}_C + v_C$.



MODELO DE SISTEMA ELÉTRICO

➤ Determinar a relação entre v e v_C no circuito da figura ao lado.



➤ *Solução por análise nodal:*

$i_1 = i_2 + i_3.$

Como:

$$i_1 = \frac{v - v_A}{R};$$

$$i_2 = \frac{1}{L}\int v_A \, \partial t;$$

$$i_3 = C\frac{\partial v_A}{\partial t},$$

pode-se escrever:

$$\frac{v - v_A}{R} = \frac{1}{L}\int v_A \, \partial t + C\frac{\partial v_A}{\partial t}.$$

Como $v_C = v_A$, rearranjando a expressão anterior, chegamos à;

$$\frac{v - v_C}{R} = \frac{1}{L}\int v_C \, \partial t + C\frac{\partial v_C}{\partial t};$$

$$v - v_C = \frac{R}{L}\int v_C \, \partial t + RC\frac{\partial v_C}{\partial t};$$

$$v = \frac{R}{L}\int v_C \, \partial t + RC\frac{\partial v_C}{\partial t} - v_C$$

ANALOGIAS SISTEMAS MECÂNICOS COM ELÉTRICOS

- Num sistema elétrico:
  Resistor:
  $i = \dfrac{v}{R}$
  e:
  $P = \dfrac{v^2}{R}$
  onde:
  $R = cte$ (resistência);

- Num sistema mecânico:
  Amortecedor:
  $F = cv$
  e:
  $E = cv^2$
  onde:
  $c = cte$ (de amortecimento)

- Comparando:
- i (corrente) $\leftrightharpoons$ v (velocidade)
- $\dfrac{1}{R} \leftrightharpoons c$

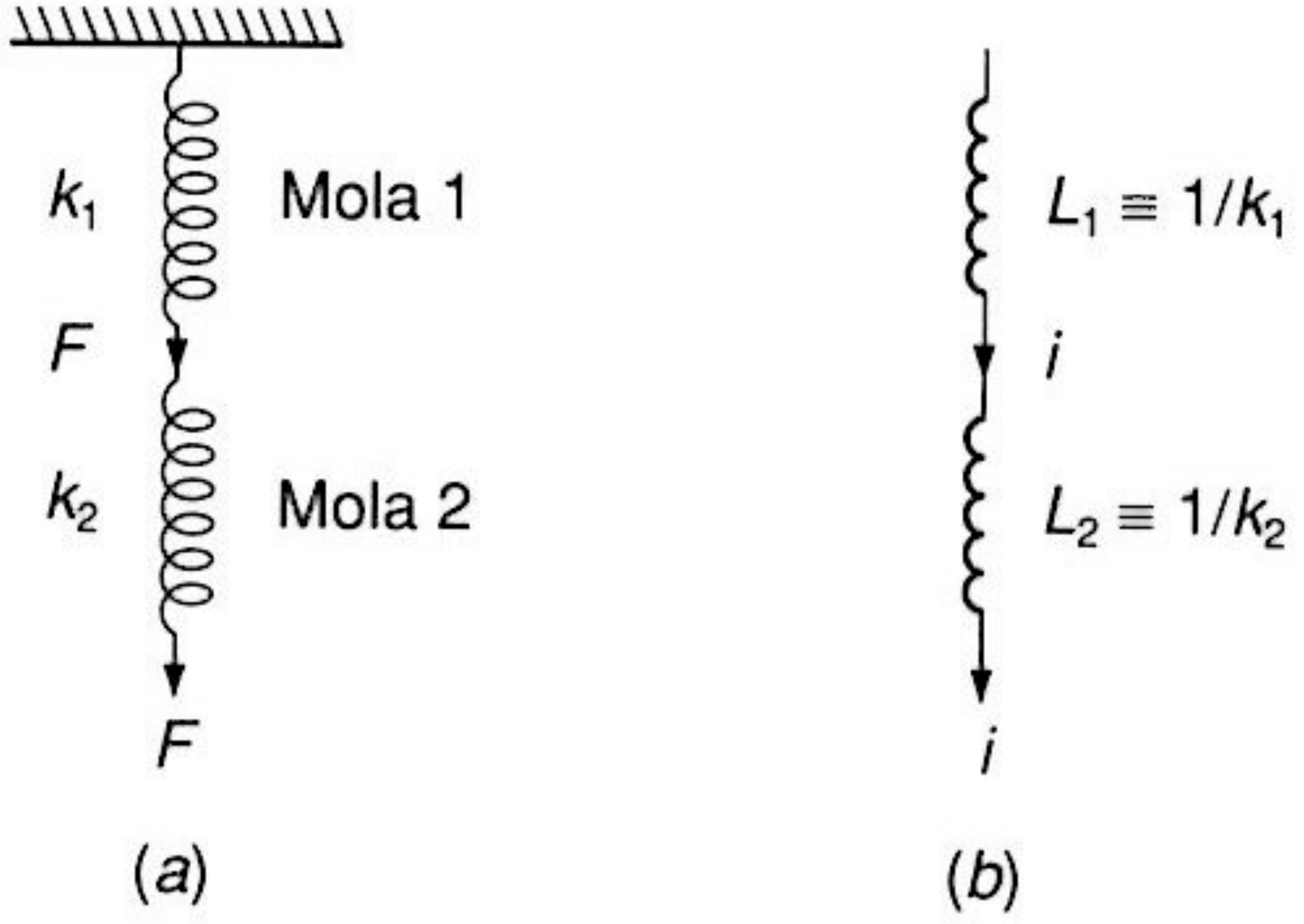
ANALOGIAS SISTEMAS MECÂNICOS COM ELÉTRICOS

Bloco	Equações	Energia	Análogos	
Indutor:	$i = \frac{1}{L}\int v\partial t$	$E = \frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{L}$	*Armazenamento de energia*
Mola translacional:	$F = kx = k\int v\partial t$	$E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$	k	
Mola torcional:	$T = k\theta = k\int \omega\partial t$	$E = \frac{1}{2}\frac{T^2}{k}$	k	
Capacitor:	$i = C\frac{\partial v}{\partial t}$	$E = \frac{1}{2}Cv^2$	C	
Massa:	$F = m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = m\frac{\partial v}{\partial t}$	$E = \frac{1}{2}mv^2$	m	
Momento de inércia:	$T = I\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = I\frac{\partial\omega}{\partial t}$	$E = \frac{1}{2}I\omega^2$	I	
Resistor:	$i = \frac{v}{R}$	$P = \frac{1}{R}v^2$	$\frac{1}{R}$	*Dissipação de energia*
Amortecimento translacional:	$F = cv$	$P = cv^2$	c	
Amortecedor rotacional:	$T = c\omega$	$P = c\omega^2$	c	

EXEMPLOS ANALOGIA MECÂNICA E ELÉTRICA

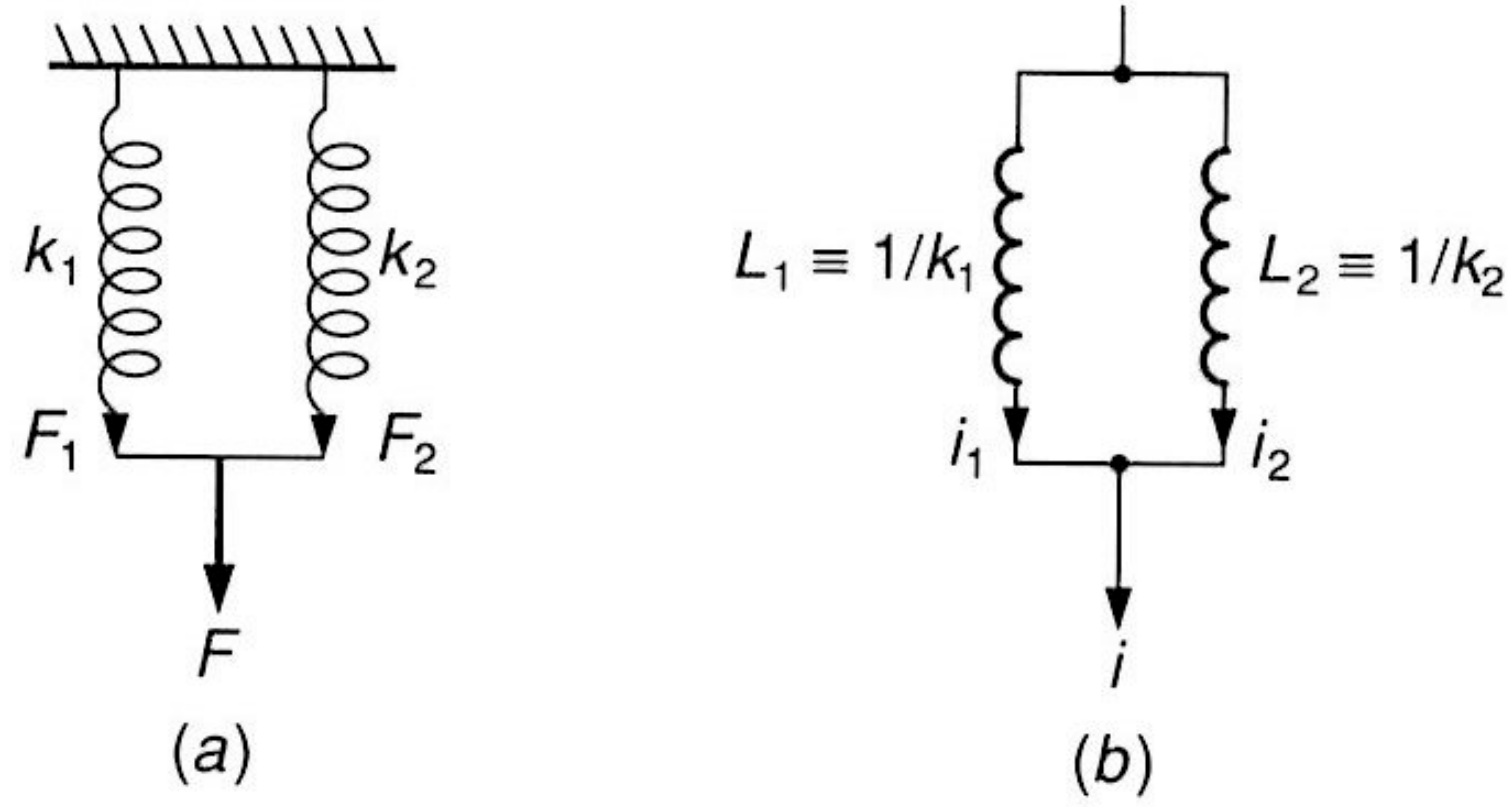
Ex_1: Sistema para **2 molas em série**:

- Quando a força *F* é aplicada ao conjunto, a força que atua em cada mola é a mesma, isto é, *F*.
- O equivalente elétrico de força é a corrente *i*, e os equivalentes das molas são os indutores.
- Como a mesma força é aplicada a cada uma das molas, então a mesma corrente circula em cada um dos indutores.
- Para a mola 1, o equivalente de k_1 é uma indutância $1/L_1$; para a mola 2, o equivalente de k_2 é uma indutância $1/L_2$.



EXEMPLOS ANALOGIA MECÂNICA E ELÉTRICA

Ex_2: Sistema para **2 molas em paralelo**:

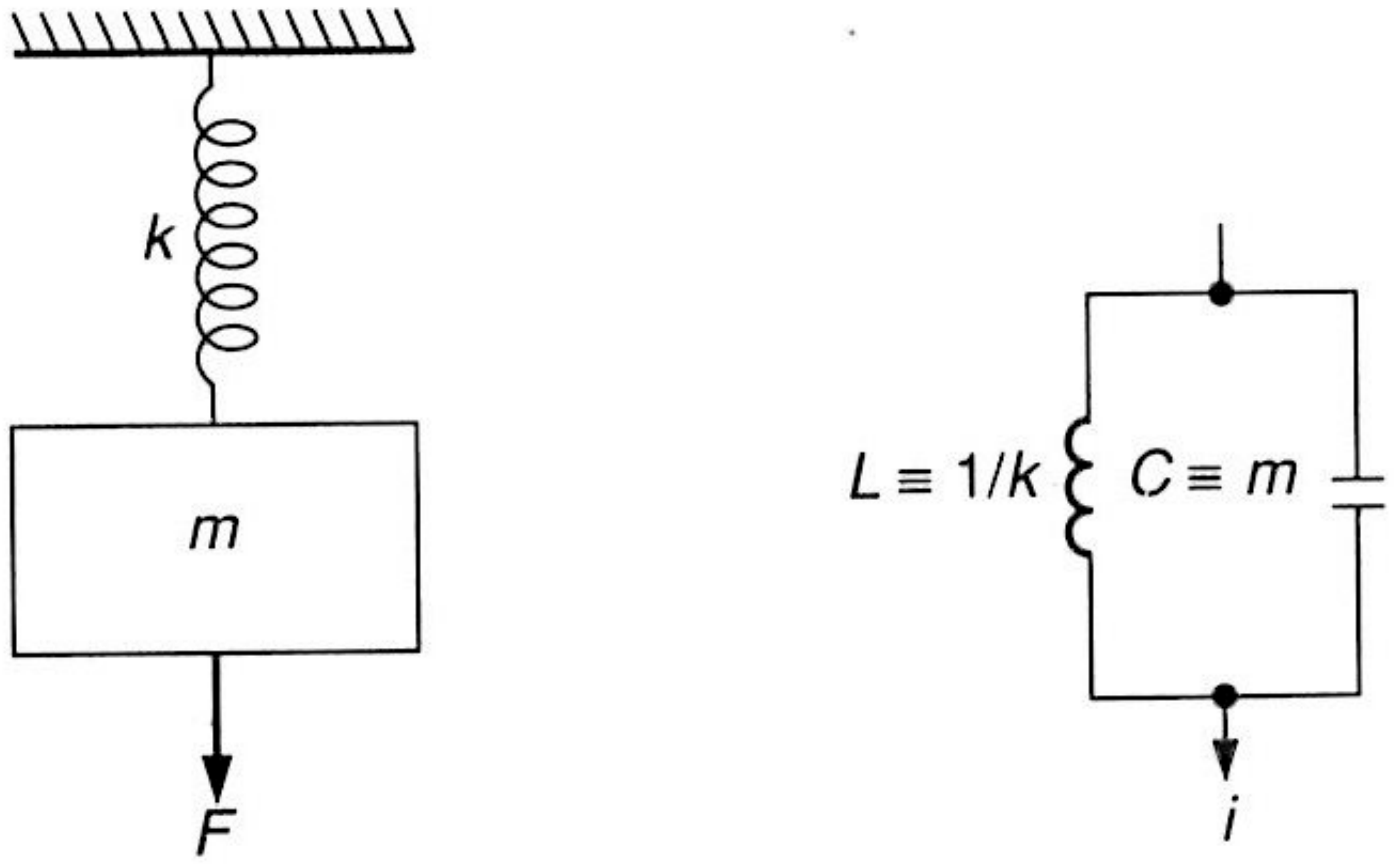


- Para 2 molas em paralelo, as forças aplicadas a cada uma delas deve ser igual à força F, isto é:
  $F = F_1 + F_2$.
  O equivalente elétrico é:
  $i = i_1 + i_2$.
- A corrente total deve ser igual à soma das correntes nos indutores equivalente.
- Para a mola 1, o equivalente k_1 é uma indutância de $1/L_1$; para a mola 2, k_2 é equivalente a $1/L_2$.

EXEMPLOS ANALOGIA MECÂNICA E ELÉTRICA

Ex_3: Sistema mecânico envolvendo uma mola e uma massa.

- somatório de forças que agem na massa $= F-$ somatório de forças exercidas pela mola.
- Assim:
  $F =$ somatório forças exercidas pela mola + somatório forças que agem na massa.
- O equivalente elétrico é:
  $i =$ corrente no indutor + corrente no capacitor.

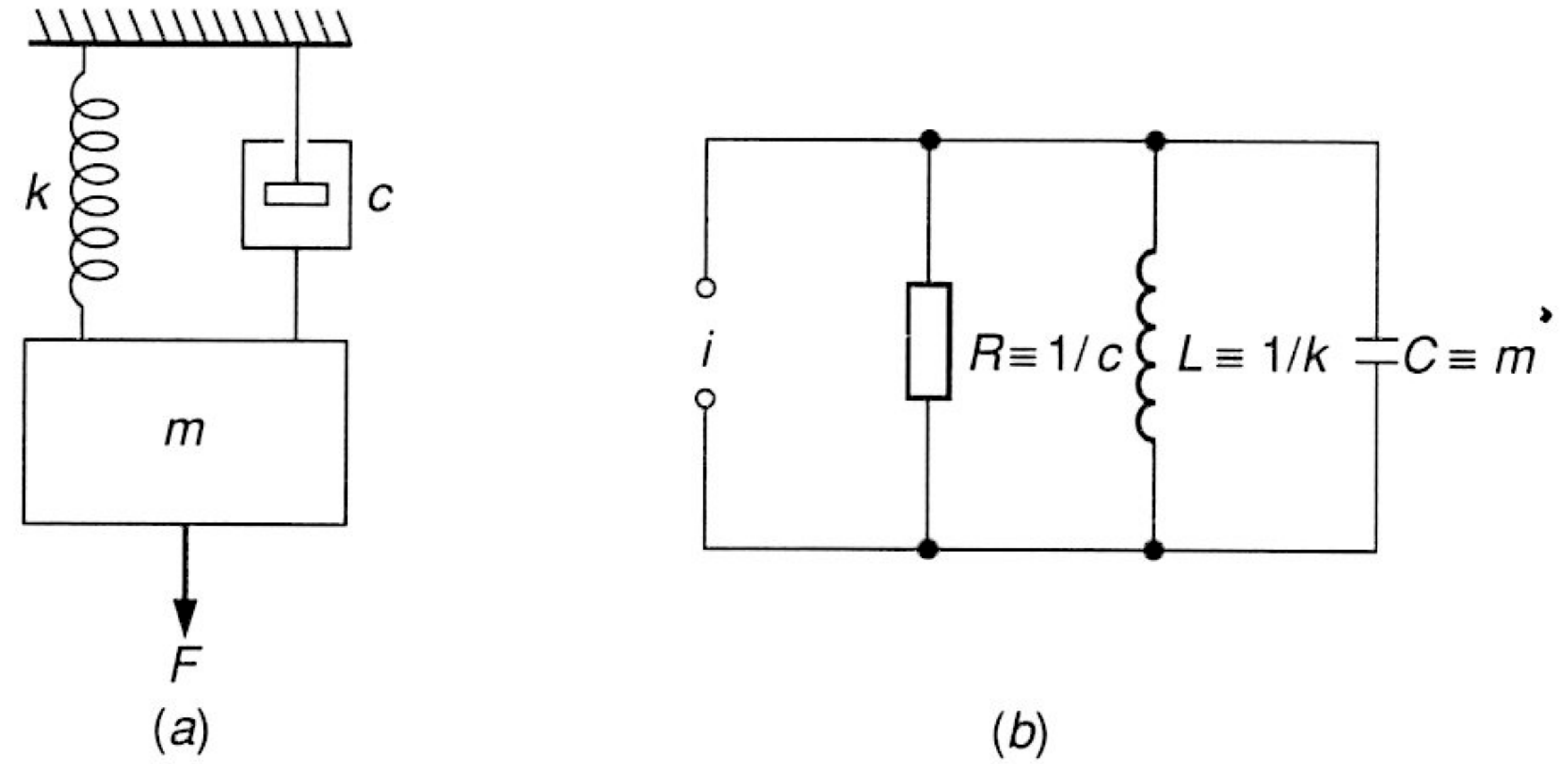


(a) (b)

EXEMPLOS ANALOGIA MECÂNICA E ELÉTRICA

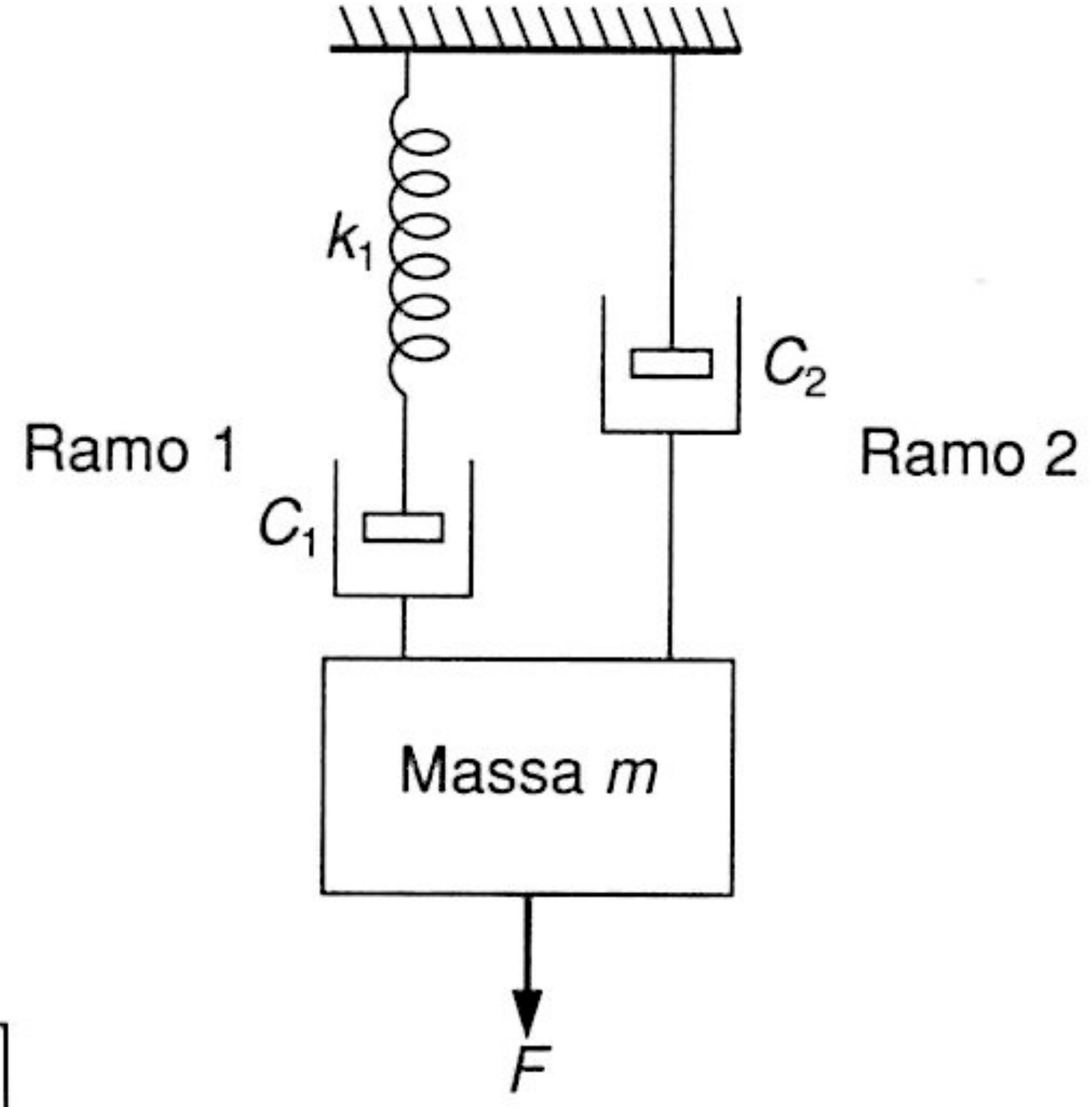
Ex_4: Sistema com uma mola, um amortecedor e uma massa.

- Somatório forças que agem na massa $= F-$ força exercida pela mola $-$ força exercida pelo amortecedor.
  ou:
  $F =$ Somatório forças que agem na massa $+$ força exercida pela mola $+$ força exercida pelo amortecedor.
- Equivalente elétrico:
  (Indutor = mola; capacitor = massa; resistor = amortecedor), é:
  $i =$ corrente capacitor $+$ corrente indutor $+$ corrente resistor.



EXEMPLOS ANALOGIA MECÂNICA E ELÉTRICA

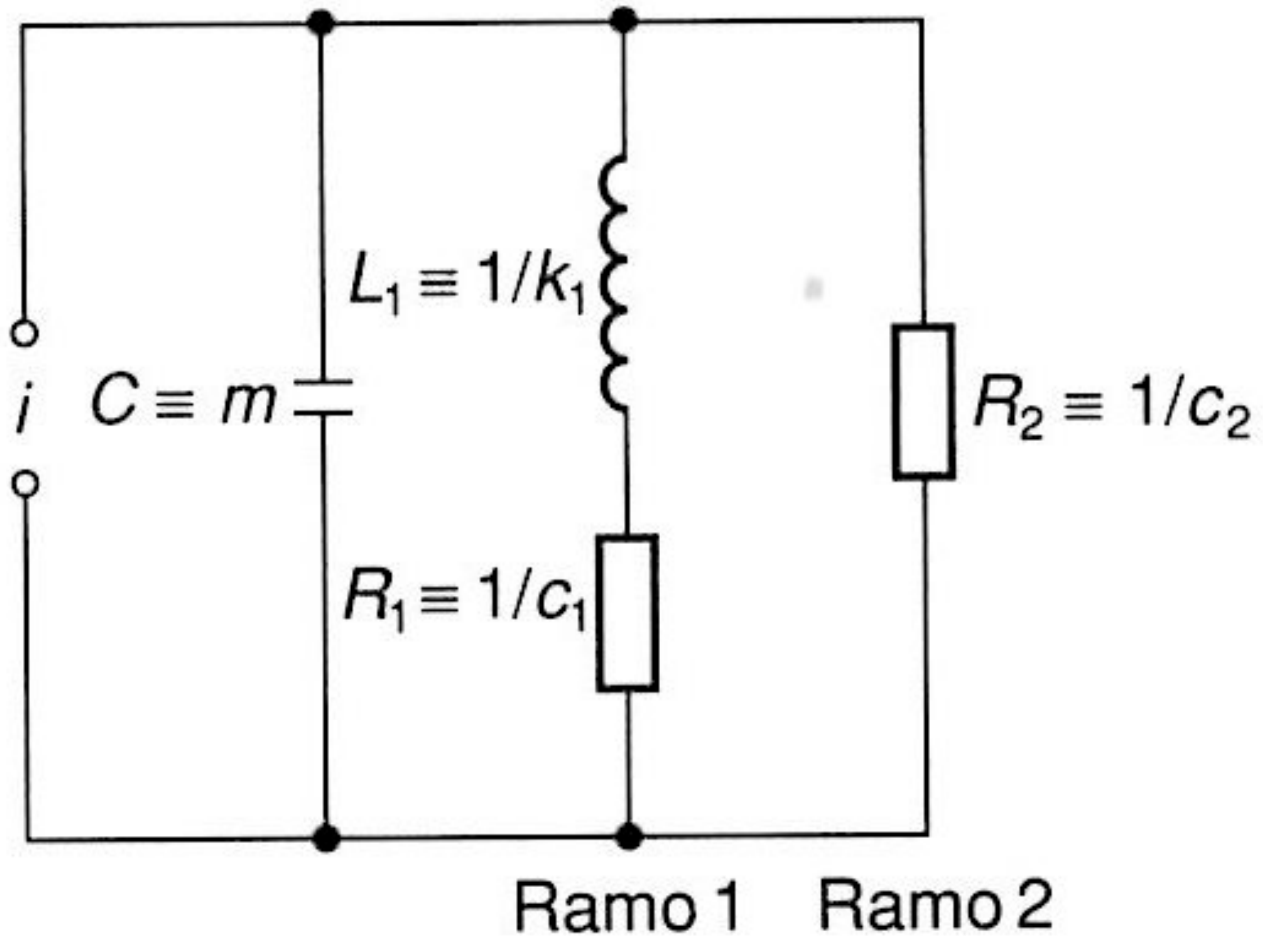
Ex_5: Desenhe um circuito elétrico análogo ao sistema mecânico mostrado na figura ao lado.



Solução:

- *A mesma força agirá sobre a mola k_1 e um amortecedor c_1; então no circuito equivalente elétrico, a mesma corrente deve circular pelos componentes indutor e resistência. O somatório de forças agindo na massa é:*
  Somatório forças agindo sobre massa $=F-$força exercida ramo 1 $-$ força exercida ramo 2.
  ou:
  $F=$ somatório forças agindo sobre massa $+$ forca exercida ramo 1 $+$ força exercida ramo 2.
- *O equivalente elétrico da massa é o capacitor. O componente do ramo 2 é um amortecedor e terá um resistor como seu equivalente elétrico. Portanto:*
  $i=$ corrente capacitor $+$ corrente ramo 1 $+$ corrente ramo 2.
- *O capacitor, ramo 1 e resistência 2 devem estar em paralelo.*

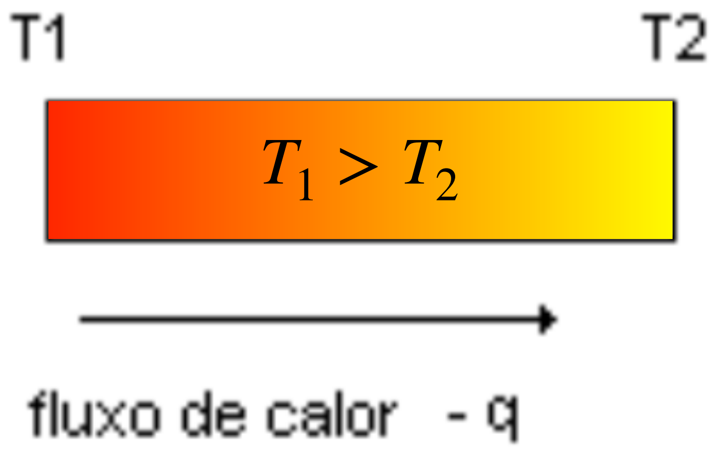
O circuito equivalente elétrico fica ➠



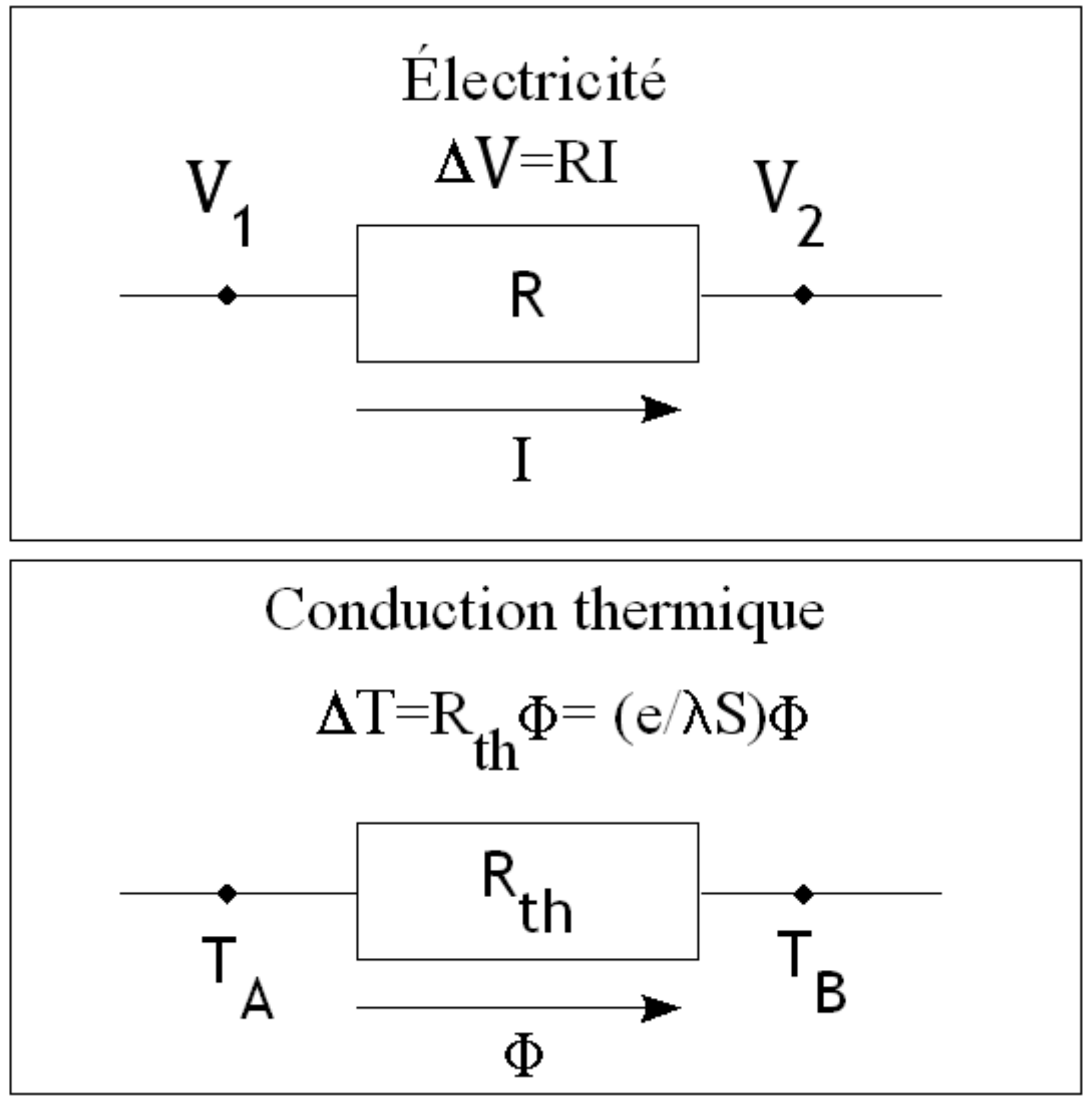
BLOCOS DE SISTEMAS TÉRMICOS (1)

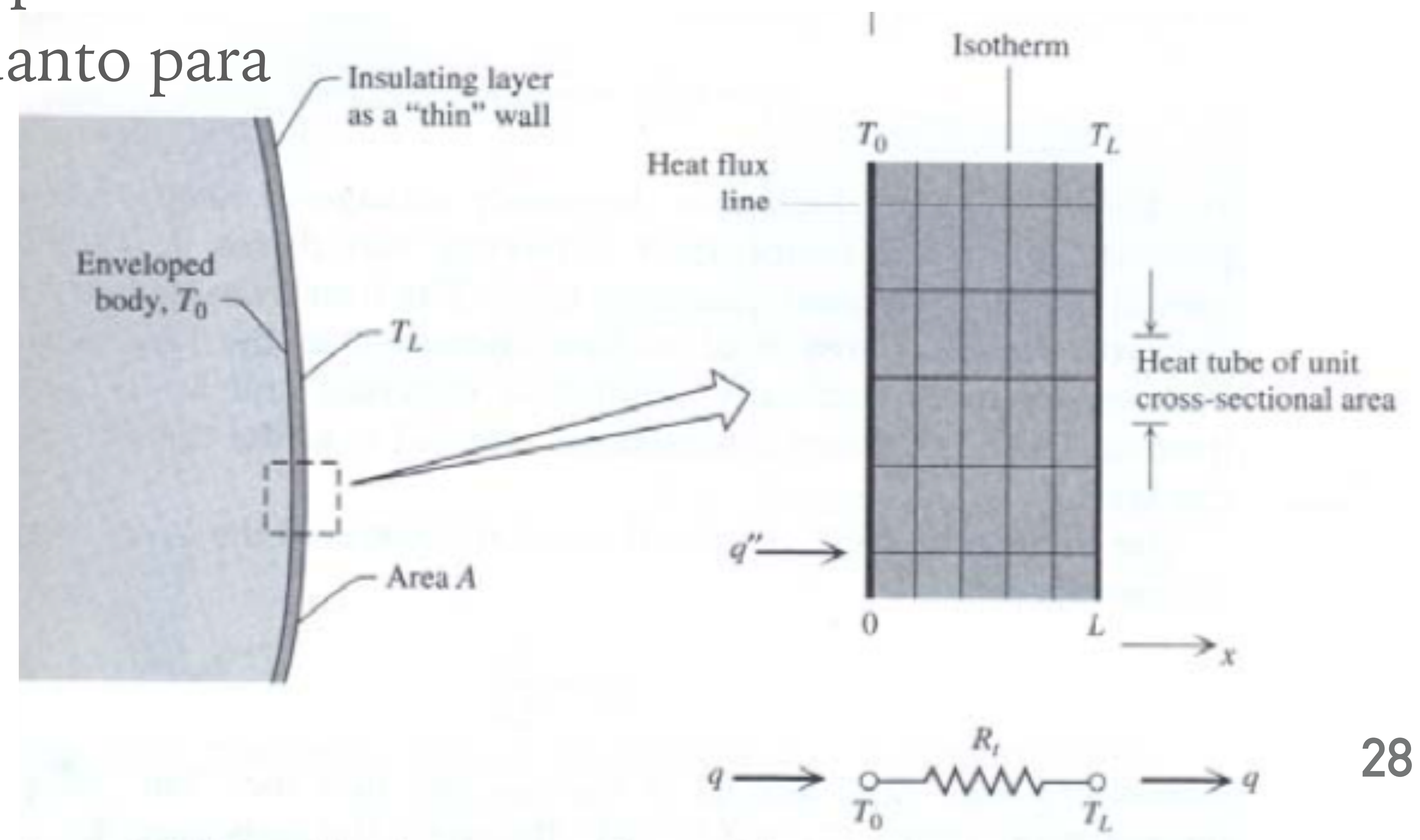
- Existem apenas 2 blocos básicos: **resistência** e **capacitância**. E apenas uma malha de fluxo de calor entre 2 pontos se houver diferença de temperatura entre eles.
- O equivalente elétrico é um ramo com corrente i, quando houver diferença de potencial v nos seus terminais; a relação entre corrente e d.d.p. é:
  $i = \dfrac{v}{R}$.
- Relação semelhante pode ser usada para definir **resistência térmica** R. Se q = razão de fluxo de calor e $(T_1 - T_2)$ é a diferença de temperatura, então:

$$q = \frac{T_2 - T_1}{R}.$$



- O valor da resistência depende do modo de transferência através de um sólido; para condução unidirecional:
  $q = Ak\dfrac{T_1 - T_2}{L}$;
  onde: A = seção transversal do material através do qual o calor está sendo conduzido; L = comprimento do material; e k = condutividade térmica.
- $R = \dfrac{L}{Ak}$;
  quando a transferência de calor é por convecção, tanto para líquidos quanto para gases.
- Então:
  $q = Ah(T_2 - T_1)$.
  e:
  $R = \dfrac{1}{Ah}$.





BLOCOS DE SISTEMAS TÉRMICOS (2)

- Já **Capacitância térmica** é uma medida do armazenamento de energia interna no sistema.
- Se a taxa de fluxo de calor para dentro do sistema é q_1 e a taxa de fluxo na saída é q_2, teremos:

  Taxa variação energia interna $= q_1 - q_2$
- Um aumento de energia interna significa um aumento de temperatura. Já que:

  Variação energia interna $= (mc)$(variação temperatura)

  onde $m =$ massa, e $c =$ calor específico. Então:

  Taxa variação energia interna $= (mc)$(taxa variação temperatura)
- Assim:

  $$q_1 - q_2 = mc\frac{\partial T}{\partial t}$$

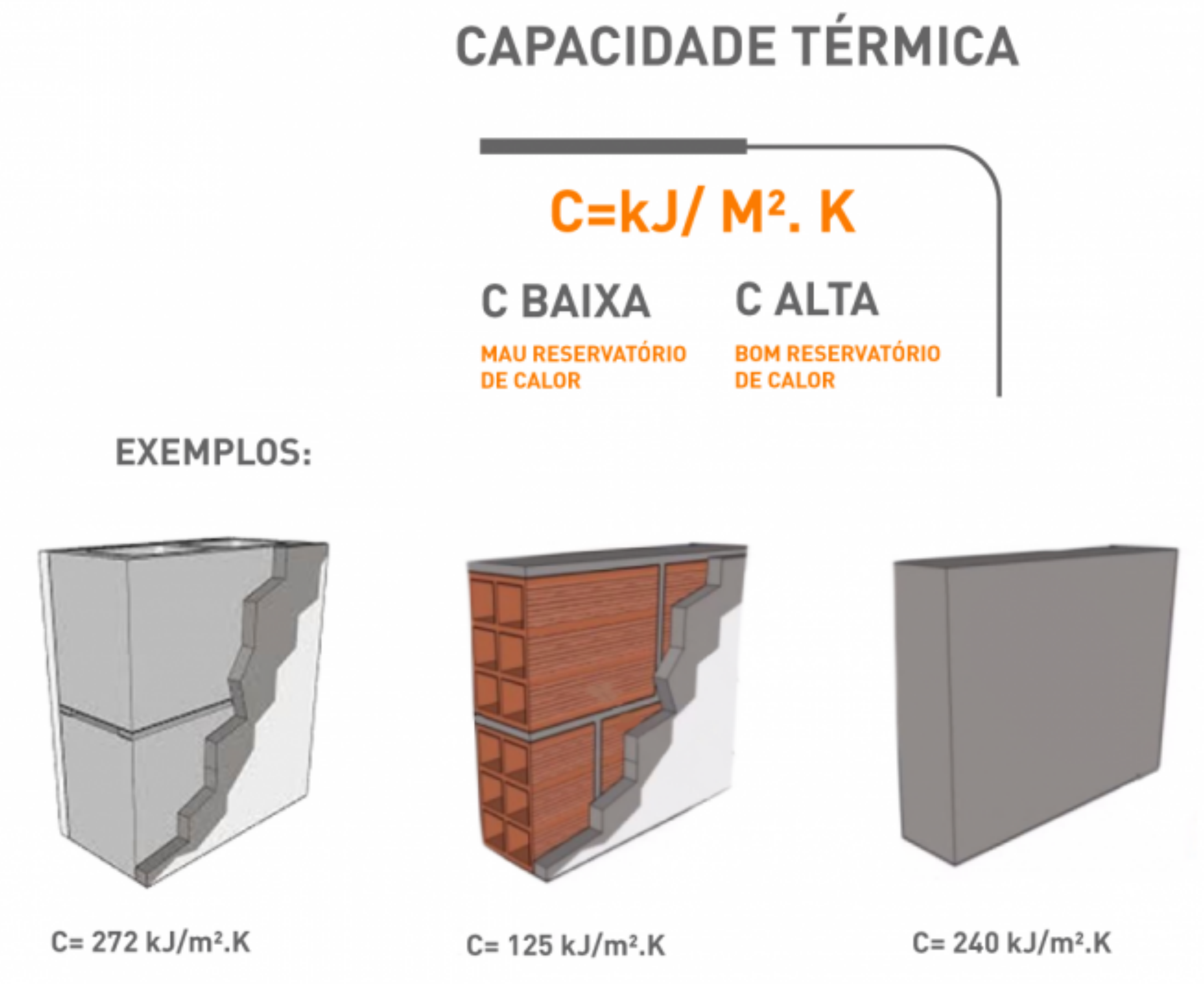
  onde: $(\partial T/\partial t) =$ taxa variação de temperatura. Ou:

  $$q_1 - q_2 = C\frac{\partial T}{\partial t};$$

  onde $C =$ capacitância térmica:

  $C = mc$.

CAPACIDADE TÉRMICA



➤ **Observações**:

1 caloria =calor necessário para elevar de 1 ^oC a temperatura de 1 grama de água.

Calor = energia (uso de Joules no S.I.)

1 cal = 4,186 J

1 kcal = 1.000,0 cal = 10^3 cal

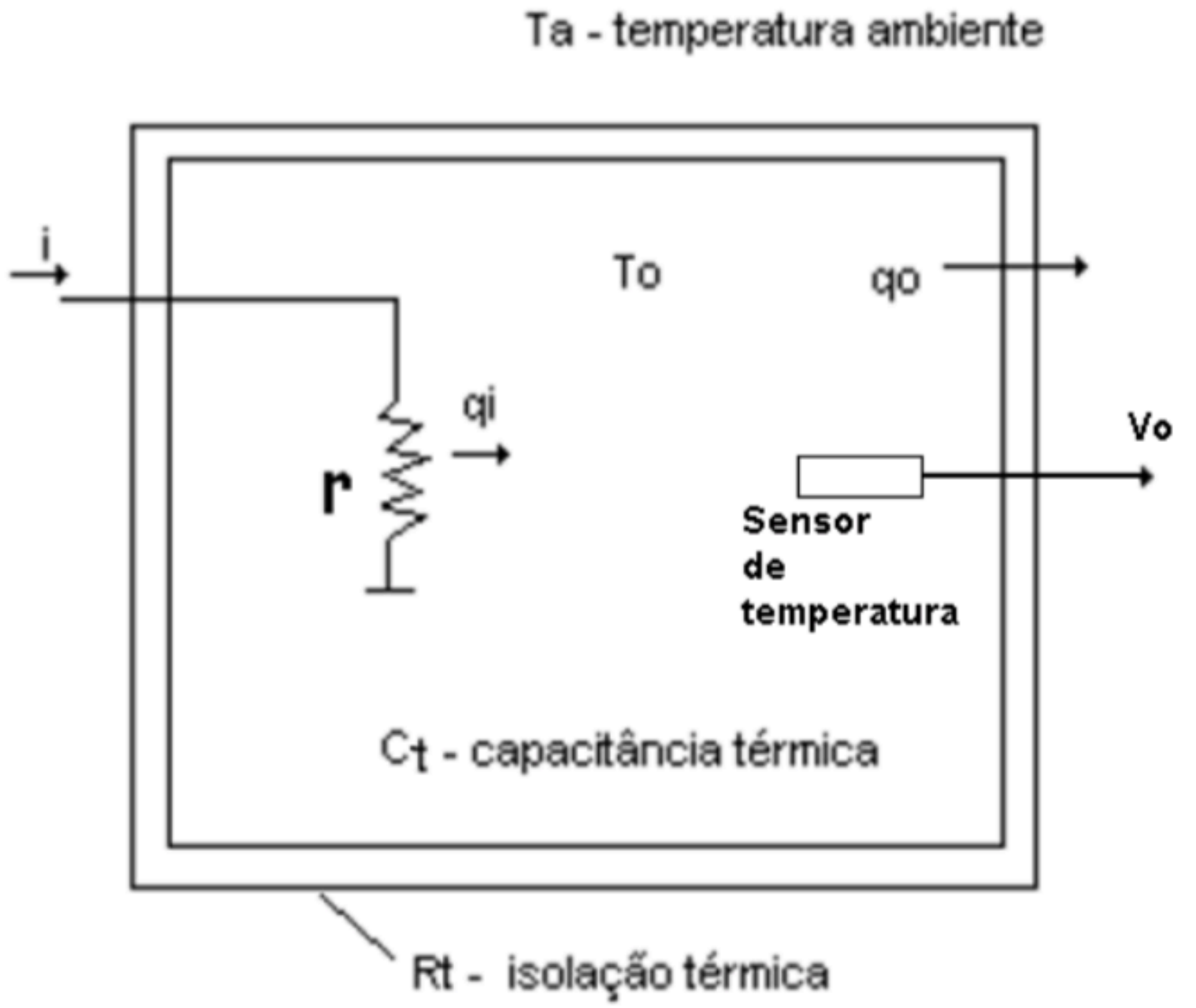
1 btu = 252,4 cal = 1.055,0 J

(Btu = British Thermal Unit).

Capacidade térmica: $C = \dfrac{q}{T_1 - T_2} = \dfrac{Joule}{Kelvin}$;

Mas C também pode ser encontrado na forma de $C = \dfrac{cal}{^oC}$.

EXEMPLO MODELAGEM SISTEMA TÉRMICO



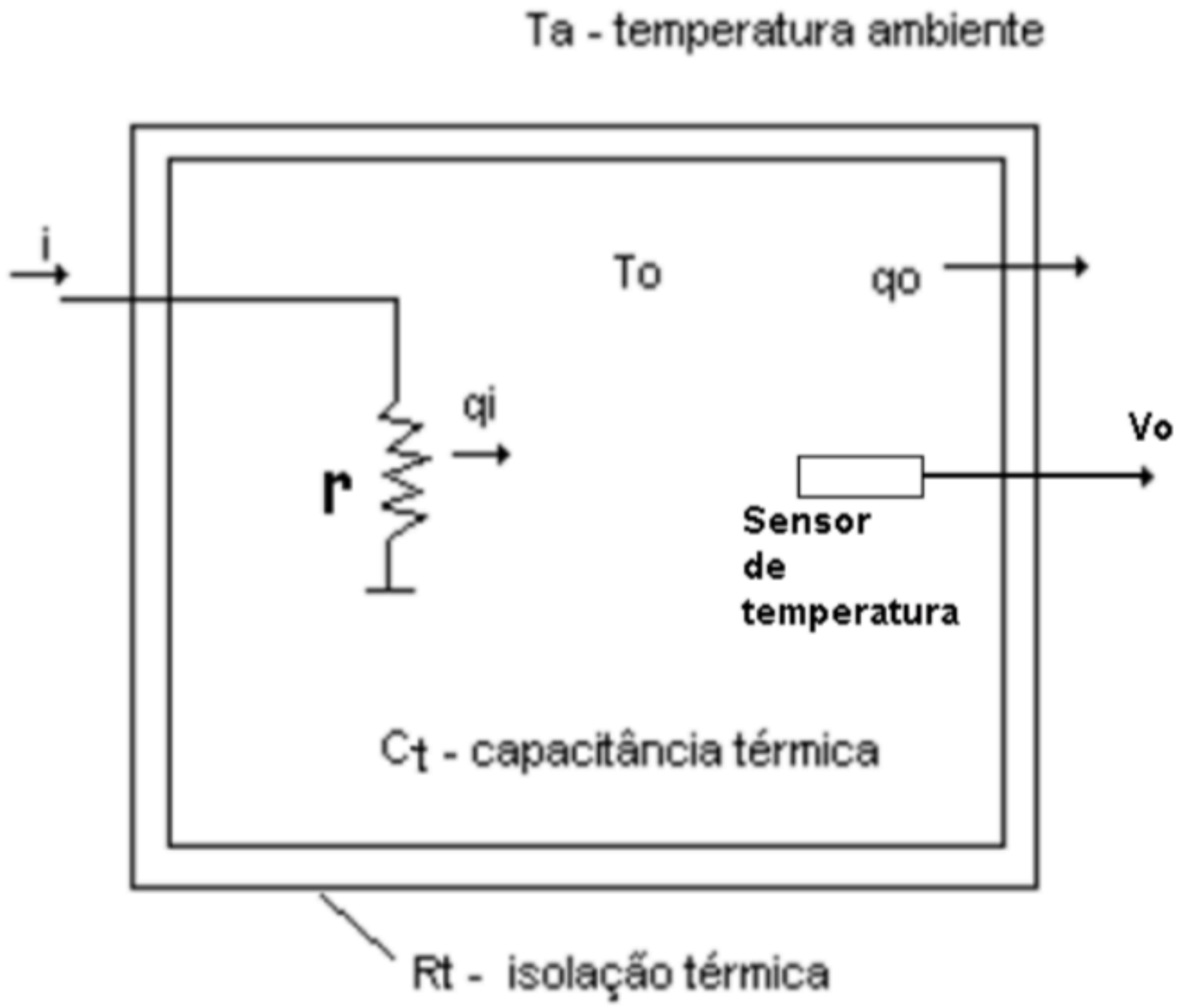
Ex_1: Considere que um termômetro na temperatura T, seja inserido num líquido com temperatura T_L (figura ao lado). Se a resistência térmica do fluxo do calor do líquido para o termômetro é R, então:

$$q = \frac{T_L - T}{R}$$

onde $q =$ razão real de fluxo de calor do líquido para o termômetro.

A capacitância térmica C do termômetro é dada por:

EXEMPLO MODELAGEM SISTEMA TÉRMICO



Ex_2: Dada uma câmera isolada termicamente, conforme indicado na figura ao lado.

Note que: $r =$ resistência elétrica usada para aquecer a câmera.

A variável de entrada é o fluxo de calor q_i, e a variável de saída é a temperatura dentro da câmera, T_o, obtida através da tensão V_O medida no sensor de temperatura.

Solução:

A resistência térmica é definida como: $R = \dfrac{T_1 - T_2}{q}$;

A diferença entre o calor fornecido e o calor perdido através das paredes é igual ao calor dentro da câmera:
calor armazenado câmera $= q_i - q_o$.

O calor acumulado dentro da câmera é proporcional à taxa de variação da temperatura na câmera, onde a constante de proporcionalidade, c, é definida como a capacitância térmica do meio dentro da câmera.

Então:

$$q_i - q_o = C\frac{\partial T_o}{\partial t}; \quad (1)$$

onde: $q_i =$ *calor fornecido pela resistência.*

O fluxo de calor através das paredes da câmera é dado por:

$$q_o - \frac{T_o - T_a}{R_t}; \qquad (2)$$

onde: $R_t =$ *resistência térmica da parede.*

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$q_i - \frac{T_o - T_a}{R_t} = C\frac{\partial T_o}{\partial t}$$

$$q_i - \frac{T_o}{R_t} + \frac{T_a}{R_t} = C\frac{\partial T_o}{\partial t}$$

$$R_t q_i - T_o + T_a = R_t C\frac{\partial T_o}{\partial t}$$

$$R_t q_i + T_a = R_t C\frac{\partial T_o}{\partial t} + T_o; \qquad (3)$$

A eq. anterior possui 2 variáveis de entrada: T_a *e* q_i, *e uma saída* T_o. *A temperatura* T_a *tem o o efeito de uma carga no sistema. Note que a entrada desejada deveria ser* q_i *e a saída deveria ser* T_o. *Assim, ainda não é possível escrever uma função de transferência* T_o/q_i, *devido ao termo* T_a.

Para resolver este problema, define-se a resistência térmica da câmera, R_{te}, *como sendo:*

$$R_{te} = \frac{R_t q_i + T_a}{q_i}; \quad (4)$$

Substituindo-se (4) em (3) obtemos:

$$R_{te} q_i = R_t C\frac{\partial T_o}{\partial t} + T_o$$

$$\frac{T_o}{q_i} = \frac{R_{te}}{1 + R_t C\frac{\partial To}{\partial t}}$$