2) MODELAGEM MATEMÁTICA

Controle Automático I
Prof. Fernando Passold

v1 (2022.1), v2 (2022.2)

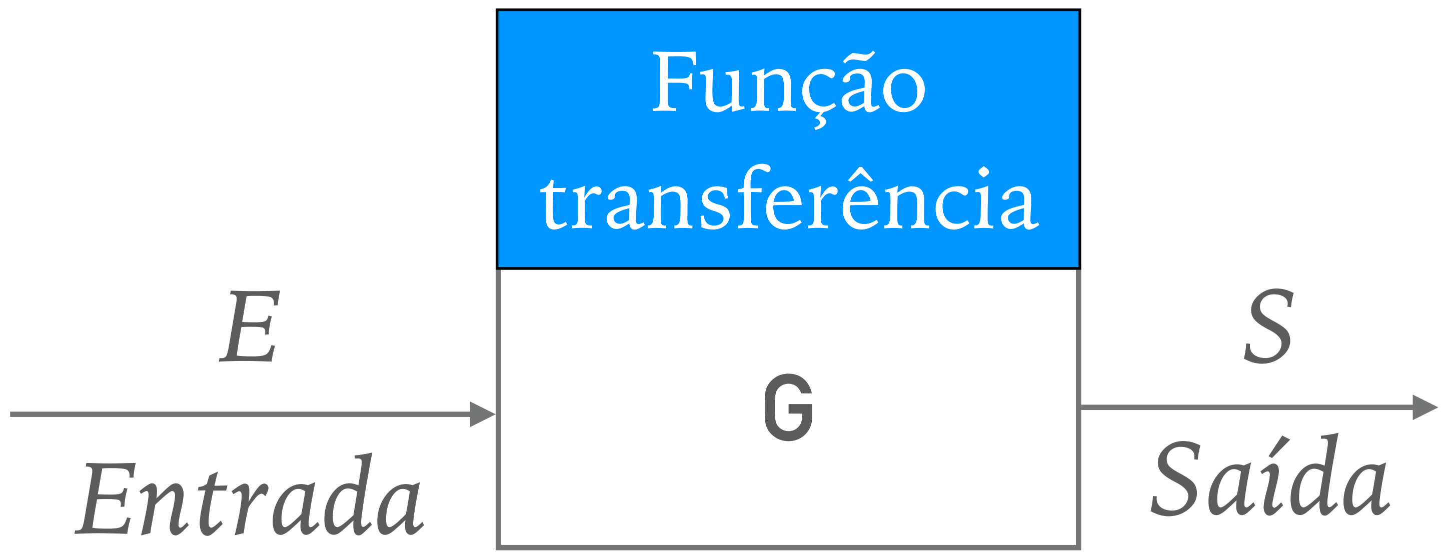
MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS

Objetivo: Entender comportamento de um sistema

Definição:

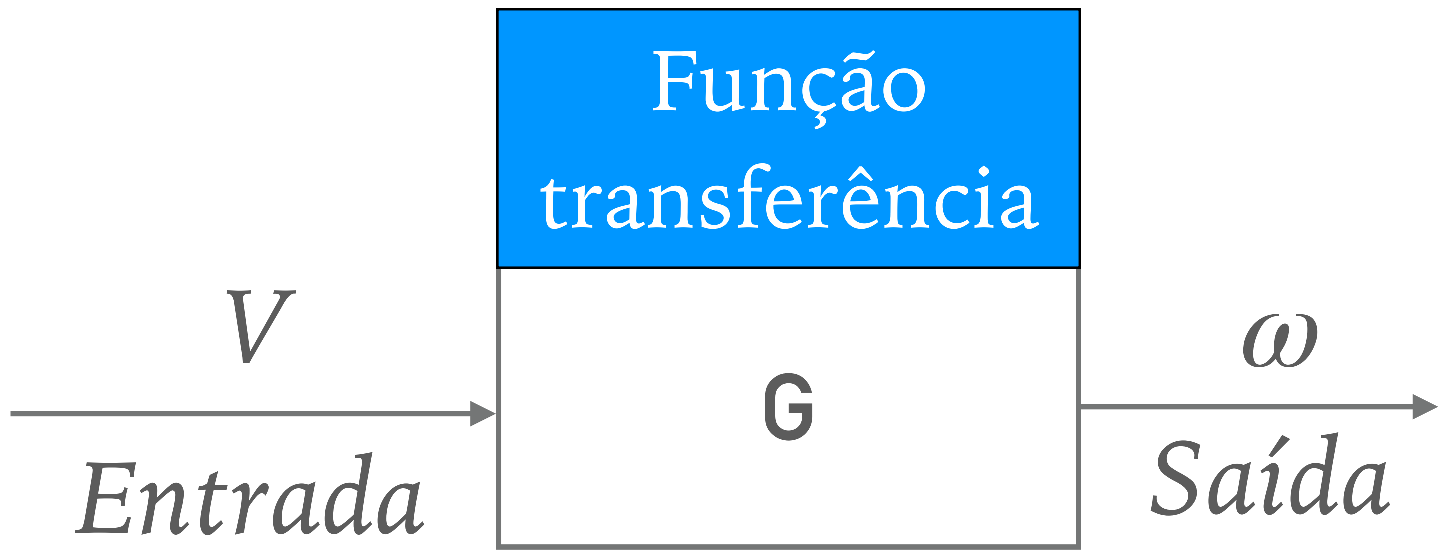
Um modelo matemático de um sistema é uma réplica das relações entre a(s) entrada(s) e a(s) saída(s), descritas em expressões matemáticas.

$$\text{Função transferência, } G = \frac{S \text{ (Saída)}}{E \text{ (Entrada)}}$$



MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS

Exemplo1: Suponha um motor, a entrada do motor é uma tensão de V e a saída é a rotação ω do motor. Se sua função de transferência é: 500 RPM/Volts, qual será a velocidade de saída (em regime permanente) para este motor, quando a entrada é de 12 Volts?



Nota: Para muitos sistemas, existe uma **relação linear** razoável entre a entrada e a saída, ou seja, a saída é proporcional à entrada. Assim, se a entrada dobra, a saída também dobra, isto é, se a entrada é multiplicada por uma constante, a saída é multiplicada pela mesma constante.

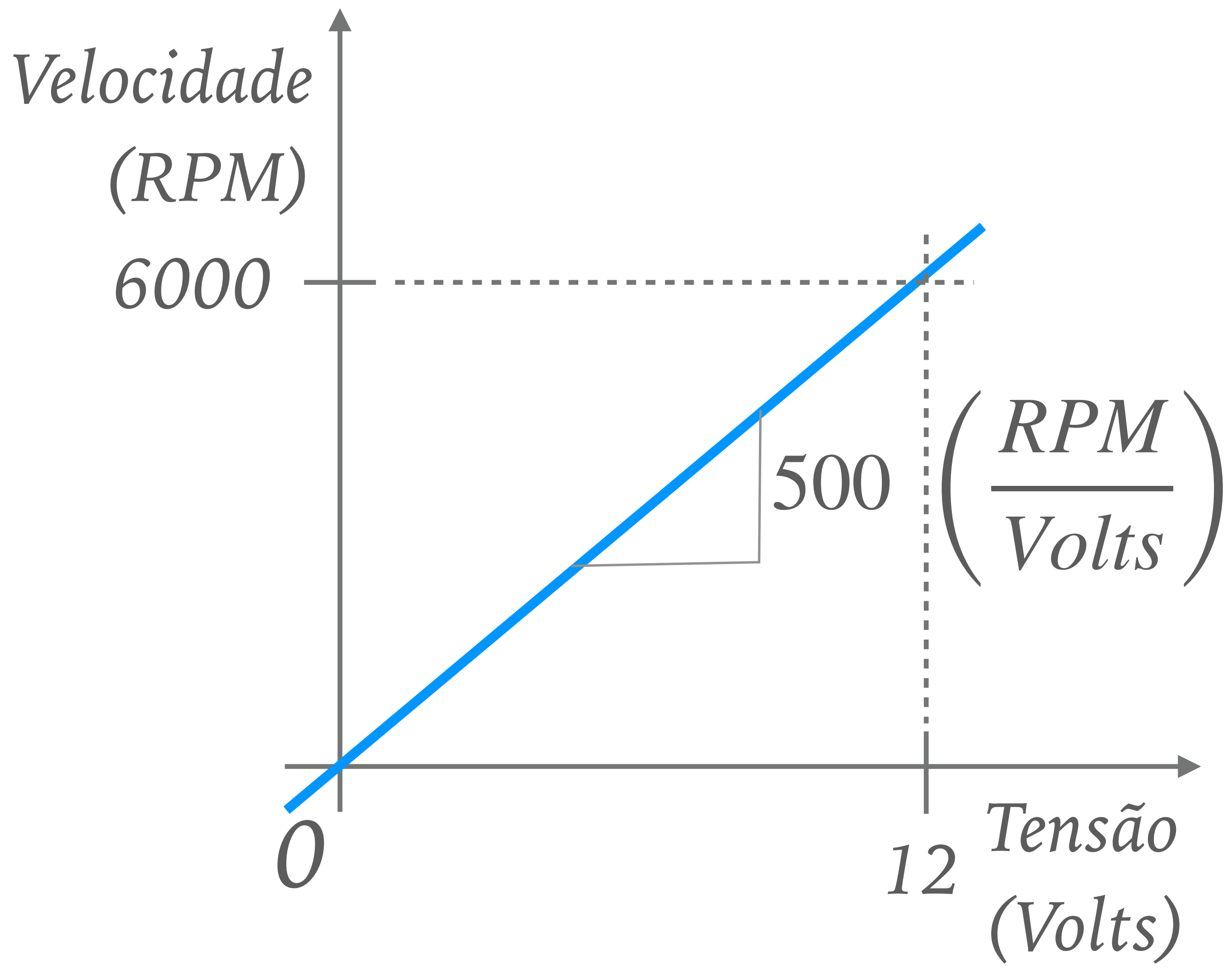
No caso do motor, se existe uma relação linear entre a saída (ω) e entrada (V), seu modelo matemático seria:

$$G = \frac{\omega}{V}$$

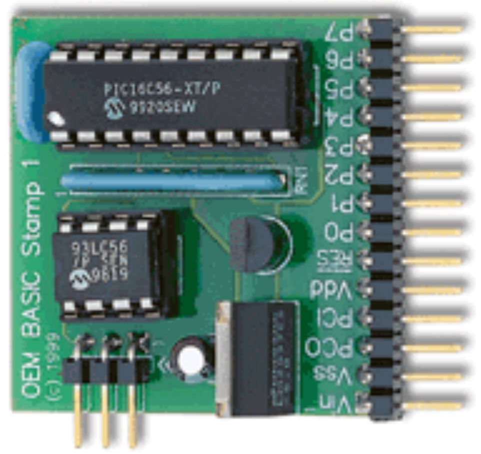
Solução:

$$\omega = G \cdot V$$

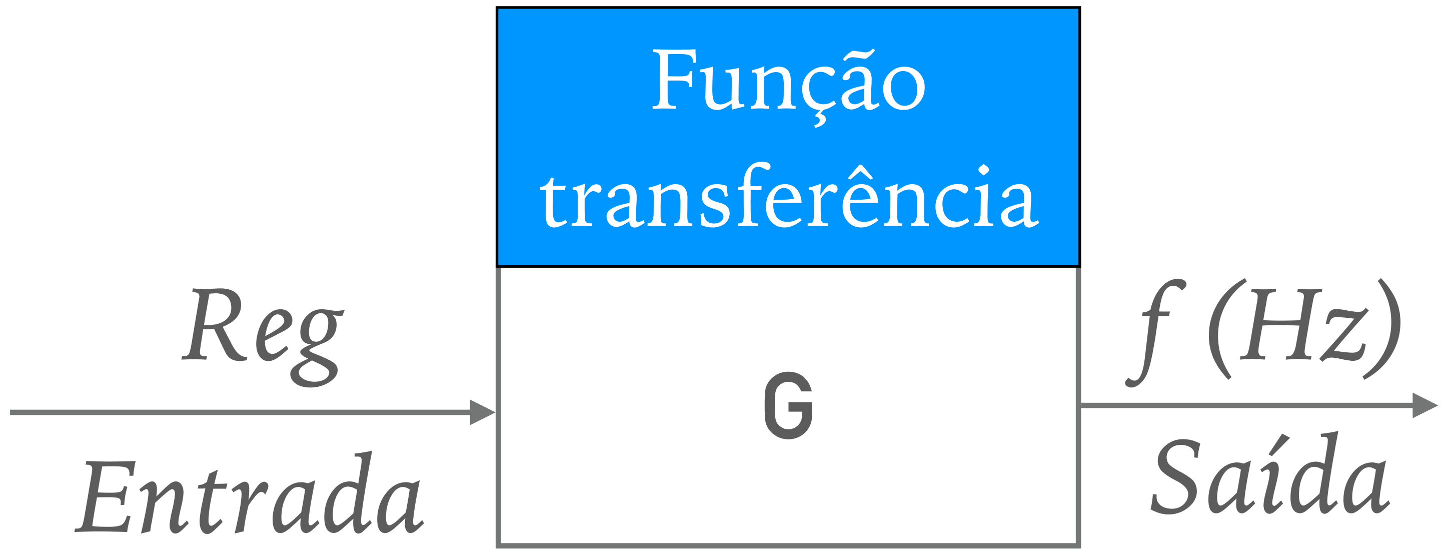
$$\omega = 500 \left(\frac{RPM}{\cancel{Volts}} \right) \cdot 12 \ (\cancel{Volts}) = 6.000 \ (RPM)$$



MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS

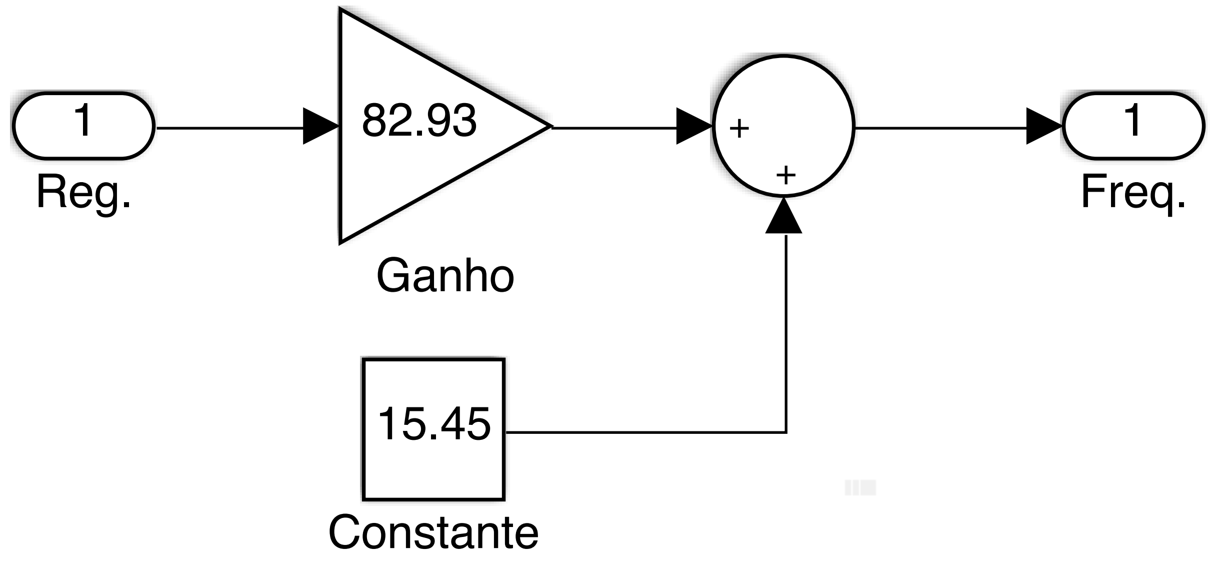


Exemplo2: Seja uma saída de áudio de uma placa micro-controlada. Através de medições em laboratório se percebeu que quando se programa certo registrador com o número 1, é gerada uma onda quadrada na frequência de 98,4 Hz e quando este registrador assume o valor 127, a freqüência de saída muda para 10.550 Hz. Levante uma função transferência que relacione a frequência gerada × valor do registrador, e determine que valor deveria ser programado neste registrador para gerar uma saída em 440 Hz? Na prática se deseja usar um comando como:




```
sound (valor_registrador, duração).
```

Solução:



A função transferência aqui é linear, isto é, se faz necessário levantar a equação da reta para este problema:

Equação da reta: $y = ax + b$

Montando um sistema de equações:

(1) $\quad 10500 = 127\,a + b$

(2) $\quad 98{,}4 = 1\,a + b$

Resolvendo:

Fazendo: (1) – (2), *teremos:*

$127a + b = 10550$

$-a - b = -98{,}4$

$(127 - 1)\,a = 10550 - 98{,}4$

$a = (10550 - 98{,}4)/126 = 82{,}9492$

Então:

$82{,}9492 \cdot 1 + b = 98{,}4$

$b = 98{,}4 - 82{,}9492 = 15{,}4508$

E assim, têm-se a função transferência:

$Freq = 82{,}9492 \cdot Reg + 15{,}4508$

Finalmente:

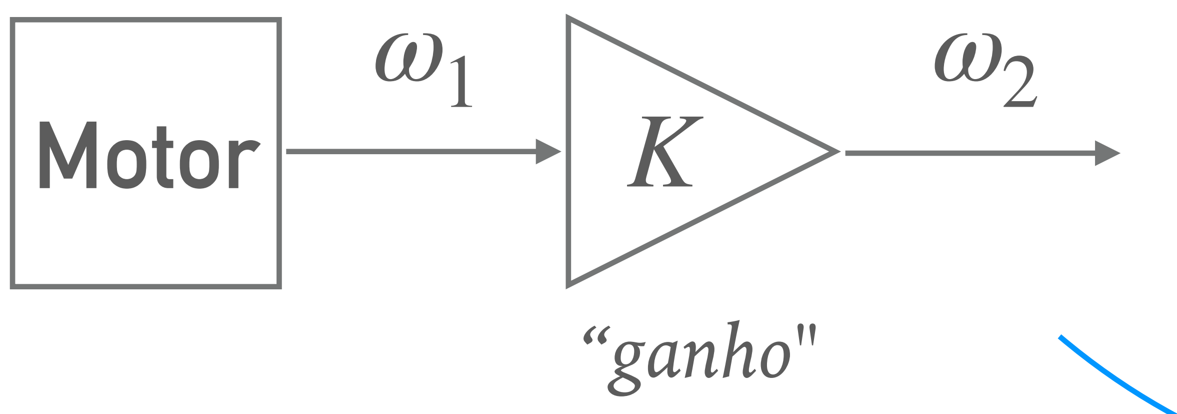
$440 = 82{,}9492 \cdot Reg + 15{,}4508$

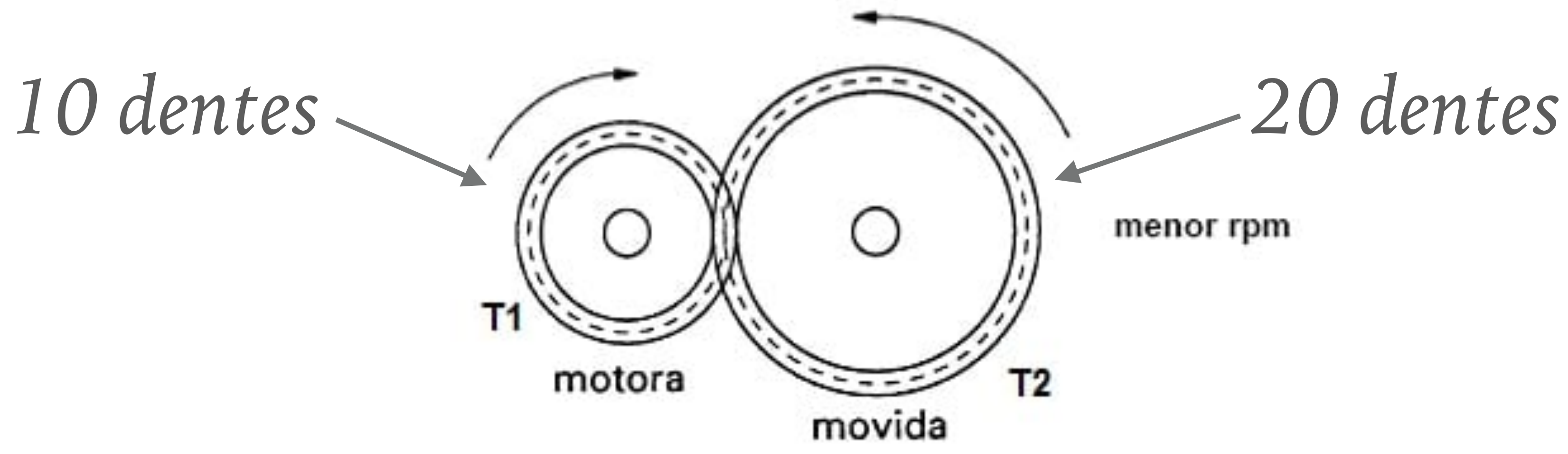
$$Reg = \frac{440 - 15{,}4508}{82{,}9492}$$

$Reg = 5{,}1182.$

EXEMPLOS DE MODELAGENS SIMPLES

- Sistema de engrenagens:





Relação de engrenagens

Relação de transmissão:
10:20, ou
1:2

$$\omega_2 = K \cdot \omega_1$$

$$K = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \therefore \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$K = \frac{n_1}{n_2} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Relação de Velocidades:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Onde:

$\omega_1 =$ *velocidade engrenagem 1 (rad/s);*
$\omega_2 =$ *velocidade engrenagem 2 (rad/s);*
$n_1 =$ *número dentes engrenagem 1;*
$n_2 =$ *número dentes engrenagem 2.*

Relação de Torques:

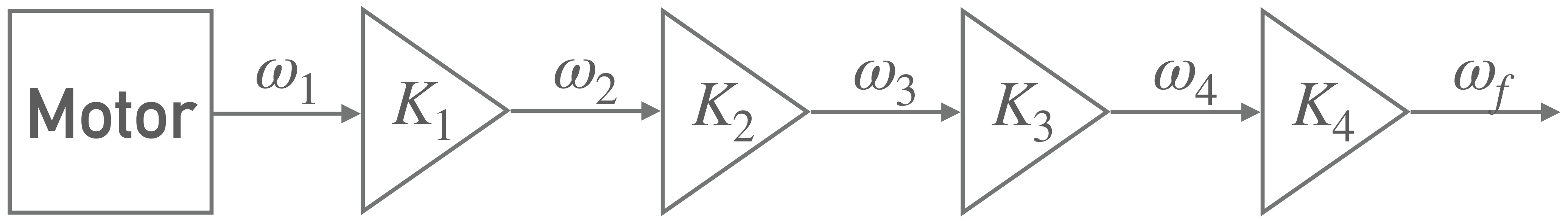
$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Onde:

$\tau_1 =$ *torque na engrenagem 1* $(N \cdot m)$;
$\tau_2 =$ *torque na engrenagem 2* $(N \cdot m)$;
$n_1 =$ *número dentes engrenagem 1;*
$n_2 =$ *número dentes engrenagem 2.*

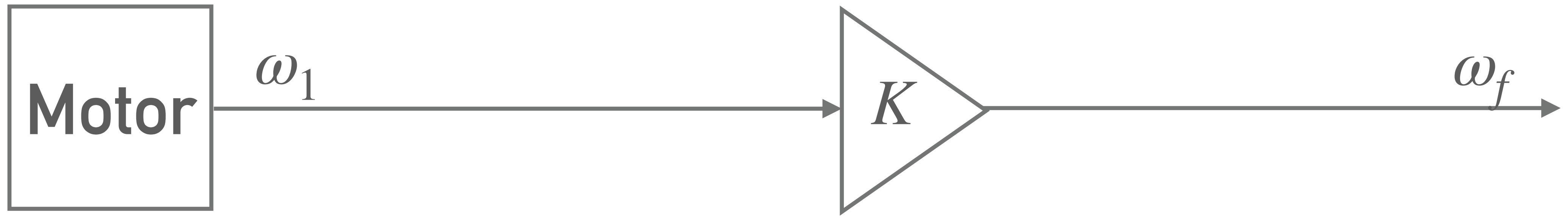
EXEMPLOS DE MODELAGENS SIMPLES

- Sistema com caixa de redução de engrenagens:



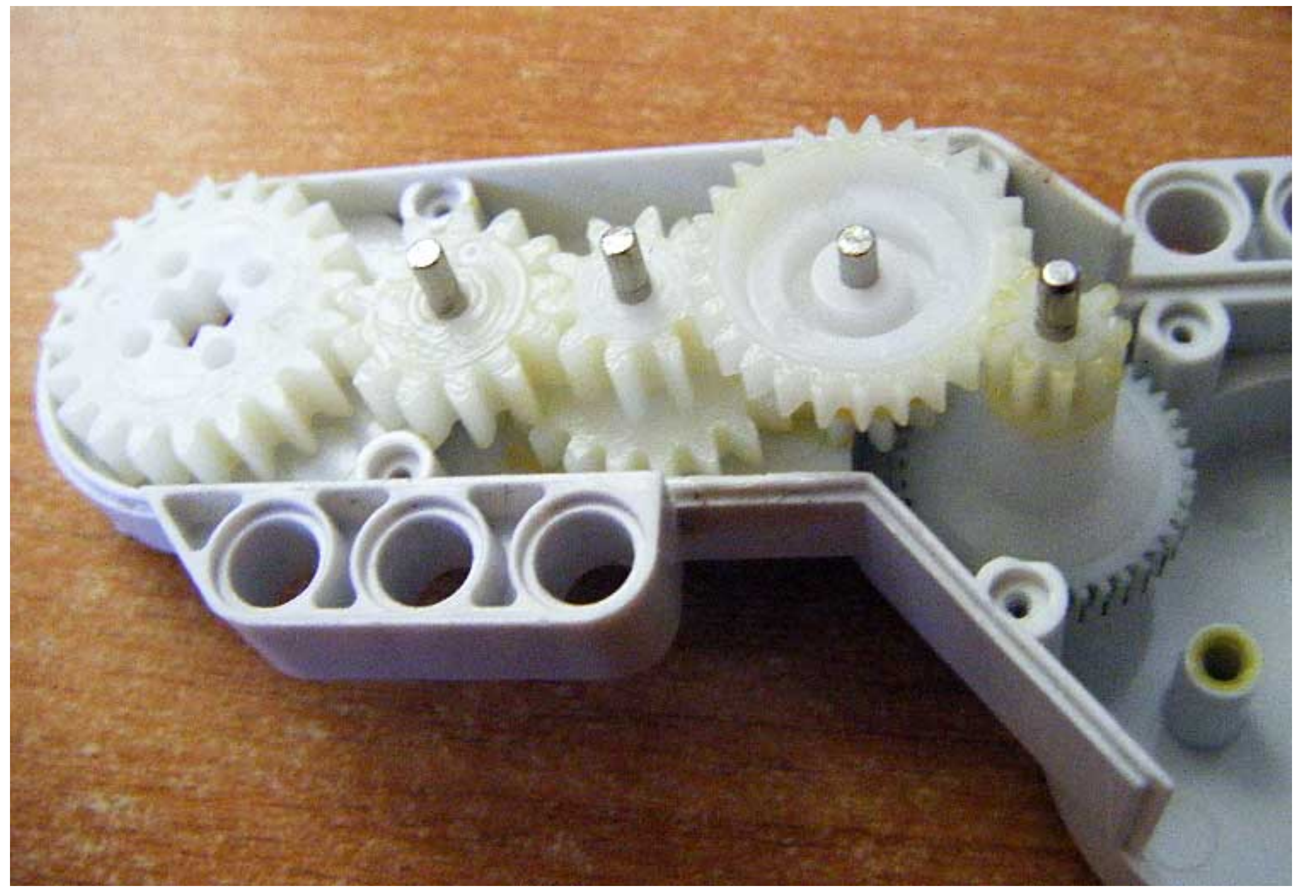
1:4 *1:3* *1:2* *1:2*

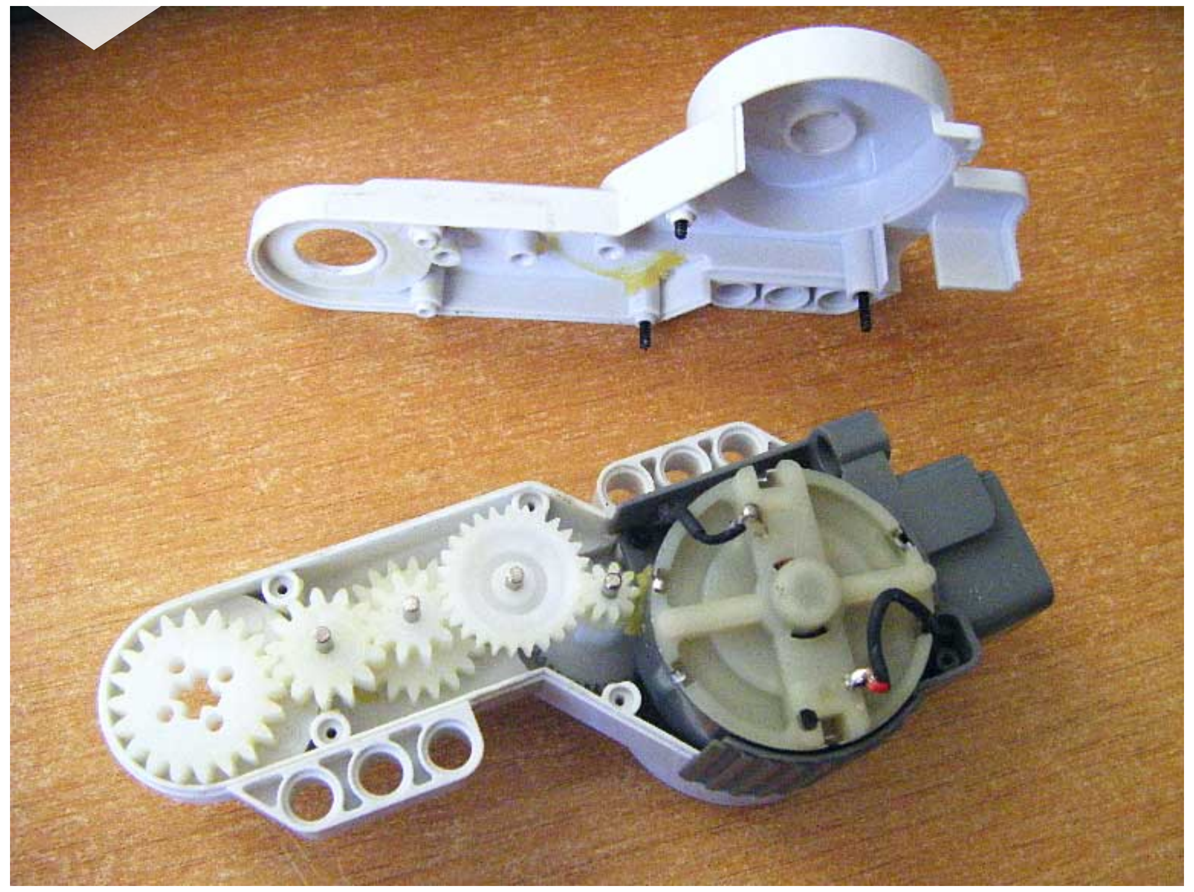
$$K_1 = \frac{1}{4} \qquad K_1 = \frac{1}{3} \qquad K_1 = \frac{1}{2} \qquad K_1 = \frac{1}{2}$$

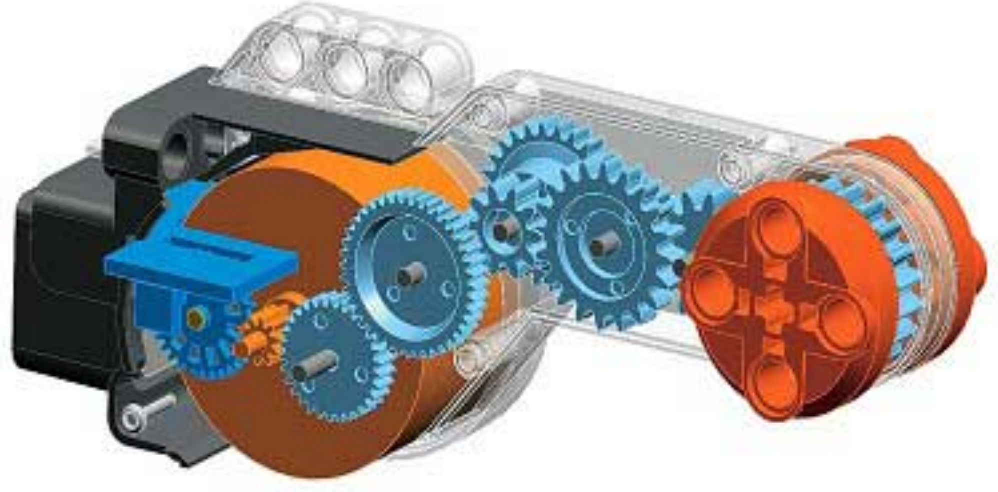


1:48

$$K = \frac{1}{48}$$







Relações internas:
10:40 = 1:4
9:27 = 1:3
10:20 = 1:2
10:20 = 1:2
Total = 1:48

Relação de Velocidades:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Onde:

$\omega_1 =$ *velocidade engrenagem 1 (rad/s);*

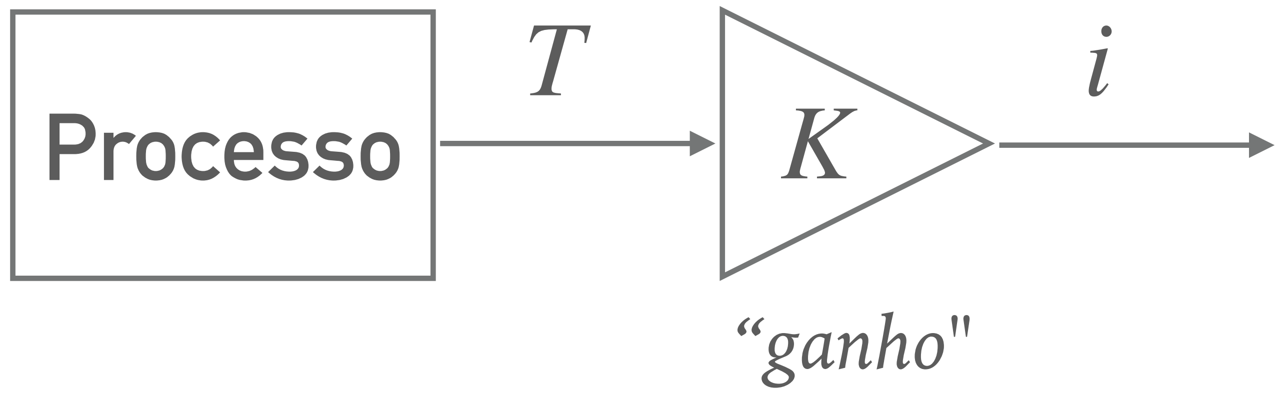
$\omega_2 =$ *velocidade engrenagem 2 (rad/s);*

$n_1 =$ *número dentes engrenagem 1;*

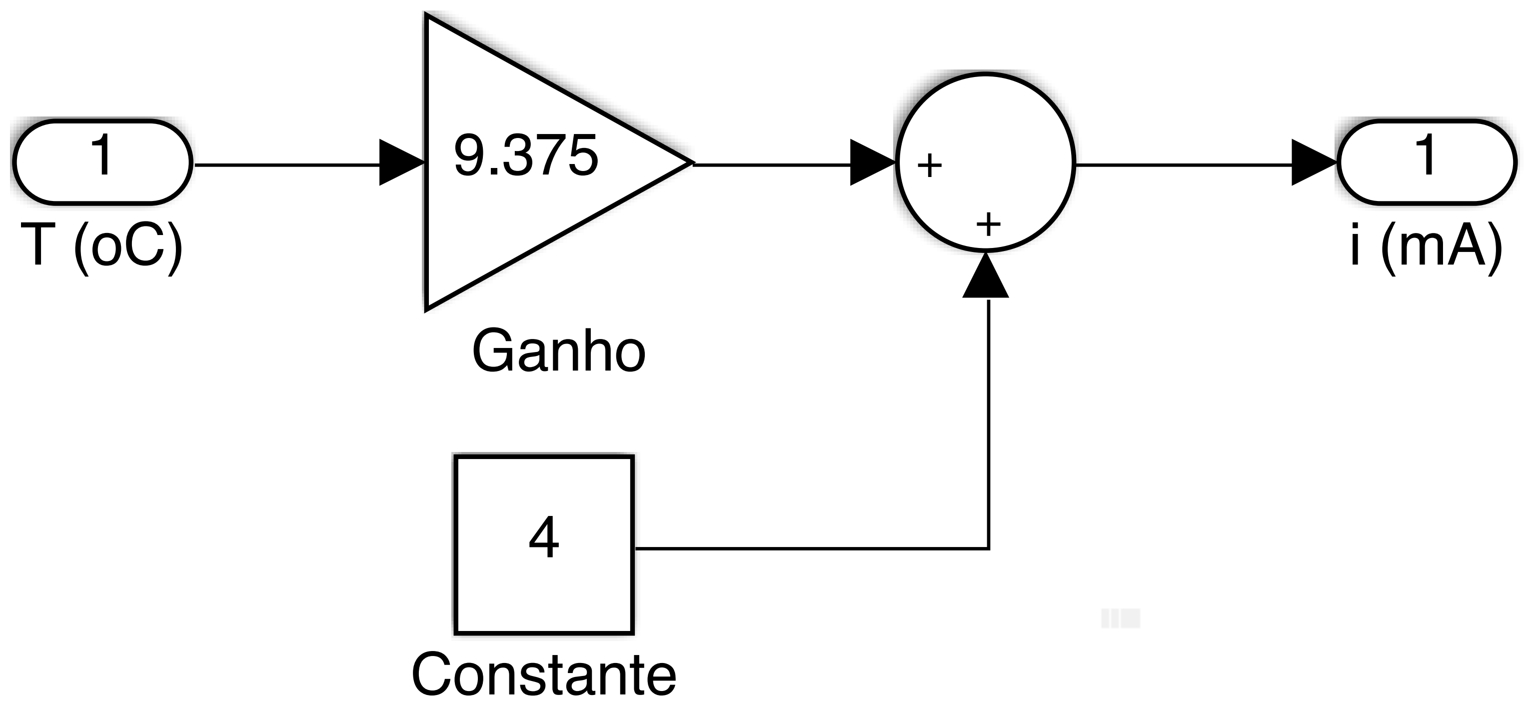
$n_2 =$ *número dentes engrenagem 2.*

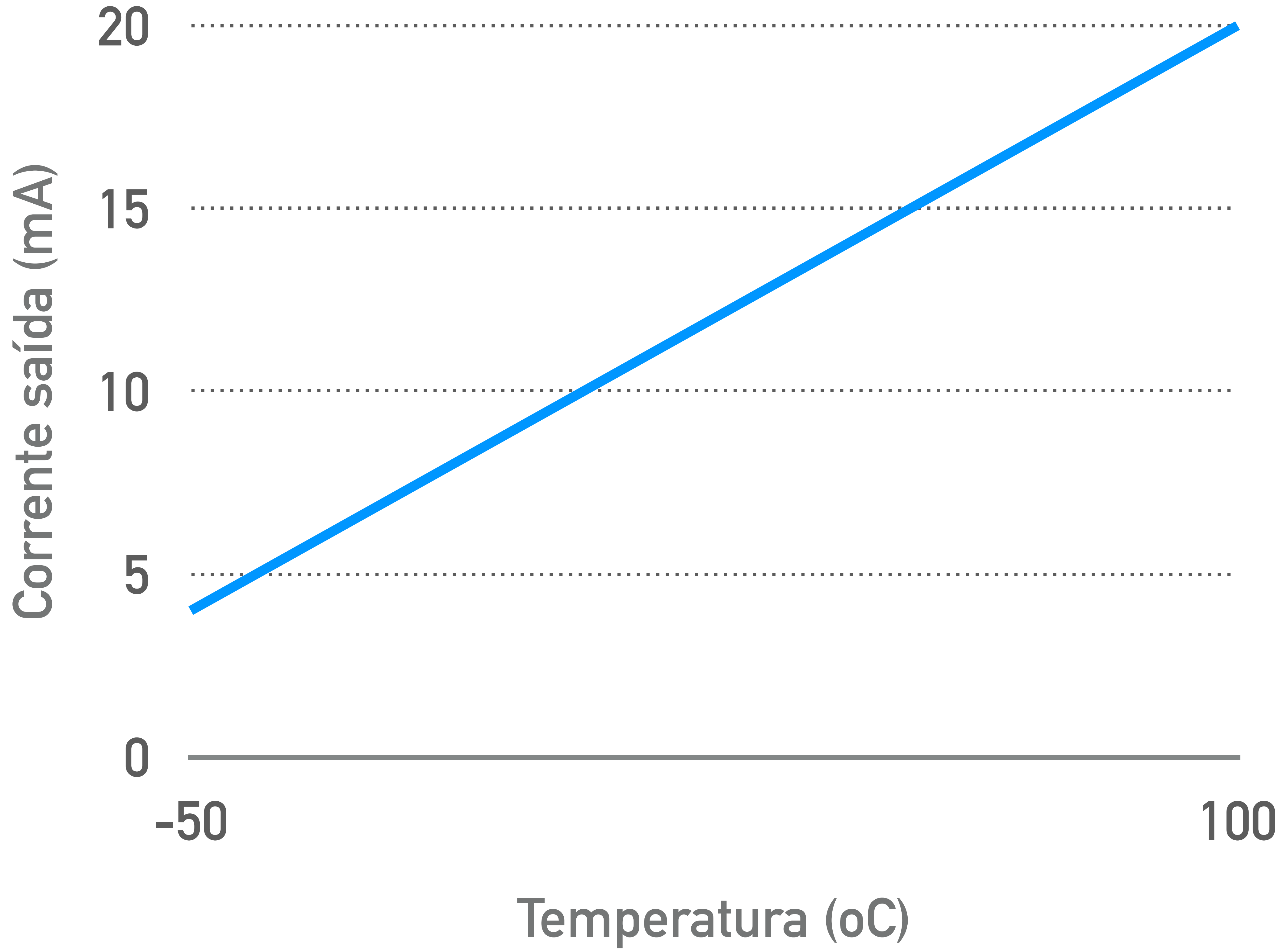
EXEMPLOS DE MODELAGENS SIMPLES

➤ Sistema sensor de temperatura de -50ºC até 100ºC, analógico, padrão industrial 4-20 mA:

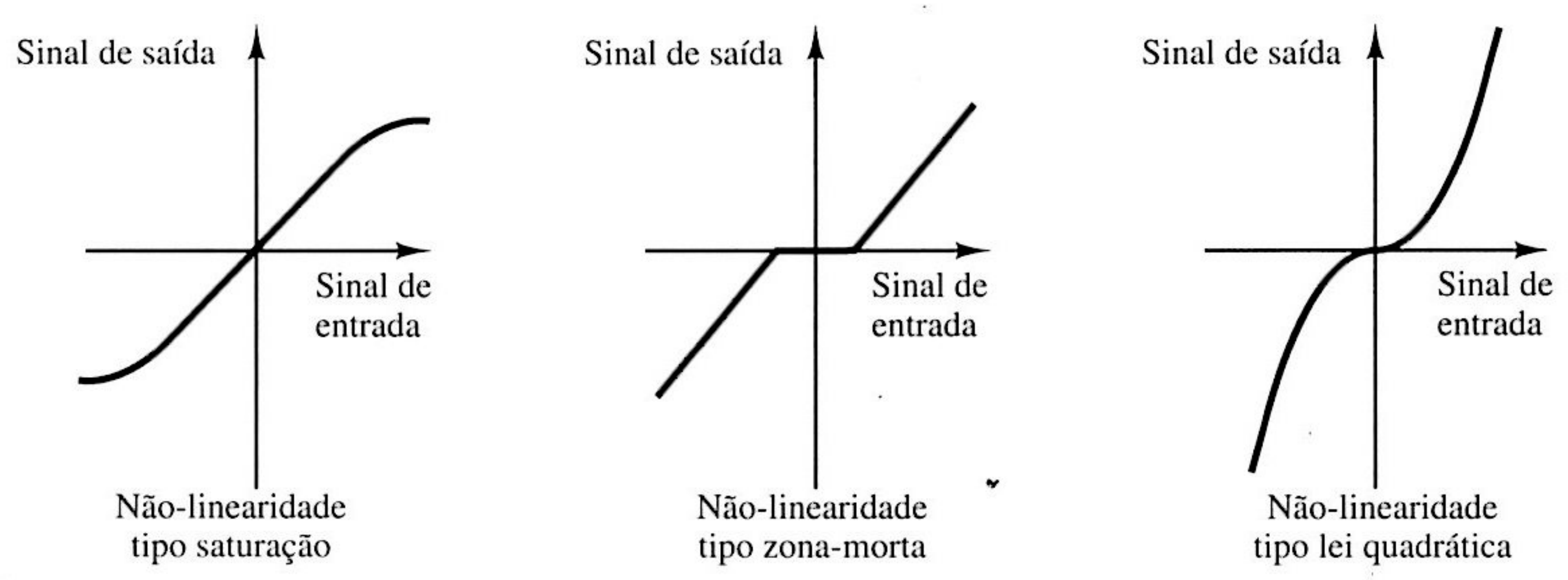


$$K = \frac{100 - (-50)}{20 - 4} = 9{,}375$$





SISTEMAS LINEARES E NÃO-LINEARES



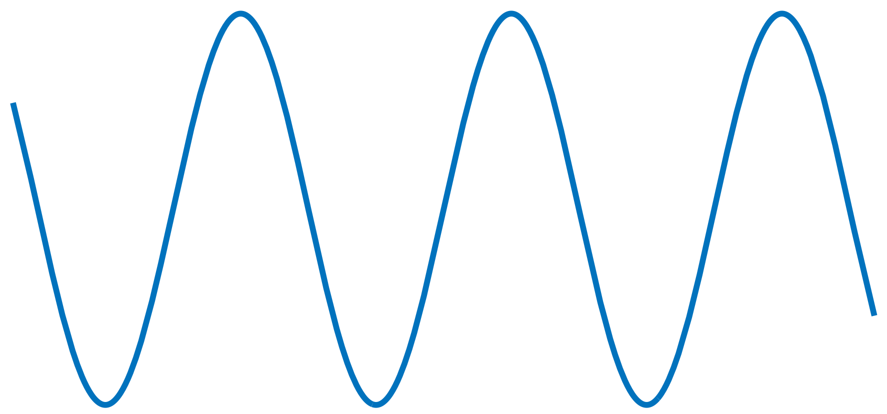
***Sistema Linear**: é dito linear se sobre ele se aplica o princípio da superposição.*

*O **Princípio da Superposição** estabelece que a resposta produzida pela aplicação simultânea de 2 excitações diferentes é igual à soma das 2 repostas individuais a cada uma das excitações. Portanto, para sistemas lineares, a resposta a vias entradas pode ser calculada considerando-se uma única entrada de cada vez e adicionando-se os resultados.*

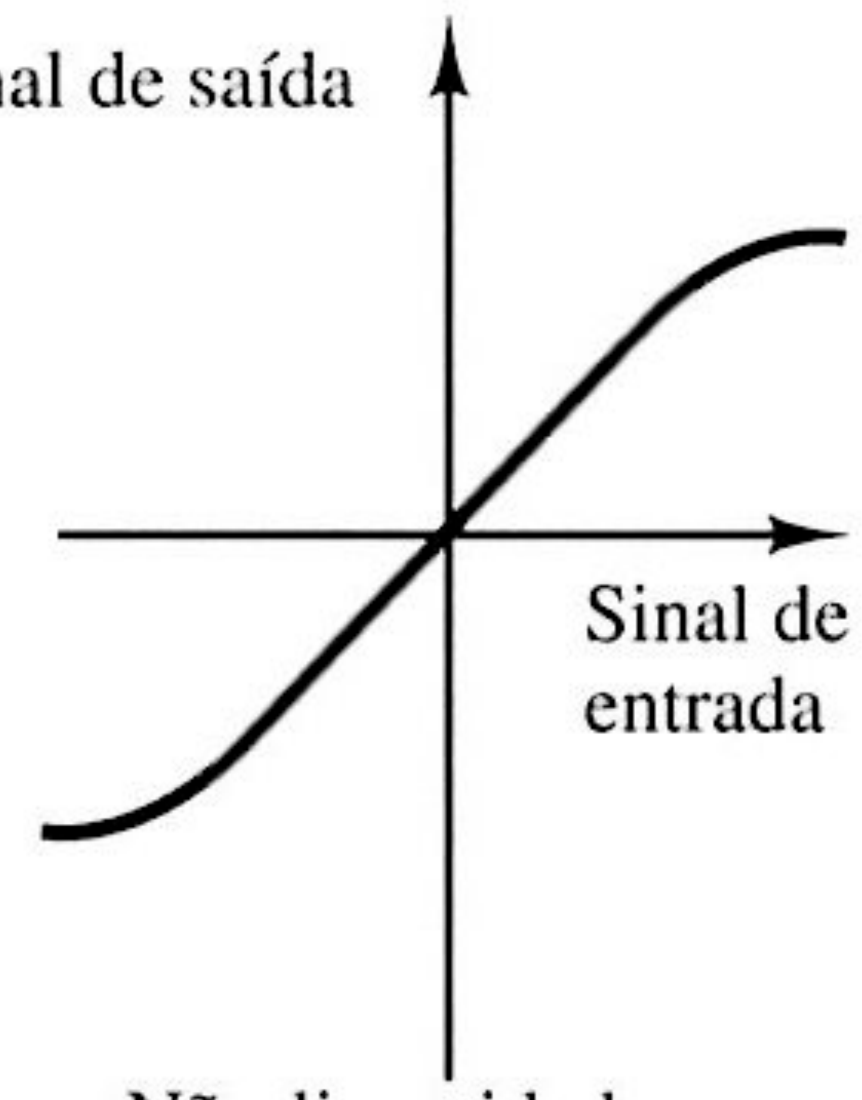
Existem Sistemas Lineares Invariantes no tempo x Sistemas lineares variantes no tempo.

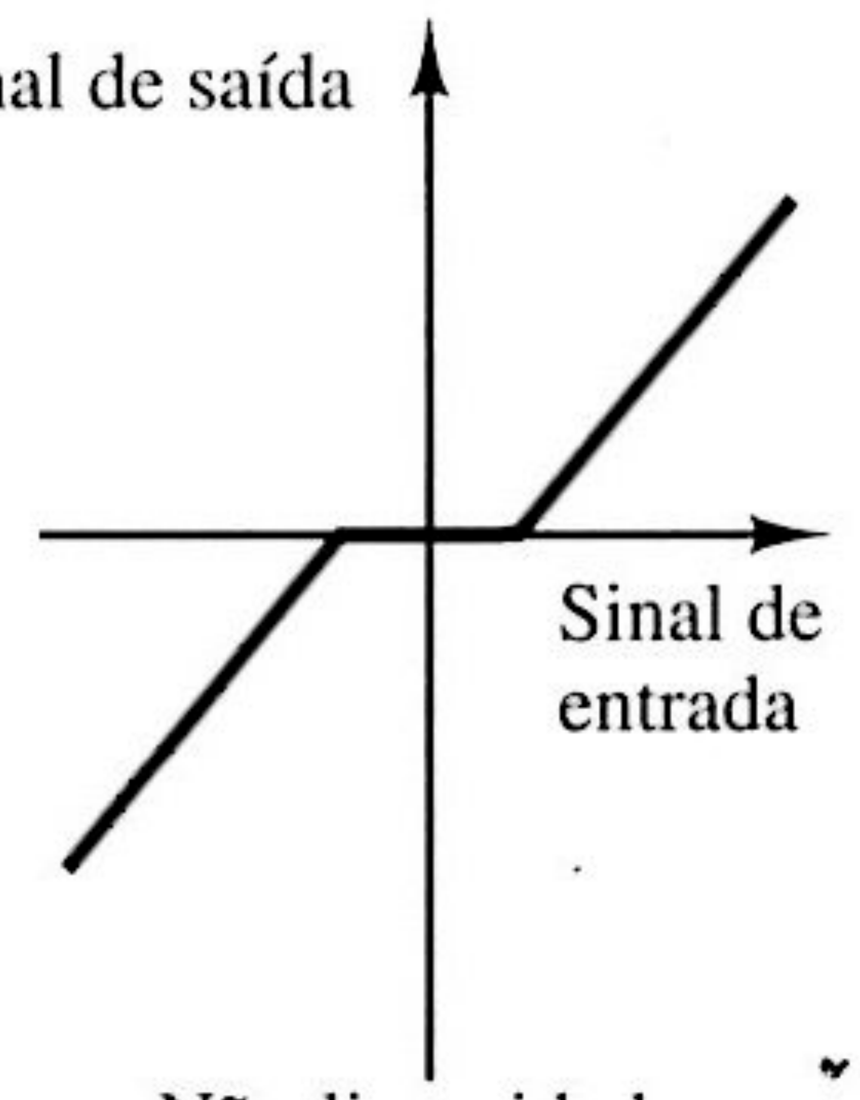
***Sistemas não-lineares**: se a ele não se aplica o princípio da superposição. Assim, nos sistemas não-lineares, a resposta a 2 entradas não pode ser calculada tratando-se uma entrada de cada vez e somando-se os resultados. Por exemplo:*

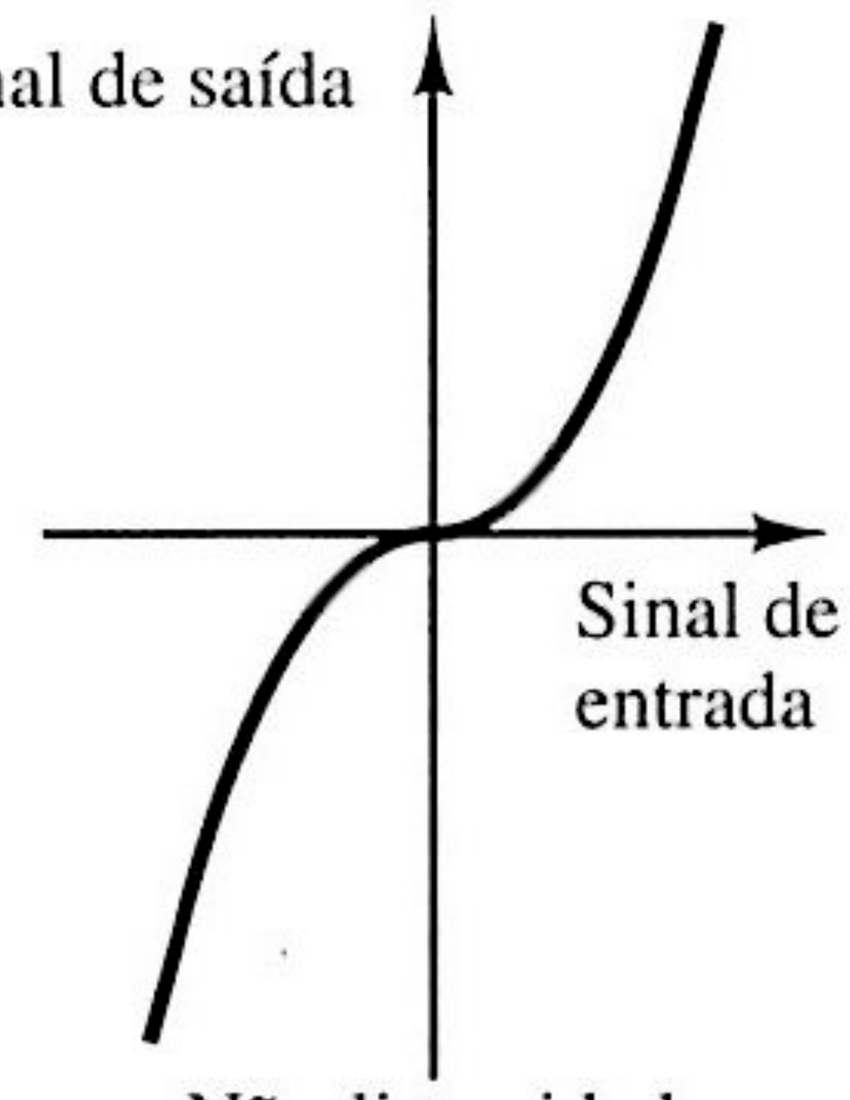
$$\ddot{x} + \dot{x}^2 + x = A \sin \omega t$$



SISTEMAS NÃO-LINEARES





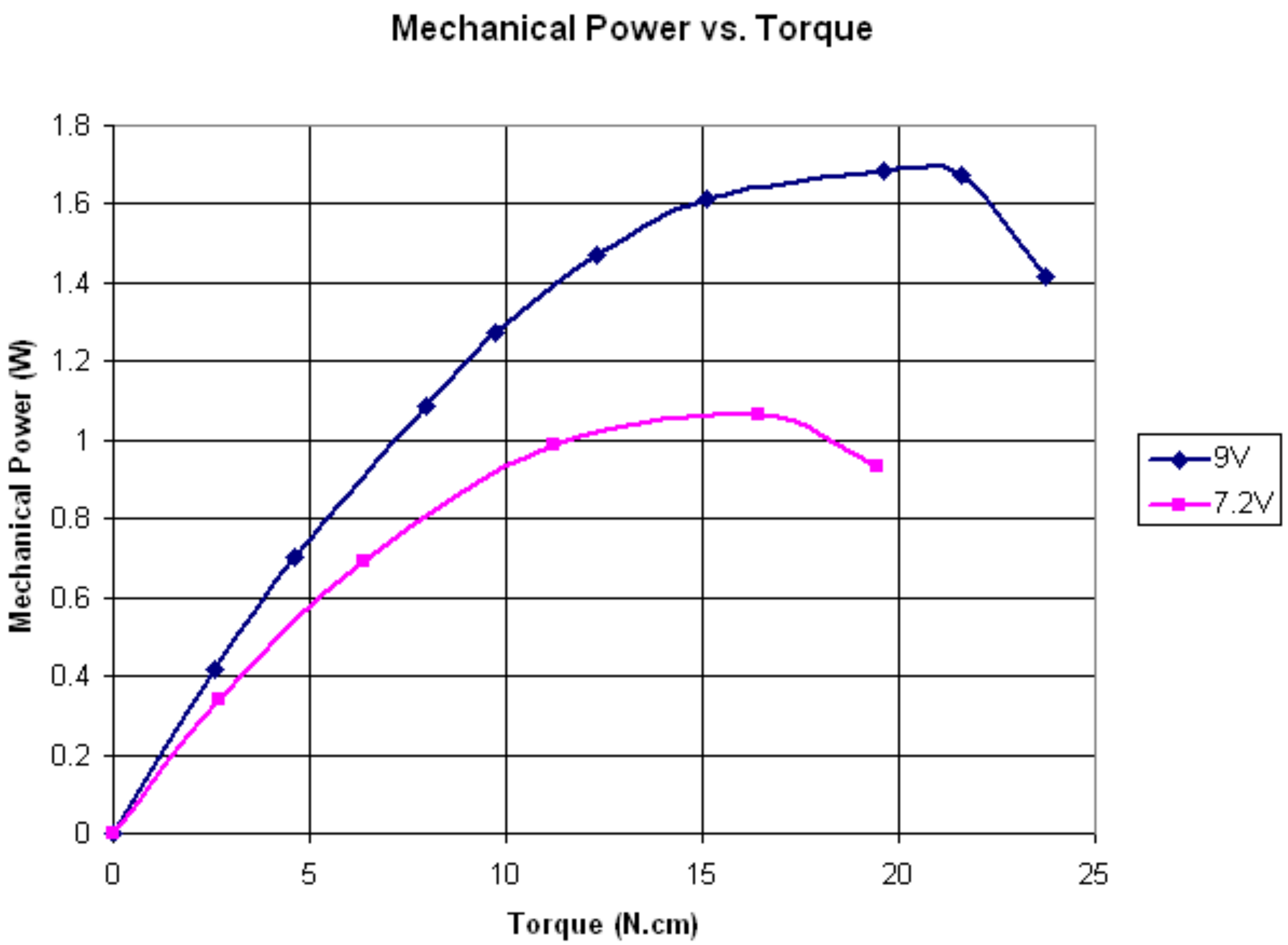


Exemplos:

- Sistemas eletromecânicos, hidráulicos, pneumáticos.
- A saída de um componente pode saturar para sinais elevados na entrada ("saturação");
- Pode haver uma "zona-morta" no sistema causado por folgas ou desgastes num sistema de engrenagens ou cremalheira; Neste caso, a saída do sistema não varia (fica insensível) para pequenas variações no sinal de entrada.
- Sistemas de controle liga-desliga (*on-off*): não há uma ação linear entre a entrada e saída do controlador.

SISTEMAS NÃO-LINEARES

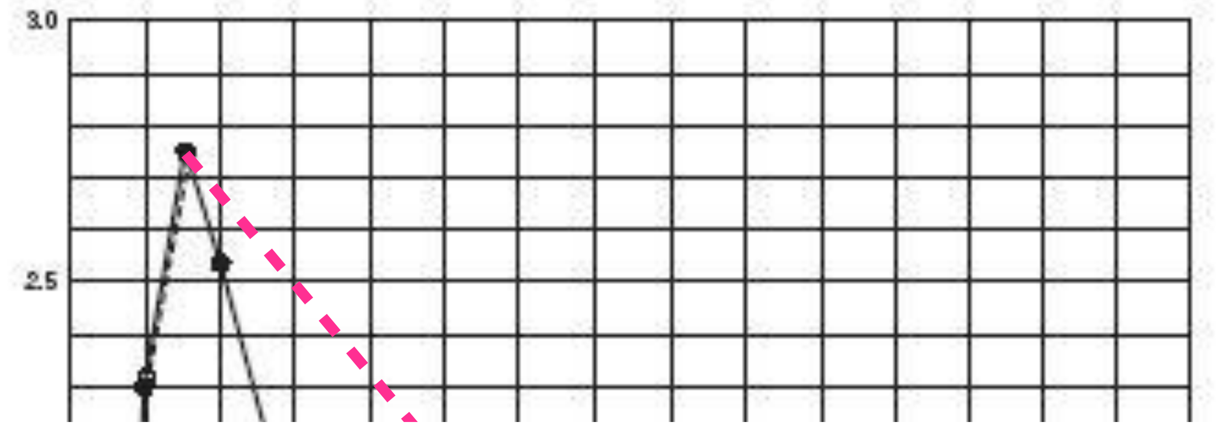
➤ Exemplo: curva de torque de motores



ENTENDENDO RESPOSTA DE UM SENSOR

- O sensor de distância GP2Y0A02YK baseado em IR do fabricante Sharp:
  - mede de 20 à 150 cm; máximo de f_s = 20,87 Hz.

Obs.: Uso do processo "Bola no Tubo":



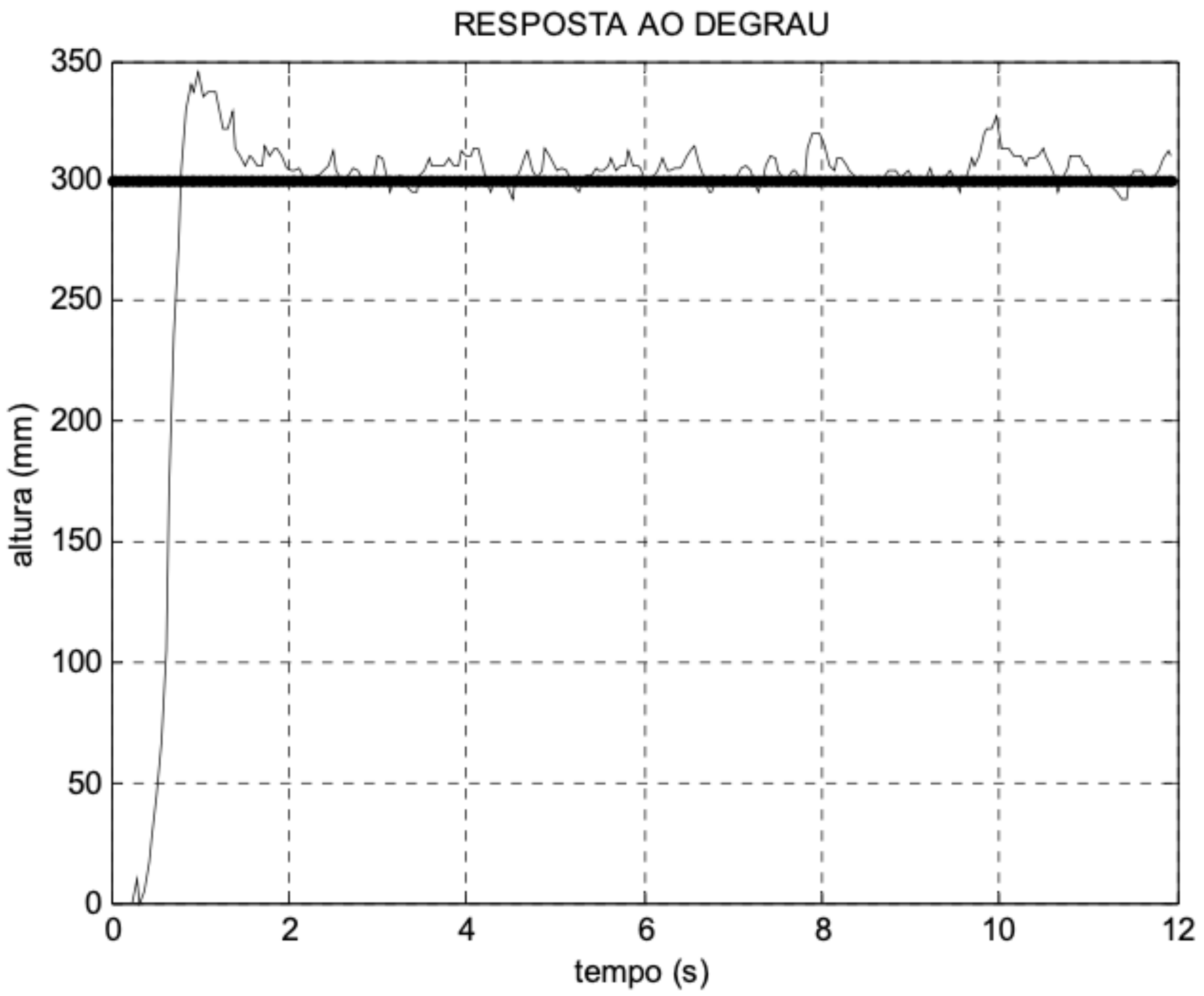
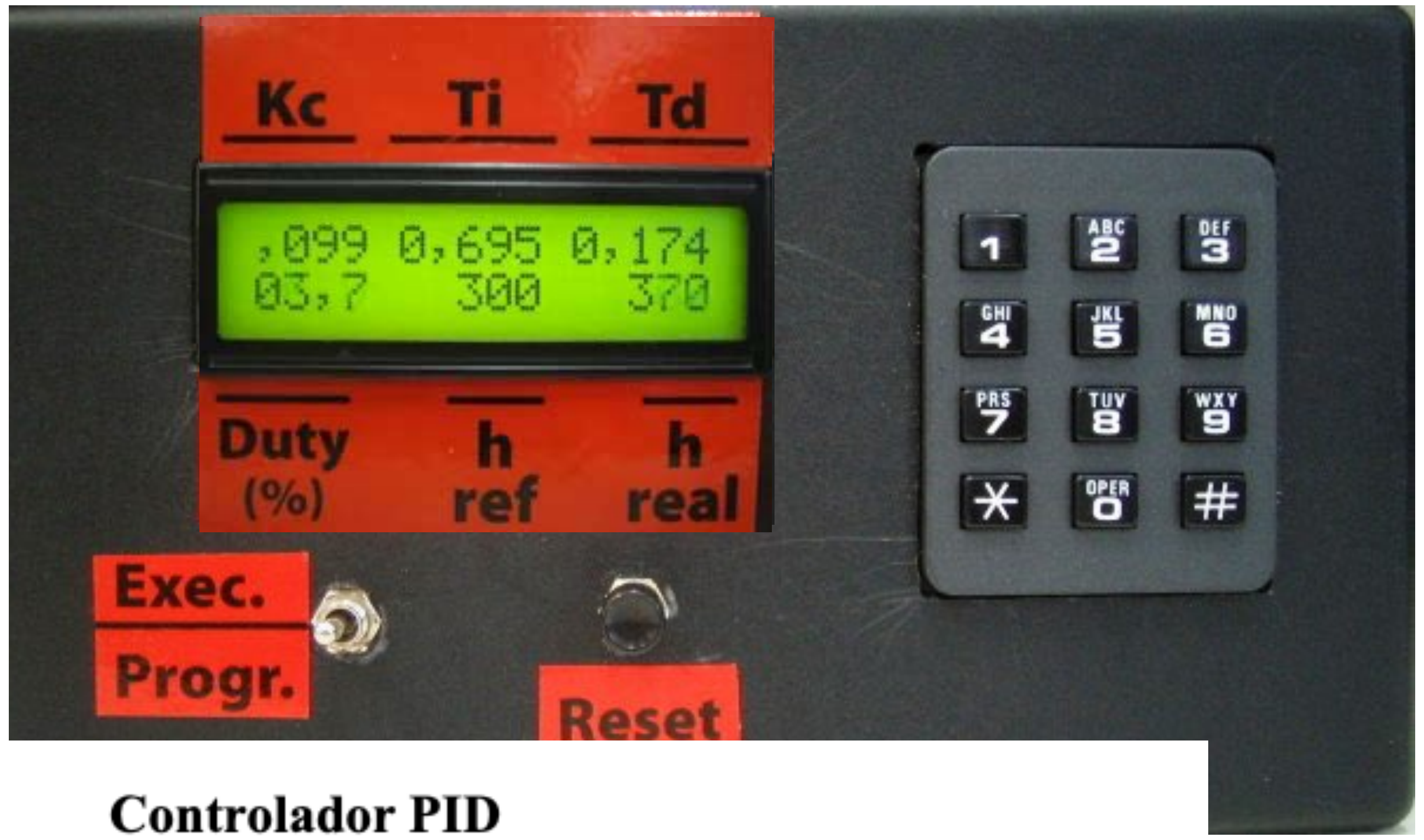
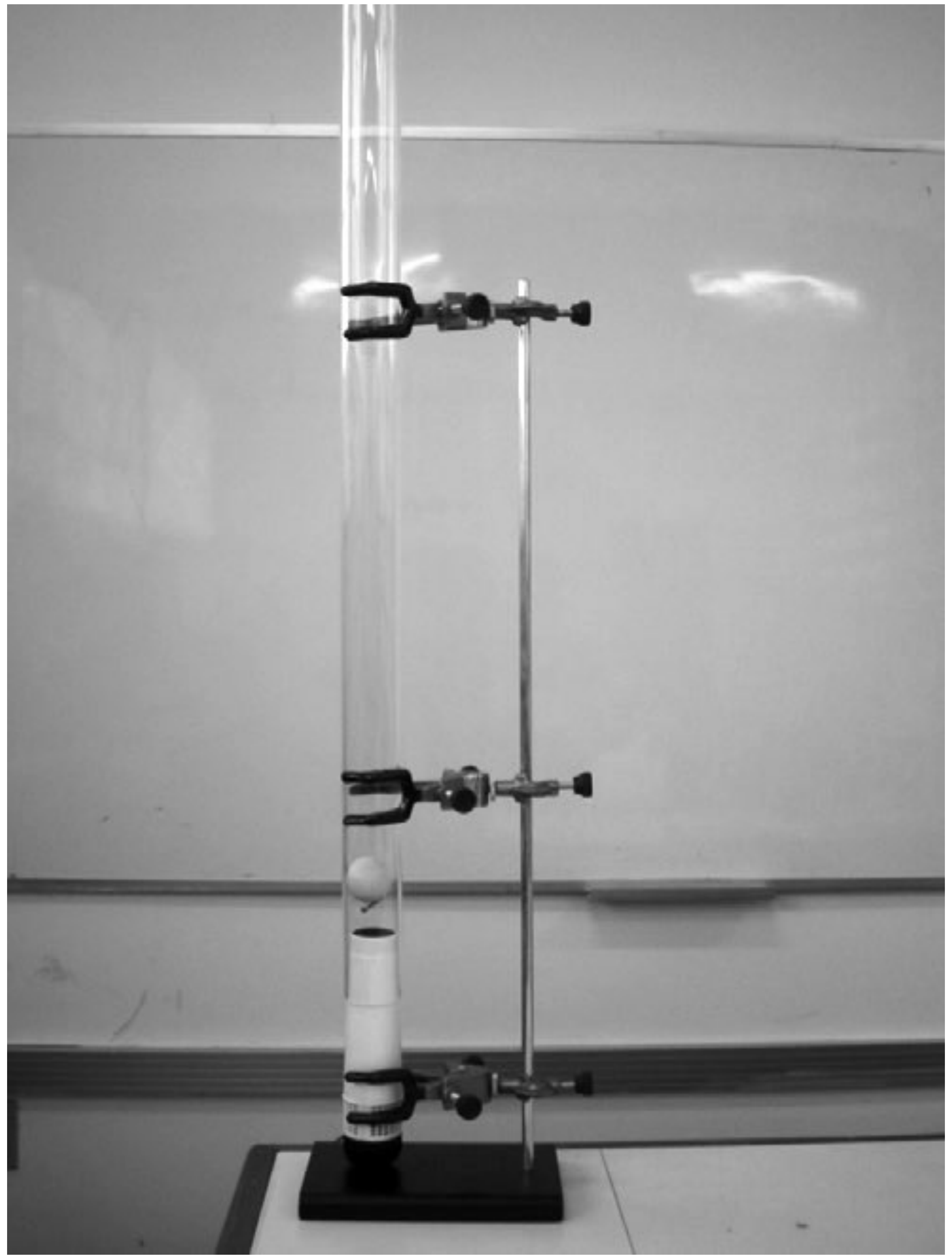


Figura 58 - Curva de resposta com controlador PD



Controlador PID

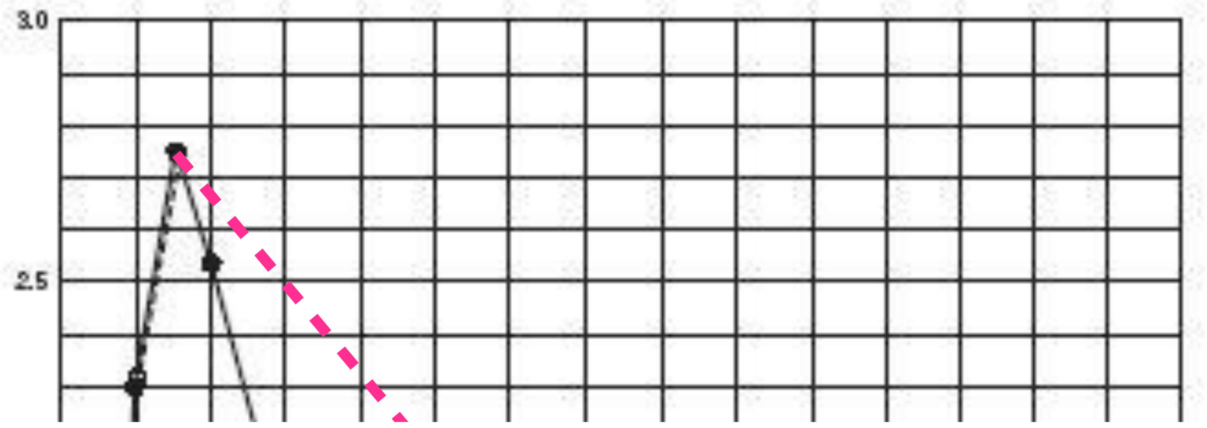
$$-e_{n-1})+\frac{Ts}{Ti}e_n+\frac{Td}{Ts}\left(e_n-2e_{n-1}+e_{n-2}\right)\Big]$$



ɔcesso bola e tubo, TCC (Eng. Elétrica/UPF), 114p, 2006.

ENTENDENDO RESPOSTA DE UM SENSOR

- O sensor de distância GP2Y0A02YK baseado em IR do fabricante Sharp:



- mede de 20 à 150 cm; máximo de f_s = 20,87 Hz.

Obs.: Uso do processo "Bola no Tubo":

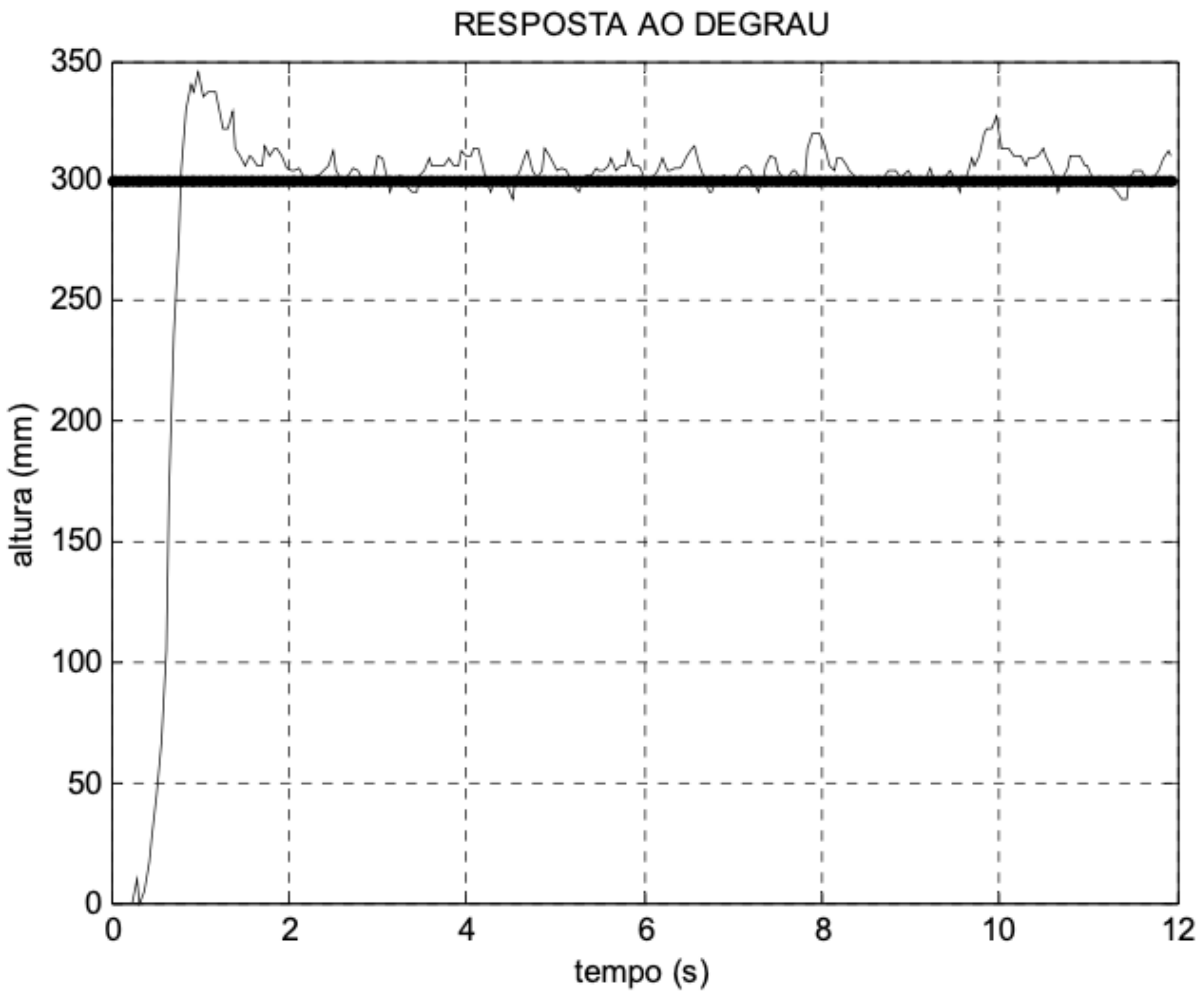
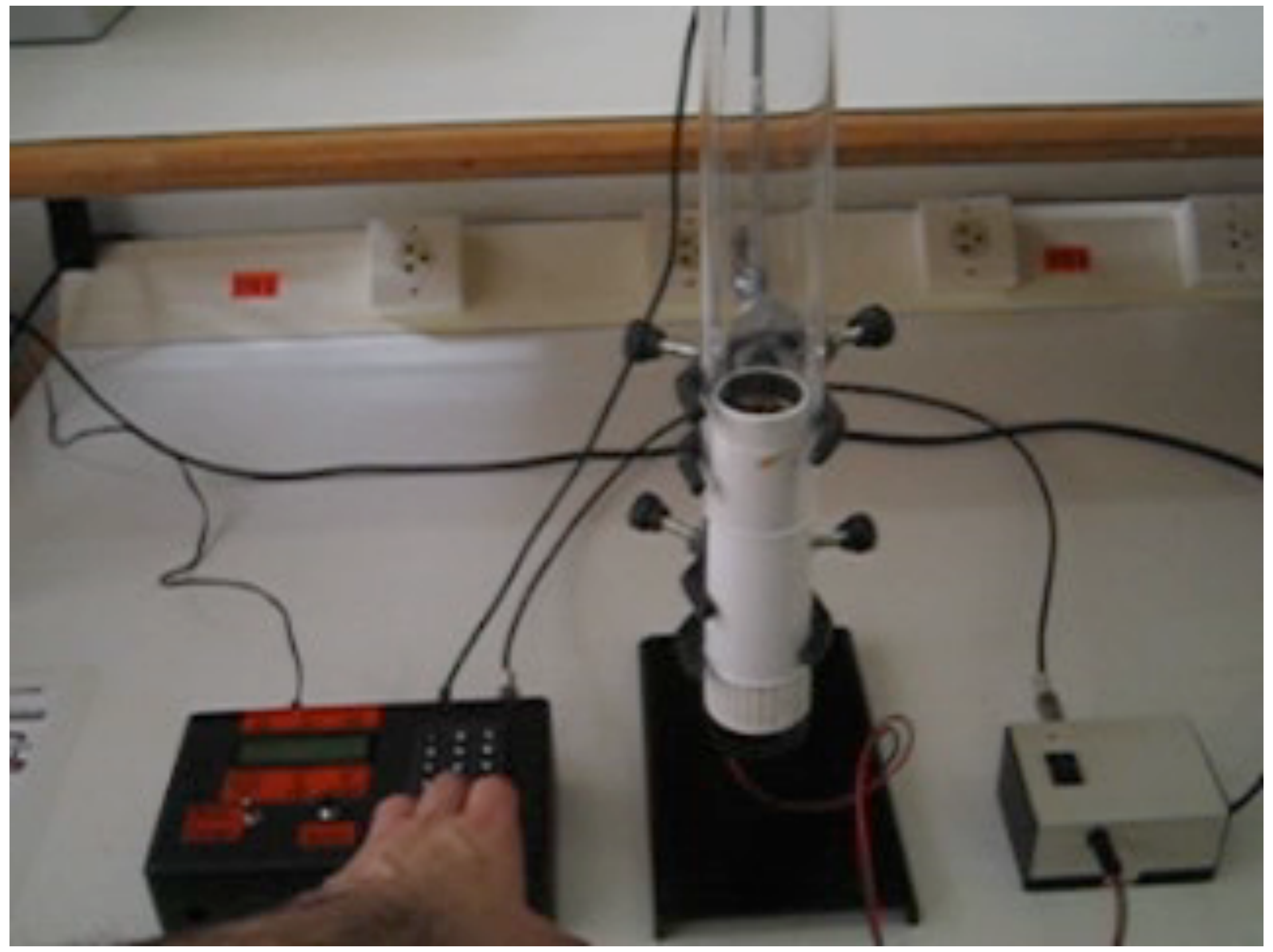


Figura 58 - Curva de resposta com controlador PD

Controlador PID

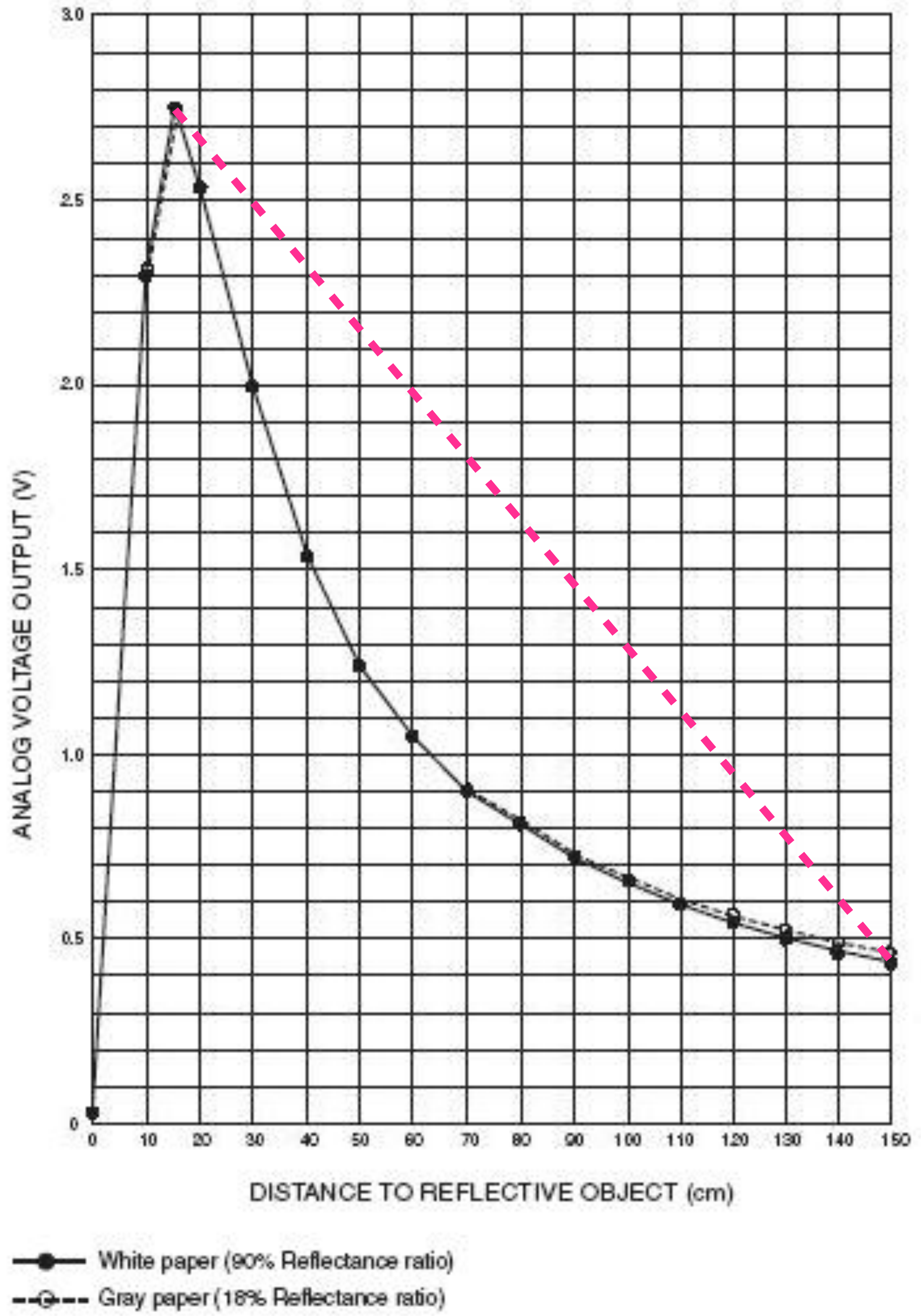
$$-e_{n-1}\big) + \frac{Ts}{Ti} e_n + \frac{Td}{Ts}\left(e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}\right)\Big]$$



ocesso bola e tubo, TCC (Eng. Elétrica/UPF), 114p, 2006.

ENTENDENDO RESPOSTA DE UM SENSOR

- O sensor de distância GP2Y0A02YK baseado em IR do fabricante Sharp:
  - mede de 20 à 150 cm; máximo de f_s = 20,87 Hz.



Dados reais levantados ⟶ Excel:

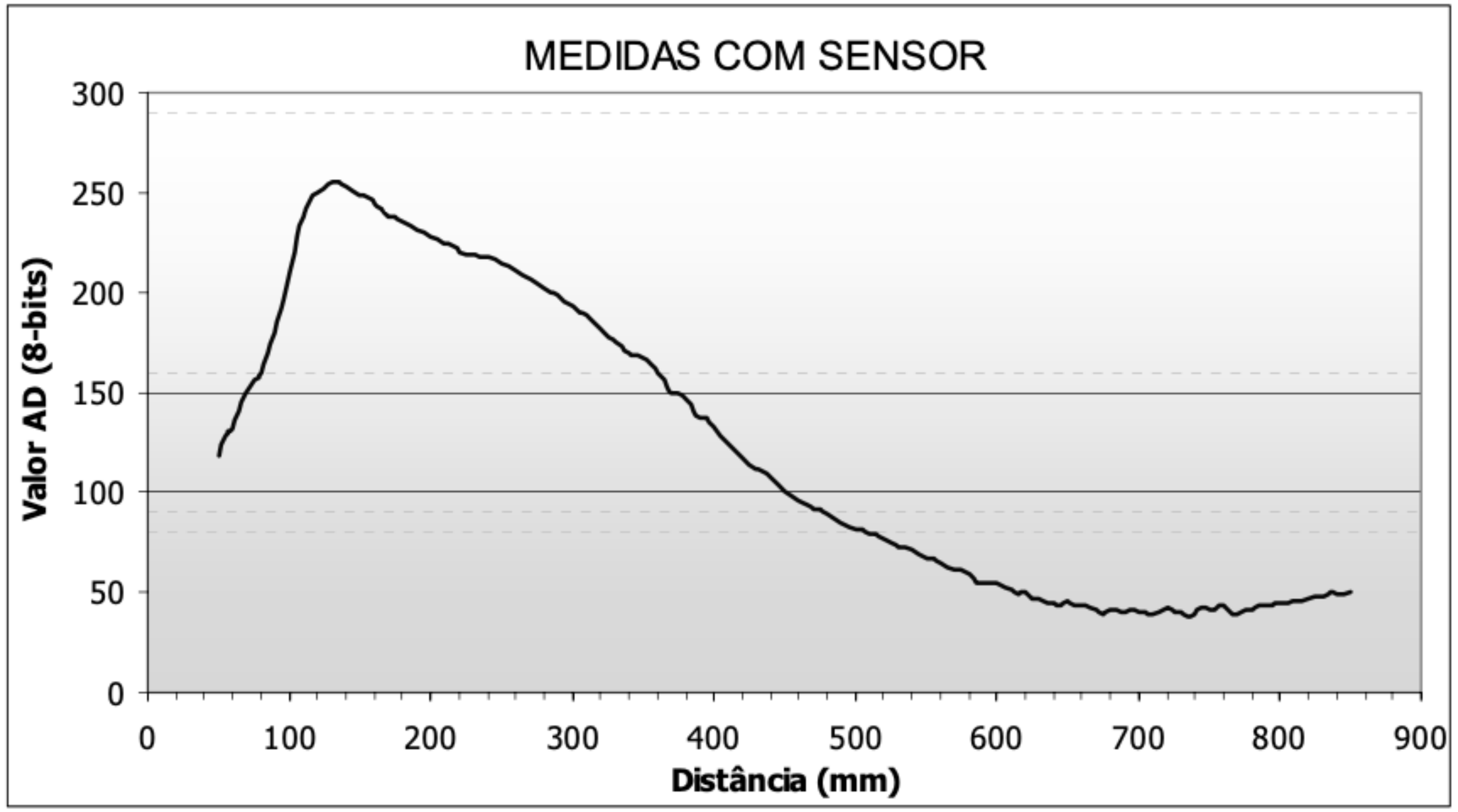


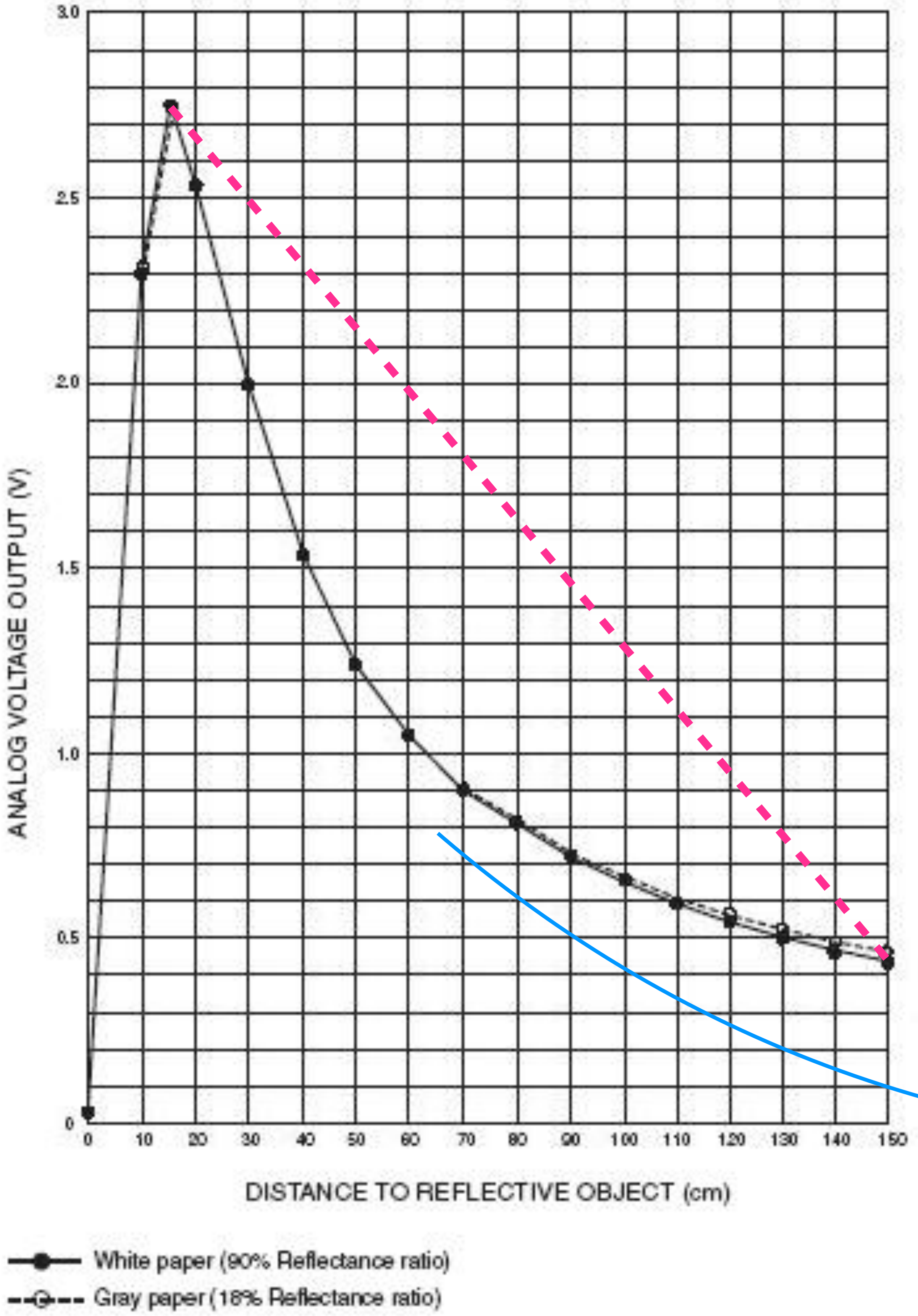
Figura 45 - Resposta do sensor IR obtida experimentalmente

Ref.: Vanz, Robinson Caldart, Controlador digital para processo bola e tubo, TCC (Eng. Elétrica/UPF), 114p, 2006.

ENTENDENDO RESPOSTA DE UM SENSOR

- O sensor de distância GP2Y0A02YK baseado em IR do fabricante Sharp:
  - mede de 20 à 150 cm; máximo de $f_s = 20{,}87$ Hz.

Dados reais levantados ⟶ Excel:



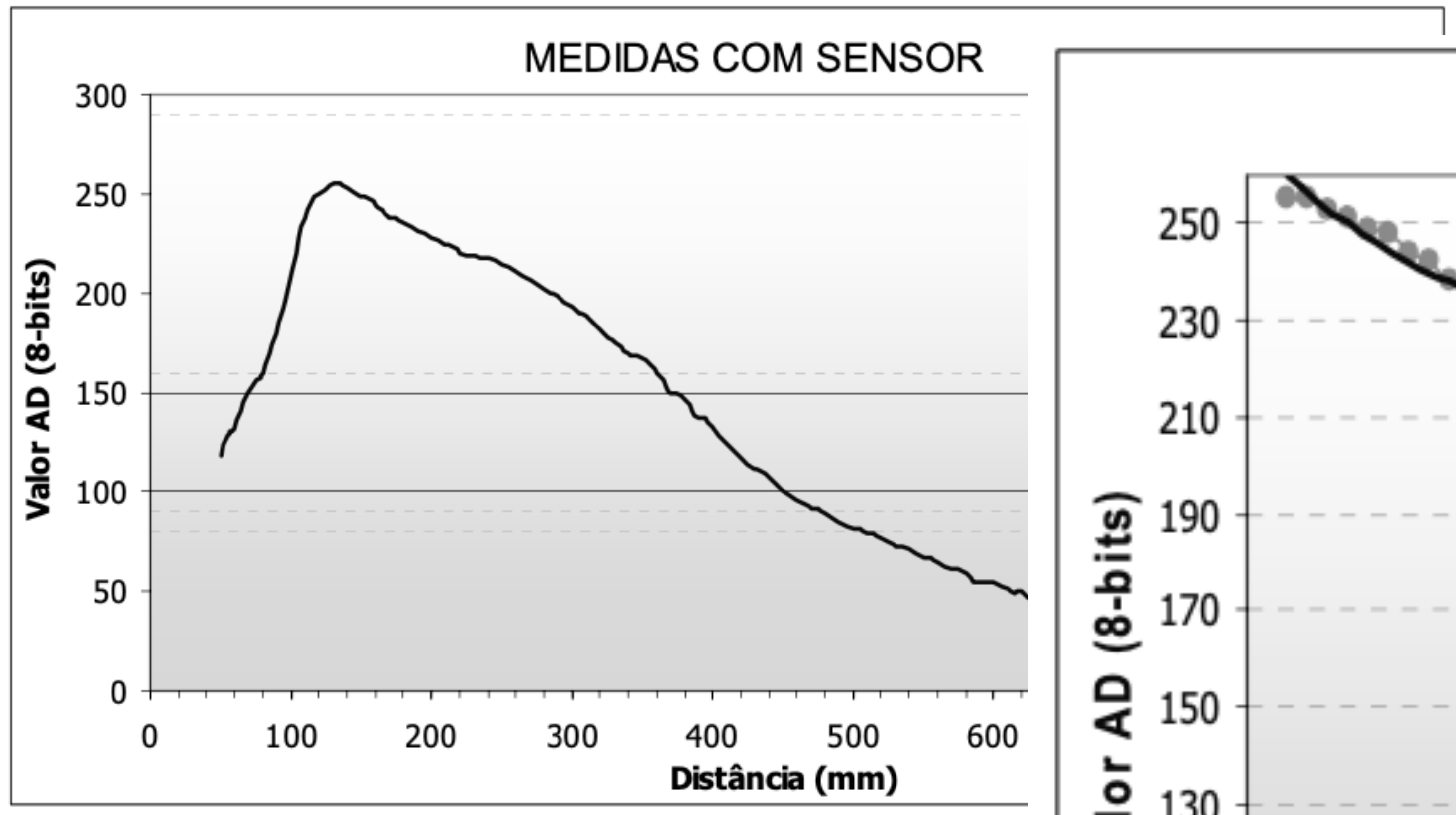
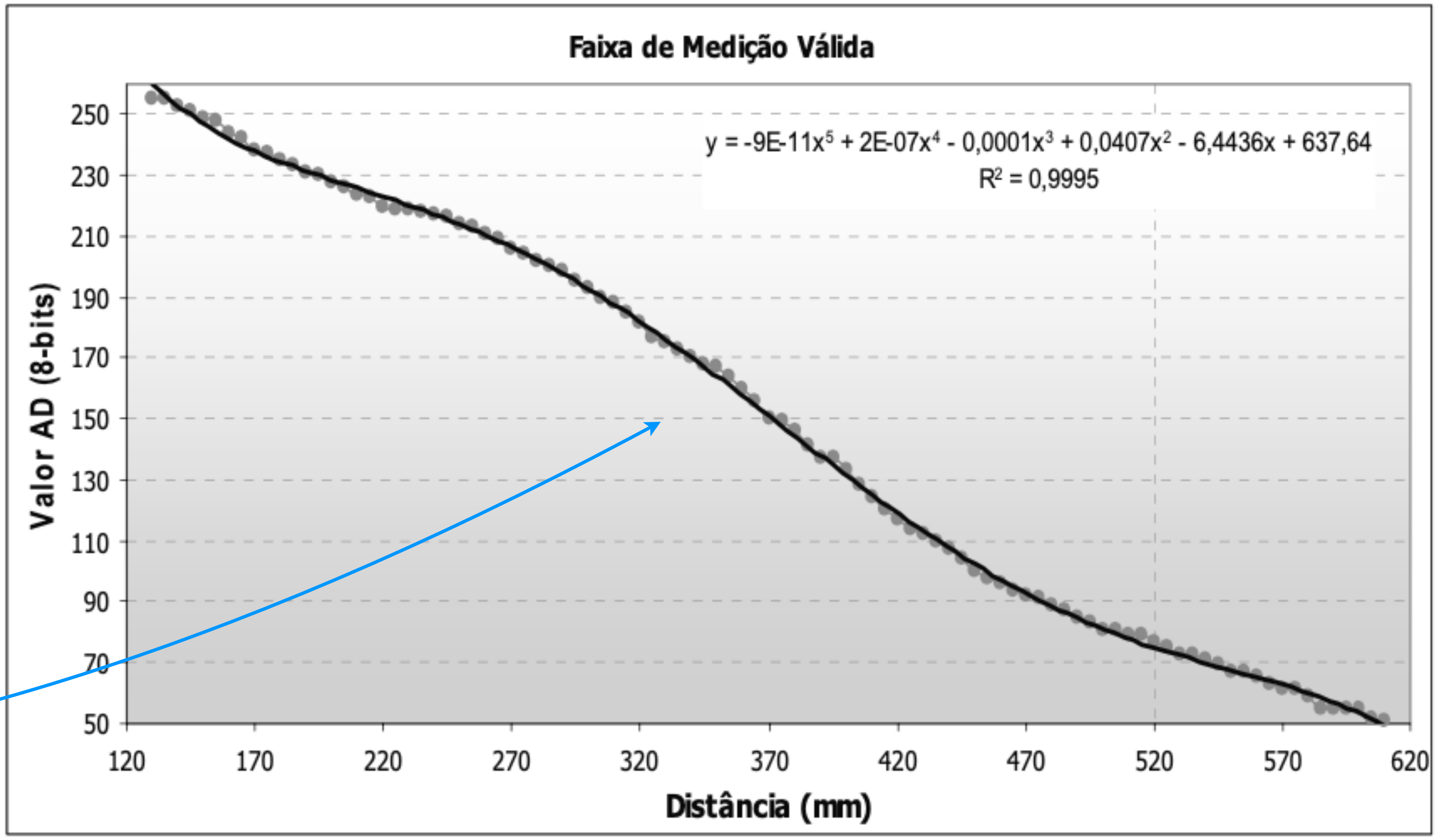


Figura 45 - Resposta do sensor IR obtida experime



Polinômio de 5a-ordem

Figura 47 - Interpolação da resposta do sensor de IR

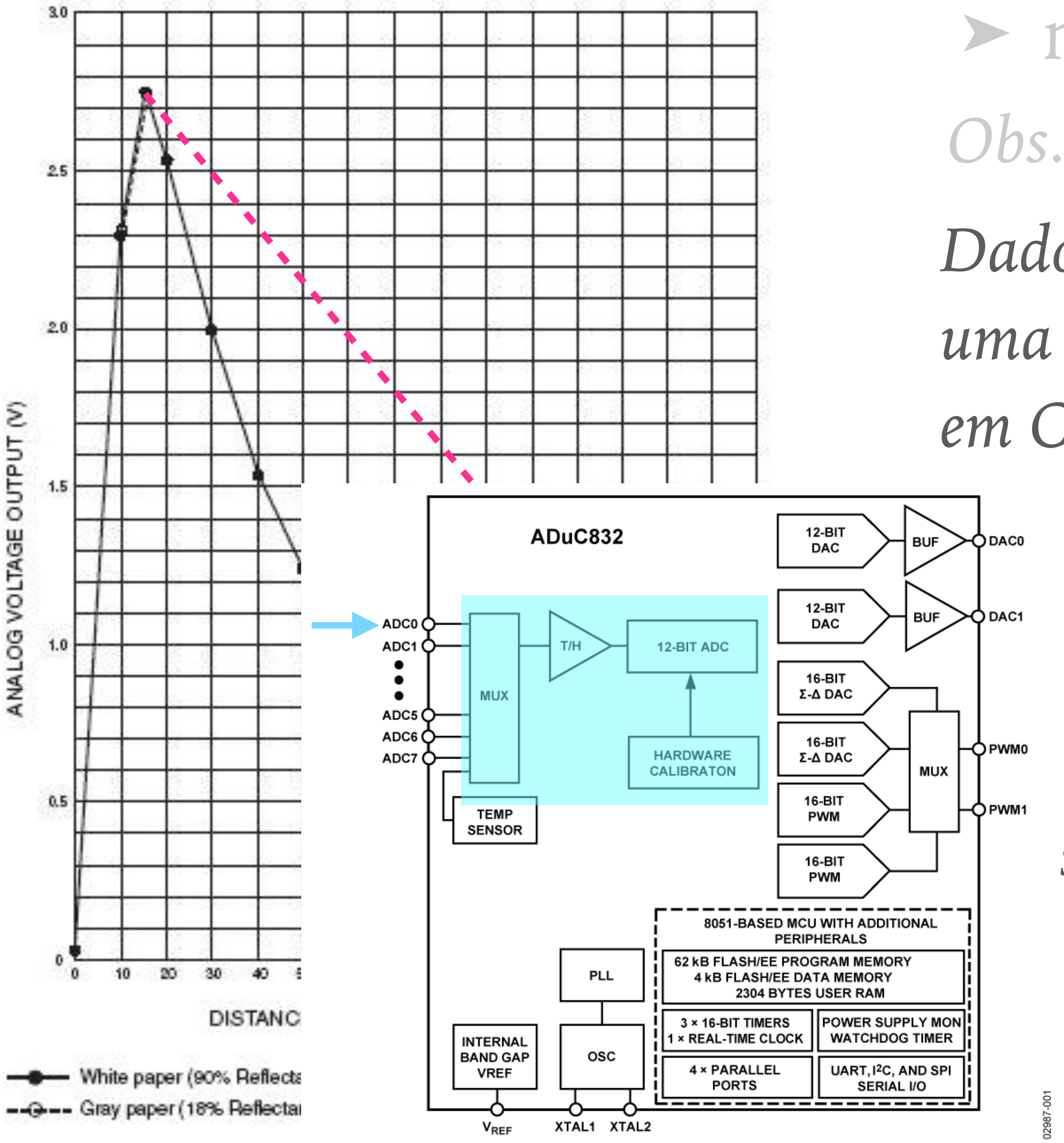
Ref.: Vanz, Robinson Caldart, Controlador digital para processo bola e tubo, TCC (Eng. Elétrica/UPF), 114p, 2006.

ENTENDENDO RESPOSTA DE UM SENSOR

- O sensor de distância GP2Y0A02YK baseado em IR do fabricante Sharp:
  - mede de 20 à 150 cm; máximo de $f_s = 20{,}87$ Hz.

Obs.: Uso do processo "Bola no Tubo":

Dados reais do sensor foram capturados, a eq. da curva foi levantada e uma "lookup table" (tabela de transformação) foi exportada para código em C à partir dos dados levantados no Excel:



Saída A/D (12-bits) → *"SL" (Shift-right 4-bits)* → *"index" para ponteiro (8-bits $\Rightarrow 2^8 = 256$)*

"Lookup table" ($\leq$ 1,6 Kbytes/2KB do μC ADuC 832)

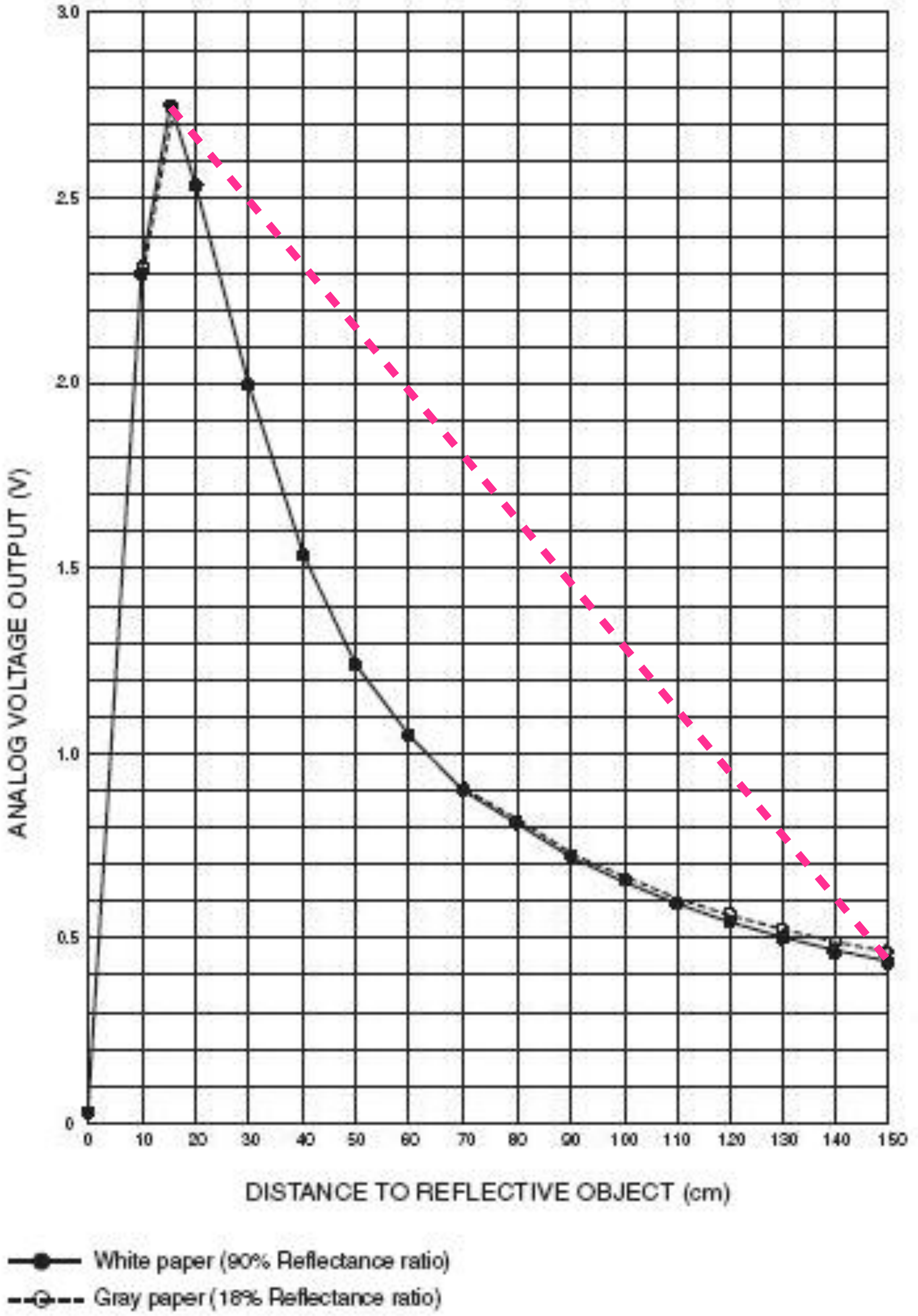
Valor A/D	Altura [mm]
1	610
112	430
253	140

Distância (corrigida, [mm])

Ref.: Vanz, Robinson Caldart, Controlador digital para processo bola e tubo, TCC (Eng. Elétrica/UPF), 114p, 2006.

ENTENDENDO RESPOSTA DE UM SENSOR

- O sensor de distância GP2Y0A02YK baseado em IR do fabricante Sharp:
  - mede de 20 à 150 cm; máximo de $f_s = 20{,}87$ Hz.



Dados reais levantados ⟶ Lookup table em C:

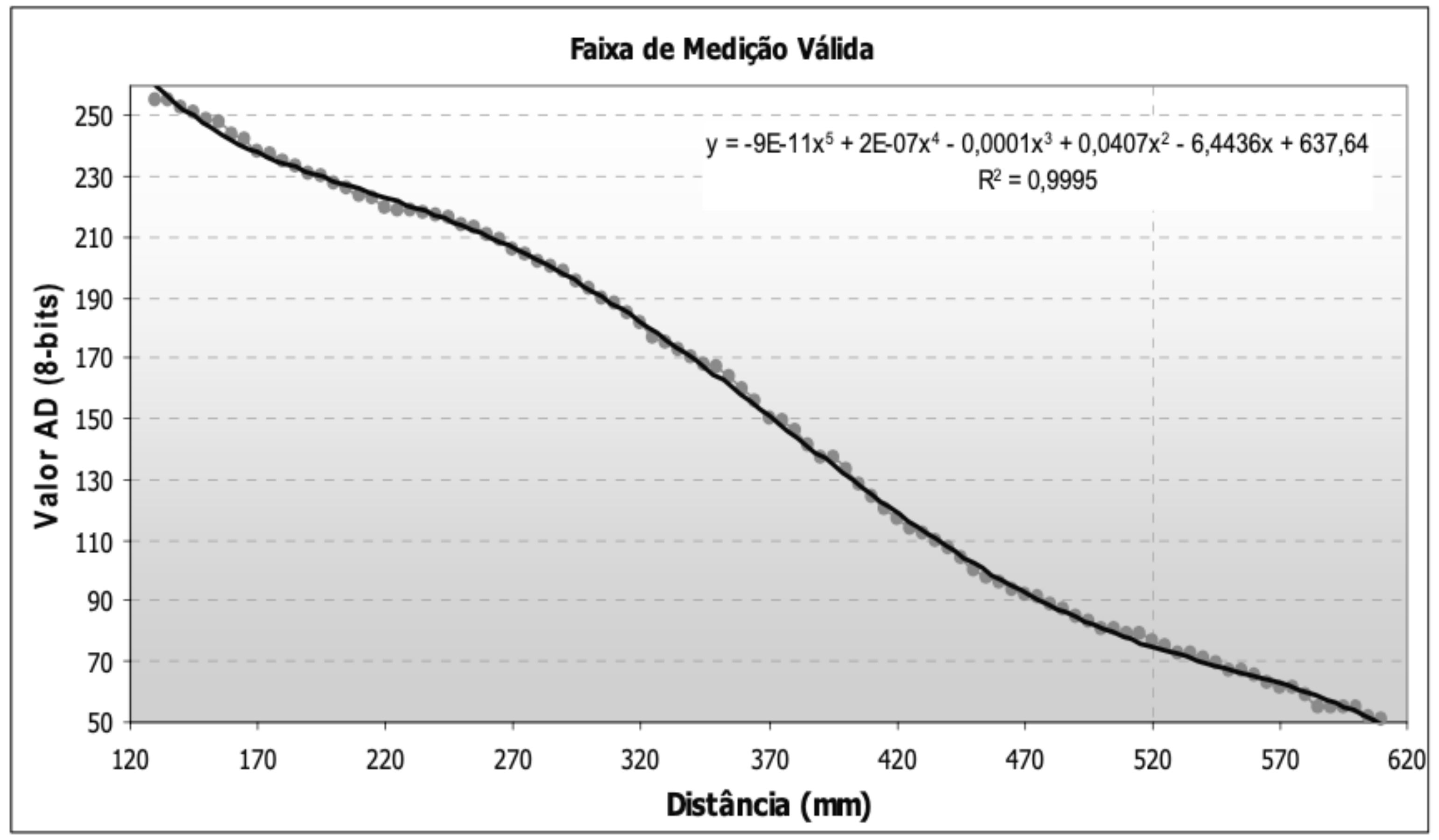


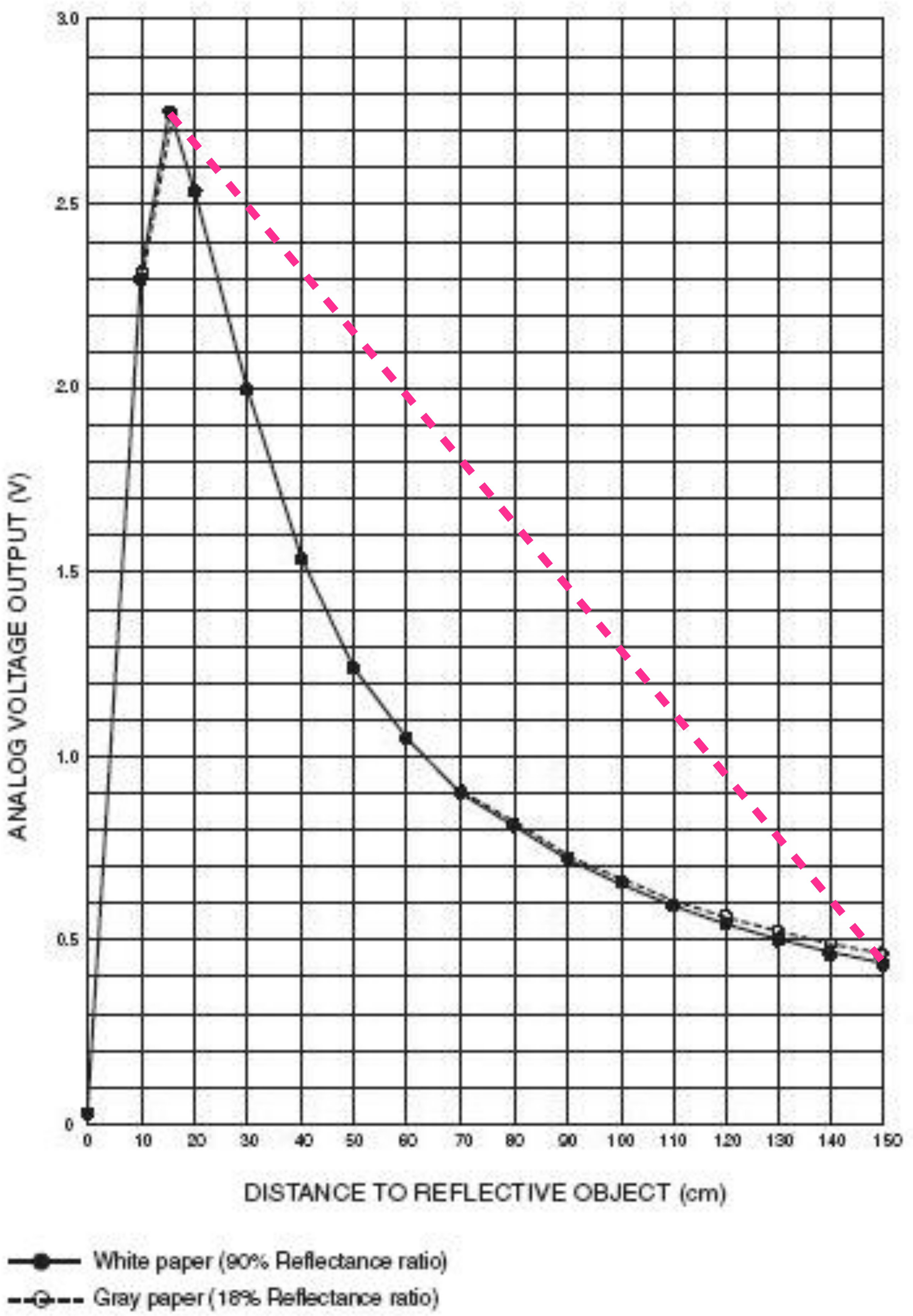
Figura 47 - Interpolação da resposta do sensor de IR

```
/*************************************************************************
****ROTINA GRAVA TABELA DE RESPOSTA DO SENSOR*****
*************************************************************************/
void grava_dados(void)
{
/* Declarando e inicializando variavel com dados
   ajustados para o sensor de distancia da SHARP
   e convertidos para o A/D, 8 bits
*/
                                /* 0    1    2    3    4    5    6    7    8    9 */
xdata unsigned int tabela[256]= {610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610,
                                /*10   11   12   13   14   15   16   17   18   19 */
                                610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610,
                                /*20   21   22   23   24   25   26   27   28   29 */
                                610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610,
                                /*30   31   32   33   34   35   36   37   38   39 */
                                610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610,
                                /*40   41   42   43   44   45   46   47   48   49 */
                                610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610,
                                /*50   51   52   53   54   55   56   57   58   59 */
                                610, 610, 605, 601, 597, 593, 590, 587, 583, 580,
                                /*60   61   62   63   64   65   66   67   68   69 */
                                577, 573, 568, 565, 563, 560, 557, 553, 549, 545,

                                 /*250  251  252  253  254  255  256 */
                                   148, 145, 143, 140, 137, 133 };

    xdata unsigned int resp_altura[256];    //vetor p/ gravar a resposta do sistema
    xdata unsigned int resp_saida[256];     //vetor p/ gravar a ação de controle
    altura=&resp_altura;
    duty_saida=&resp_saida;
    sensor=&tabela;                         //o ponteiro recebe endereço da tabela
}
```

Ref.: Vanz, Robinson Caldart, Controlador digital para processo bola e tubo, TCC (Eng. Elétrica/UPF), 114p, 2006.

ENTENDENDO RESPOSTA

➤ O sensor de distância Gl … o … áx … p t



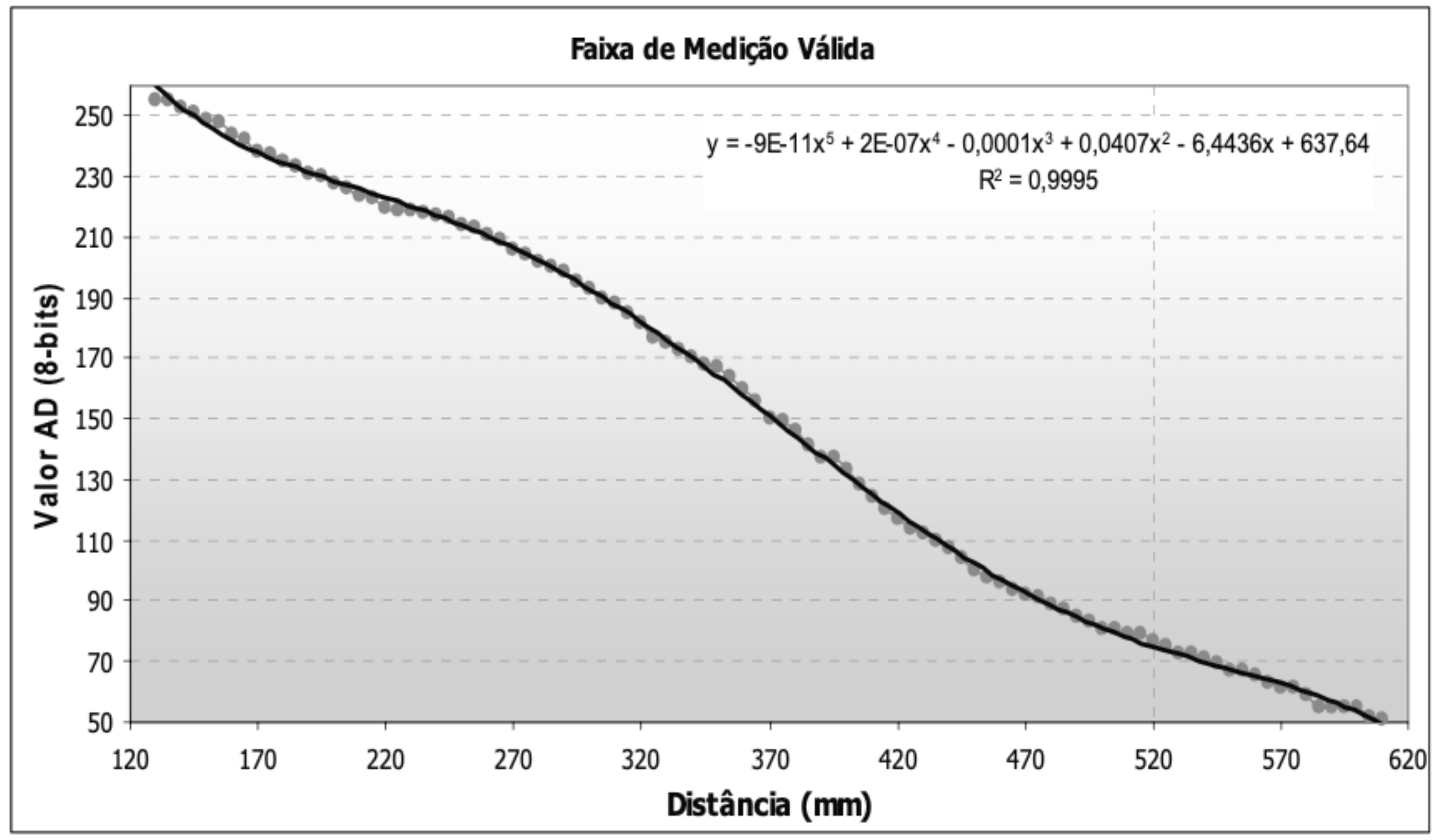


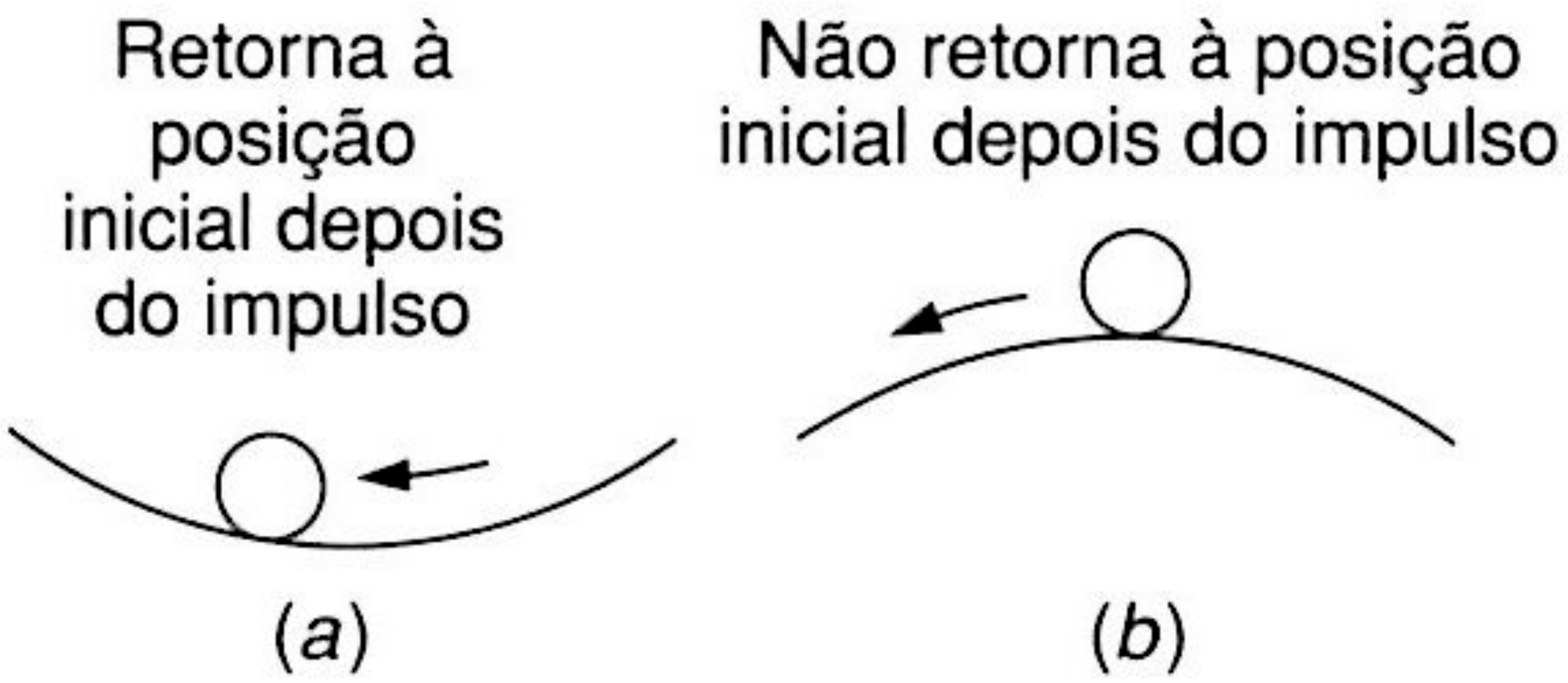
Figura 47 - Interpolação da resposta do sensor de IR

```
/*************************************************************************
****ROTINA GRAVA TABELA DE RESPOSTA DO SENSOR*****
*************************************************************************/
void grava_dados(void)
{
/* Declarando e inicializando variavel com dados
   ajustados para o sensor de distancia da SHARP
   e convertidos para o A/D, 8 bits
*/
                                  /* 0    1    2    3    4    5    6    7    8    9 */
xdata unsigned int tabela[256]=   {610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610,
                                  /*10   11   12   13   14   15   16   17   18   19 */
                                  610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610,
                                  /*20   21   22   23   24   25   26   27   28   29 */
                                  610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610,
                                  /*30   31   32   33   34   35   36   37   38   39 */
                                  610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610,
                                  /*40   41   42   43   44   45   46   47   48   49 */
                                  610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610, 610,
                                  /*50   51   52   53   54   55   56   57   58   59 */
                                  610, 610, 605, 601, 597, 593, 590, 587, 583, 580,
                                  /*60   61   62   63   64   65   66   67   68   69 */
                                  577, 573, 568, 565, 563, 560, 557, 553, 549, 545,

                                   /*250  251  252  253  254  255  256 */
                                   148, 145, 143, 140, 137, 133 };

esp_altura[256];      //vetor p/ gravar a resposta do sistema
esp_saida[256];       //vetor p/ gravar a ação de controle
;
saida;
                      //o ponteiro recebe endereço da tabela
```

```
/*************************************************************************
*******ROTINA DE CONTROLE****INTERRUPÇÃO********
*************************************************************************/
void cont1(void) interrupt 3
{
        SCONV=1;                          //Ativa uma conversão simples pelo bit SCONV
        while(!ADCI);                     //Espera pelo flag de fim de conversão
        ADCI=0;                           //reset no flag de fim de conversão
        leitura = ADCDATAH*256 + ADCDATAL;        //armazena o valor lido pelo AD
        leitura = leitura>>4;                     //converte a leitura de 12 para 8 bits
        h_real = 620-(*(sensor+leitura));     //converte a leitura do AD para milimetros
        erro0 = h_ref - h_real;               //calcula erro

        switch(controle){
                case '1':                     //PID no formato de velocidade
                u0 = u1 + Kc*((erro0-erro1) +  (Ts/Ti)*erro0 + (Td/Ts)*(erro0-2*erro1+erro2));
                  if (u0>99.99) u0=99.99;
                        if (u0<0) u0=0;
                        u1=u0;                //passa os valores para amostras em atraso
                        erro2=erro1;
                        erro1=erro0;
                        break;
```

Ref.: Vanz, Robinson Caldart, Controlador digital para processo bola e tubo, TCC (Eng. Elétrica/UPF), 114p, 2006.

SISTEMA ESTÁVEL X INSTÁVEL



(a) Estável

(b) Instável

FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA, SISTEMAS MALHA-ABERTA

➤ São comuns elementos em cascata neste tipo de sistema:

Elemento 1:

$$G_1 = \frac{u_1}{u_i}$$

Elemento 2:

$$G_2 = \frac{u_2}{u_1}$$

Elemento 3:

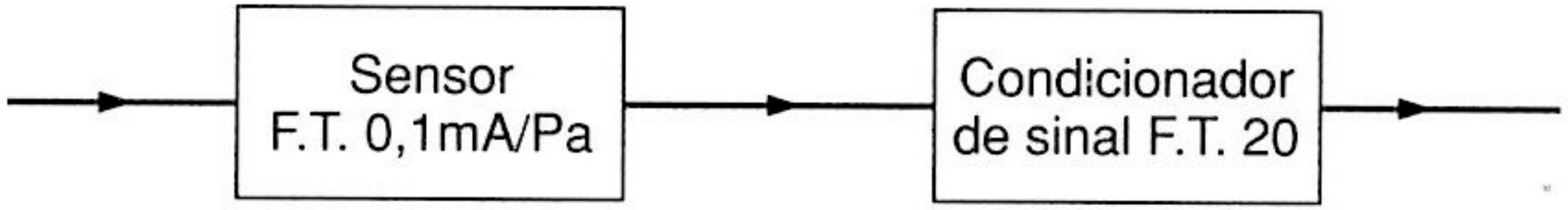
$$G_3 = \frac{u_o}{u_2}$$

Função transferência (global) do sistema completo: $G = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$

$$G = \frac{u_o}{u_i} = \frac{u_1}{u_i} \cdot \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_o}{u_2}$$

EXEMPLO SISTEMA MALHA-ABERTA

- Um sistema de medição usado com um sistema de controle consiste em 2 elementos: um sensor e um transmissor de sinais. Se o sensor tem uma função transferência de 0,1 mA/Pa e o transmissor de sinais uma função de transferência de 20, qual será a função de transferência final do sistema de medição?

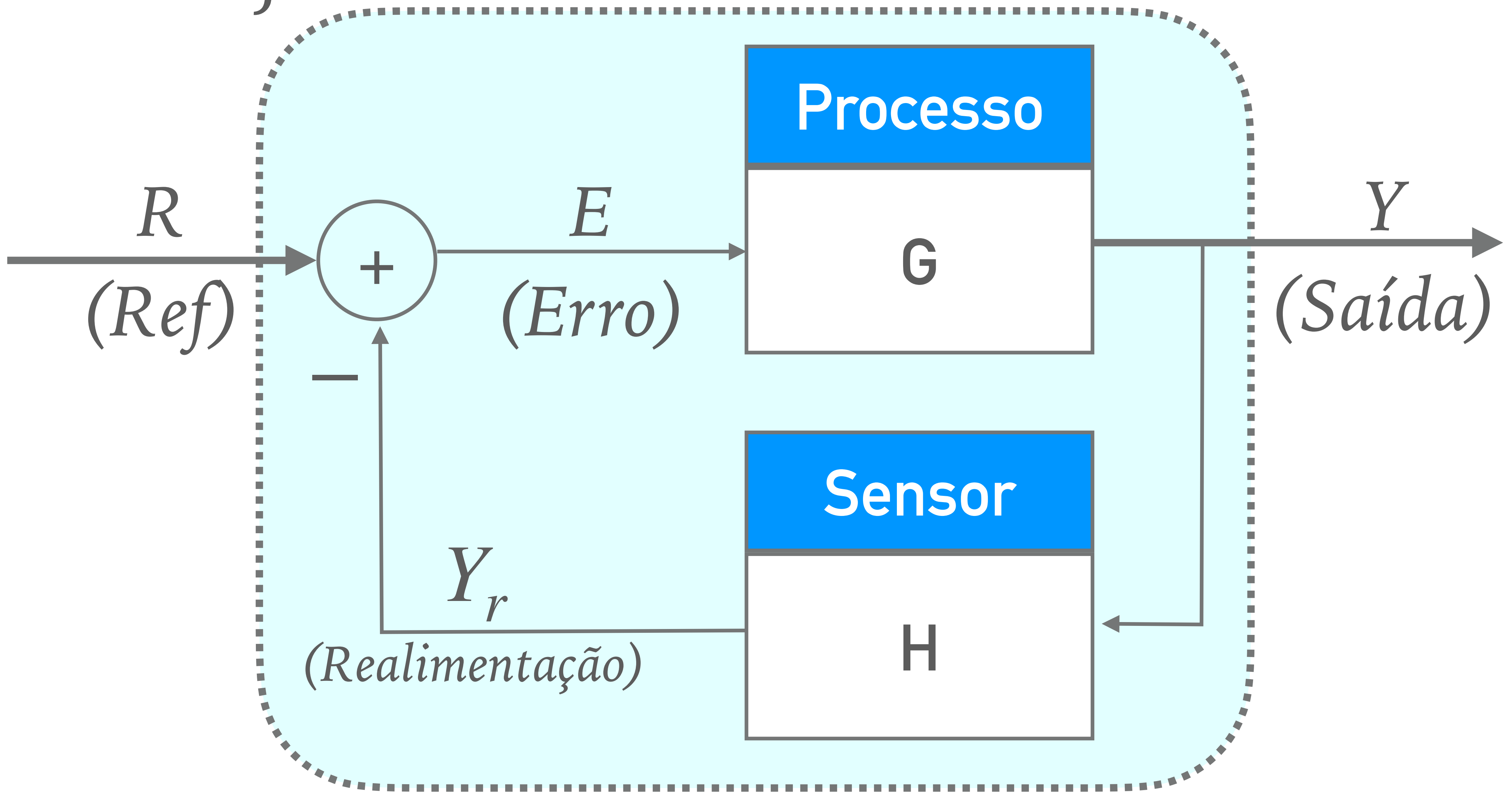


- *Solução:*

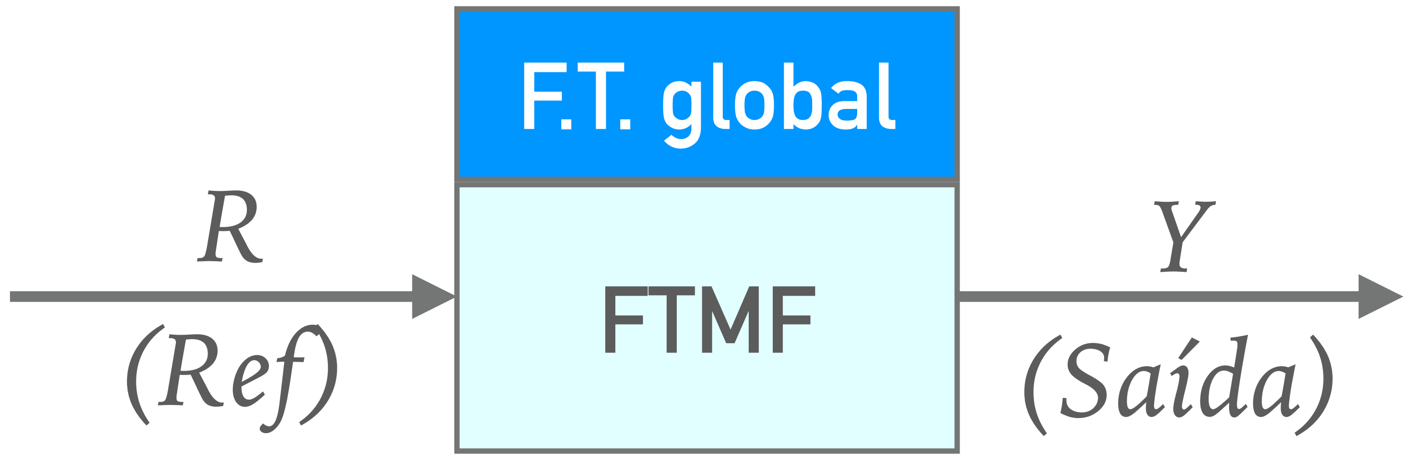
$$\textit{Função transferência final, } G = 0{,}1 \times 20 = 2\ mA/Pa.$$

FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA DE MALHA-FECHADA

- Seja:



Deseja-se obter o sistema equivalente em MF, ou seja:



Dedução:

(1) $Y = E \cdot G$

(2) $E = R - Y_r$

(3) $Y_r = Y \cdot H$

Substituindo-se (3) em (2):

(4) $E = R - Y \cdot H$

Substituindo-se (4) em (1):

$Y = [R - Y \cdot H]\, G$

$Y = R \cdot G - Y \cdot H \cdot G$

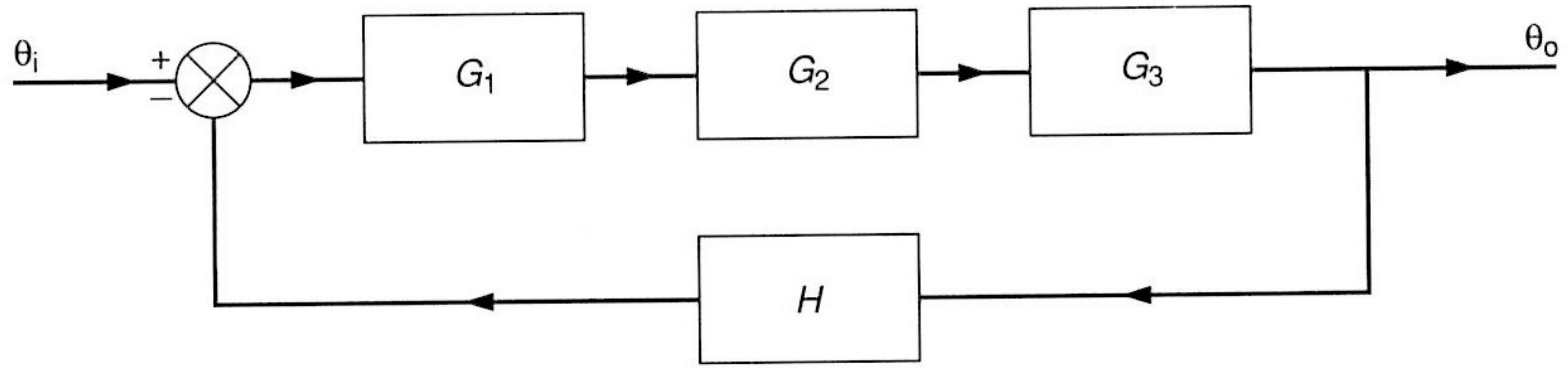
Isolando Y:

$Y\left[1 + H \cdot G\right] = R \cdot G$

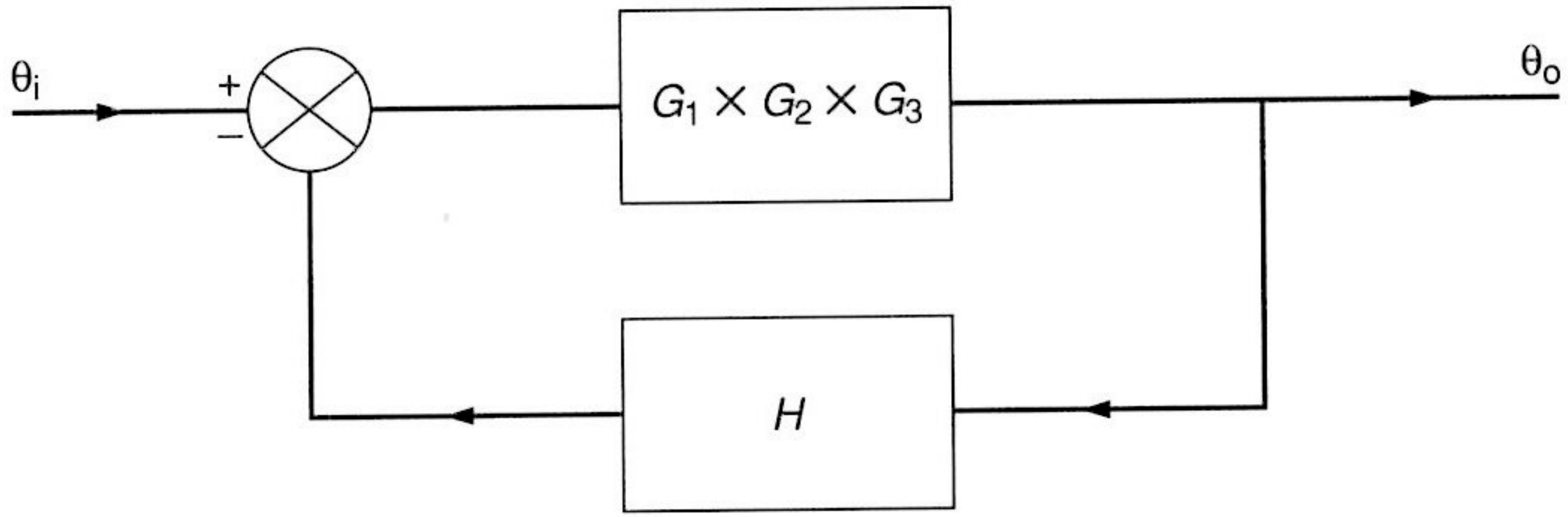
Como queremos $\dfrac{Y}{R}$:

$$FTMF = \frac{Y}{R} = \frac{G}{1 + H \cdot G}$$

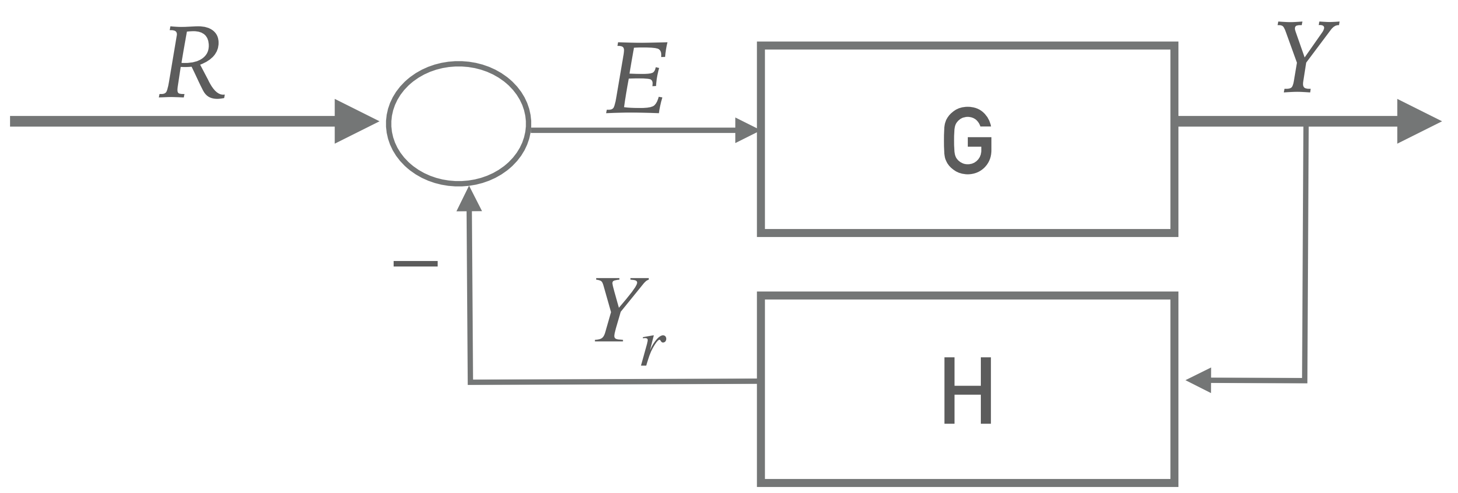
SISTEMAS MALHA-FECHADA COM VÁRIOS ELEMENTOS

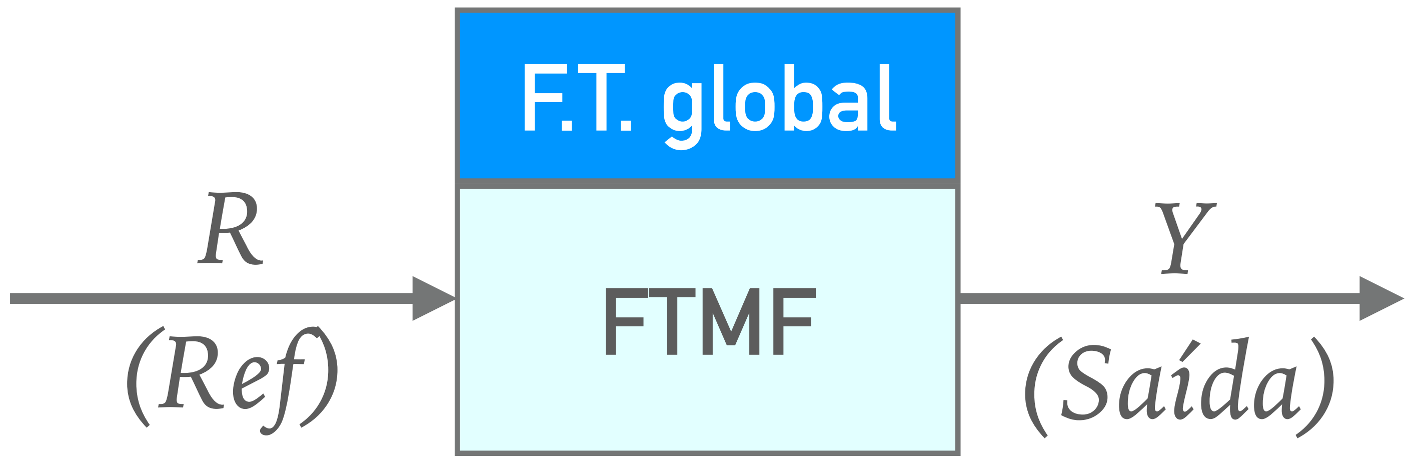


Função transferência dos elementos em série (em cascata) $= G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$



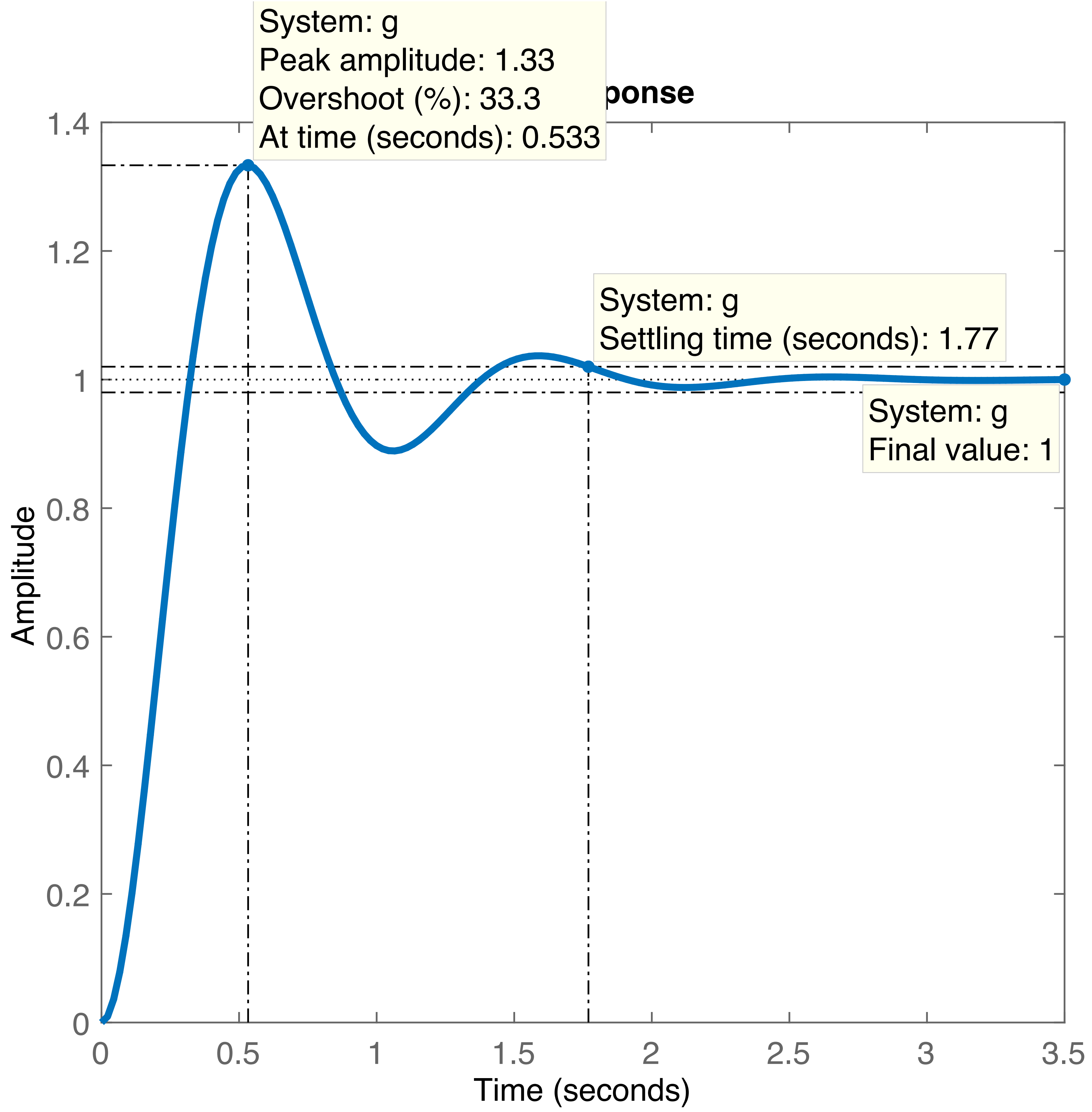
Função transferência final, $G = \dfrac{\theta_o}{\theta_i} = \dfrac{G_1\ G_2\ G_3}{1 + (G_1\ G_2\ G_3)\ H}$





$$FTMF = \frac{Y}{R} = \frac{G}{1 + H \cdot G}$$

E A "DINÂMICA" DE UM SISTEMA?...



Obs.: Falta considerar a "***dinâmica do sistema***":

Até este momento nenhum modelo apresentado considera a "dinâmica" do sistema, ou seja, a forma como o mesmo responde ao longo do tempo. Seriam análises "DC" e não "AC".

Importante considerar a dinâmica de um sistema porque um requisito importante de controle é "*tempo de assentamento*": período de tempo máximo estipulado para que a resposta de um sistema não varie mais que 2% (eventualmente 5% quando indicado) (o que se chama comumente de "*regime permanente*").

Notar que em nenhuma equação anterior apareceu a **variável *t*** (tempo).

SISTEMAS MECÂNICOS

- Elementos básicos: Molas, Amortecedores, Massa e transmissões.
  As **molas** representam a rigidez do sistema;
  Os **amortecedores**, as forças de oposição ao movimento, os efeitos de amortecimento e fricção;
  As **massas**, a inércia ou resistência à aceleração.
- Sua análise envolve 2 tipos distintos de movimentos: **translacional** × **rotacional**.
- O equacionamento do sistema pode ser realizado usando **leis de Newton**.
- Assim: sistemas mecânicos estão sujeitos à:
  - **forças (quando translacionais)** e
  - **torques (quando rotacionais)**.
- Outro enfoque: envolver a **análise energética** do movimento mecânico do sistema.
  Não usaríamos as leis de Newton, mas sim equações de **Lagrange**.
  Porém os mesmos resultados seriam obtidos, mas neste caso, considerando-se um equacionamento com base em energias e potências envolvidas no movimento de um sistema.

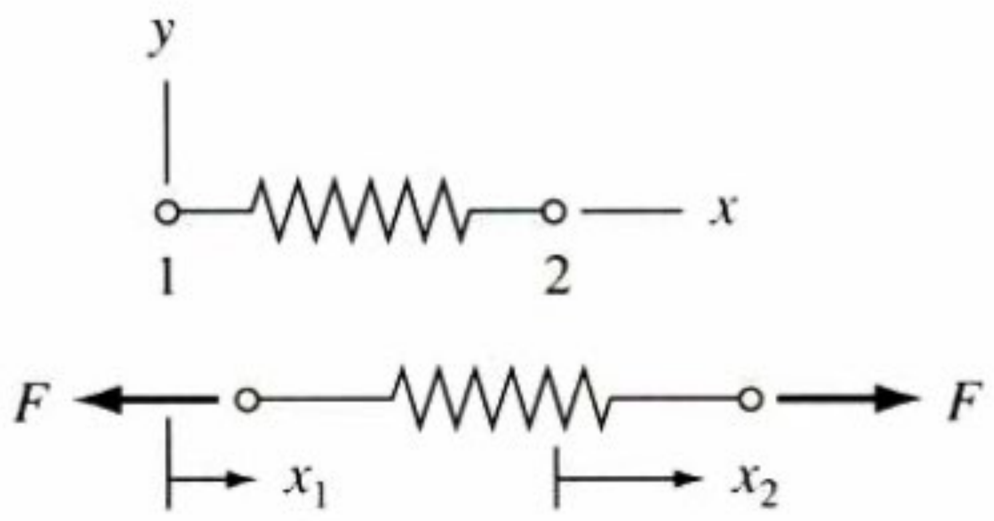
SISTEMAS MECÂNICOS

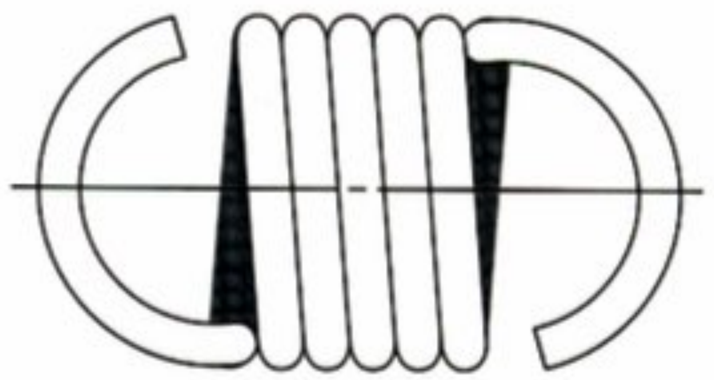
- Elementos básicos: Molas, Amortecedores, Massa e transmissões.
  As **molas** representam a rigidez do sistema;
  Os **amortecedores**, as forças de oposição ao movimento, os efeitos de amortecimento e fricção;
  As **massas**, a inércia ou resistência à aceleração
- Sua análise envolve 2 tipos distintos de movi
- O equacionamento do sistema pode ser realiz
- Assim: sistemas mecânicos estão sujeitos à:
  - **forças** (**quando translacionais**) e
  - **torques (quando rotacionais)**.
- Outro enfoque: envolver a **análise energétic**
  Não usaríamos as leis de Newton, mas sim eq
  Porém os mesmos resultados seriam obtidos, om base em
  energias e potências envolvidas no movimento de um sistema.

Quando abordamos movimentos translacionais, estamos associando o movimento de uma massa geralmente conectada a outras massas por meio de molas e amortecedores.
O movimento linear pode ser realizado no espaço (em 3 eixos), porém aqui, estaremos restringindo os movimentos à um plano.

SISTEMA MECÂNICO TRANSLACIONAL: MOLA

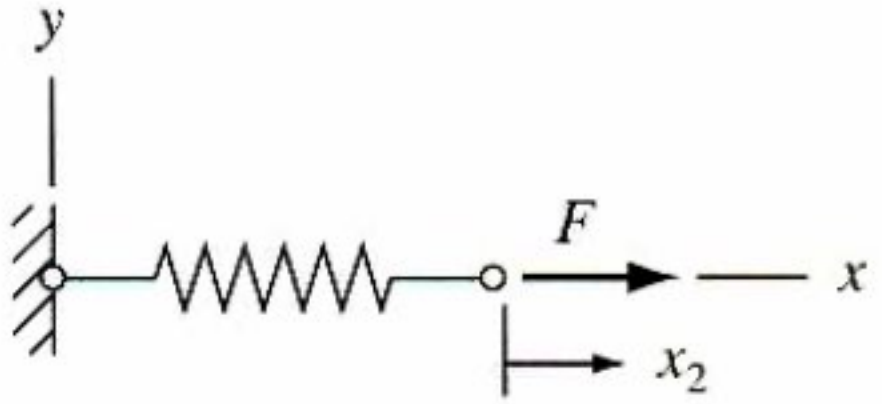
- **Bloco mola**:
  Uma mola é um componente que **resiste a aplicação de força** proporcionalmente com sua elongação:





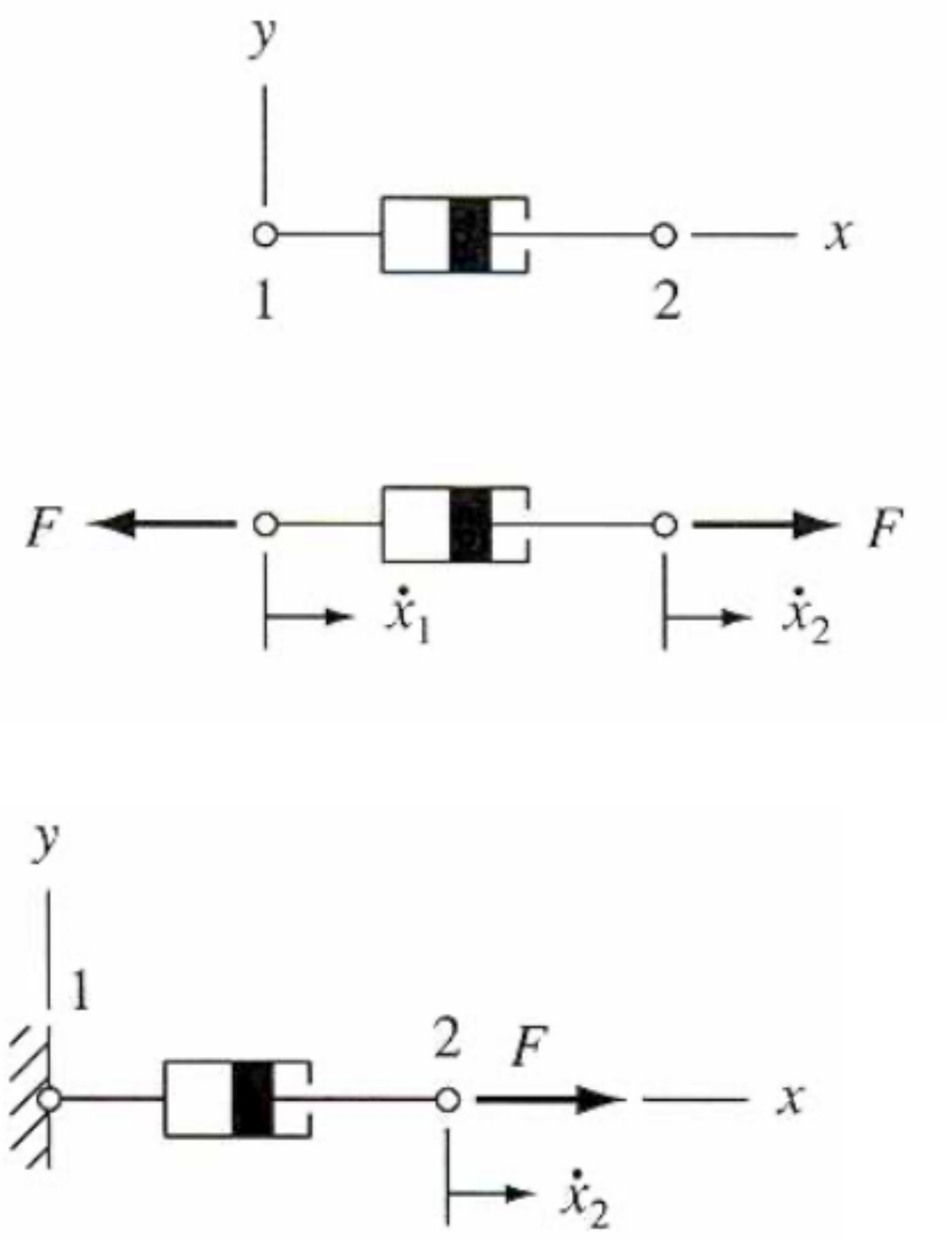
- Obedece a lei de Hooke:
  $F = k(x_1 - x_2)$
  onde $k =$ constante elástica da mola $[N \cdot m]$

- Caso estiver engastada:
  $F = k \cdot x_2$

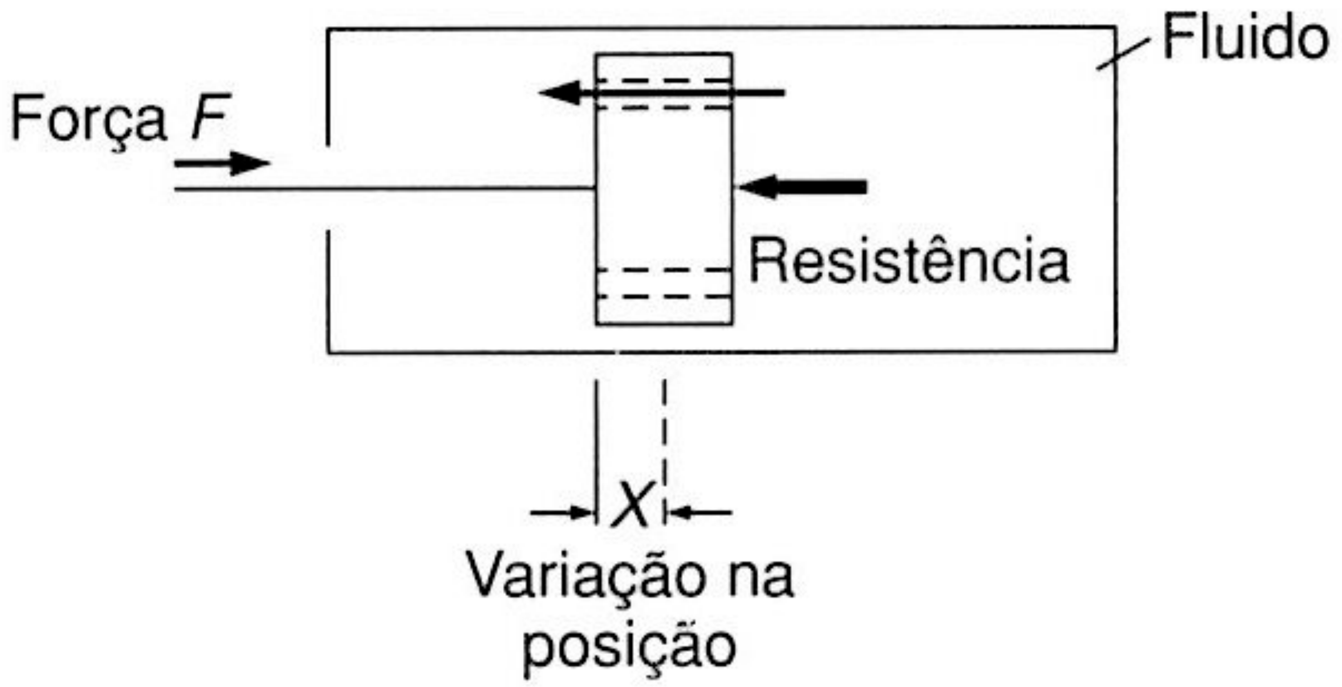


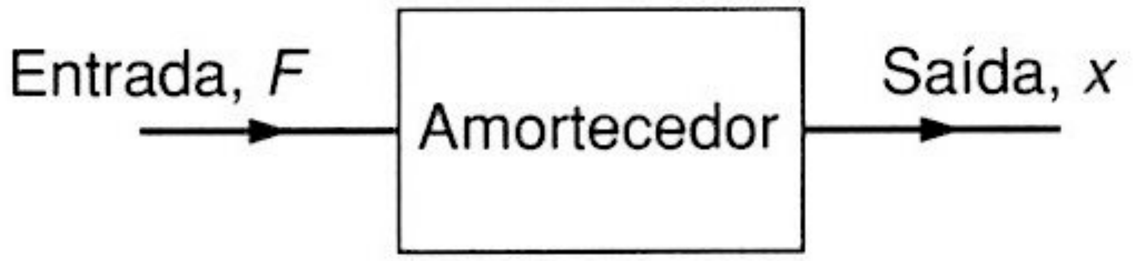
- Mola: também serve como acumulador de energia.

SISTEMA MECÂNICO TRANSLACIONAL: AMORTECEDOR

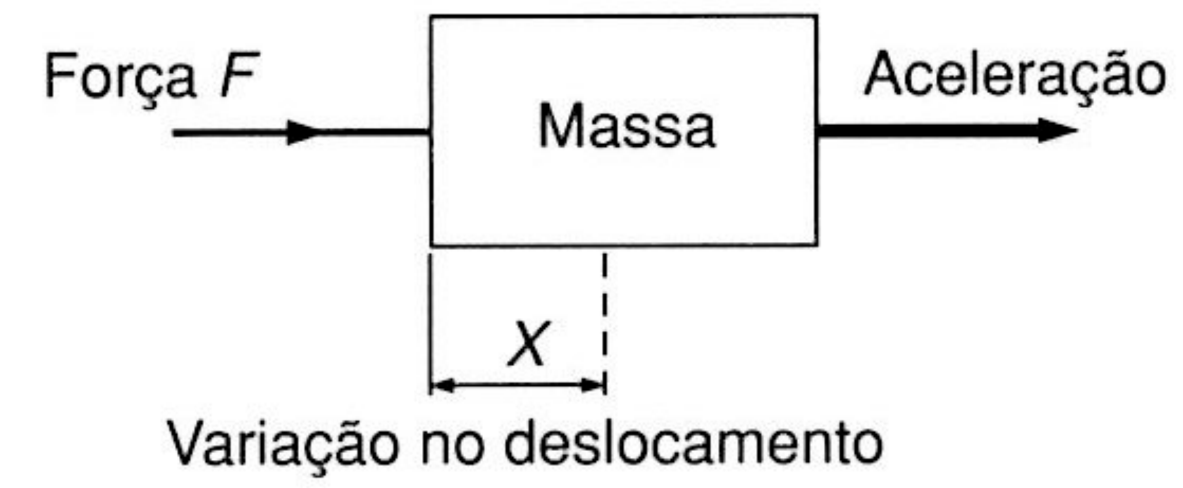


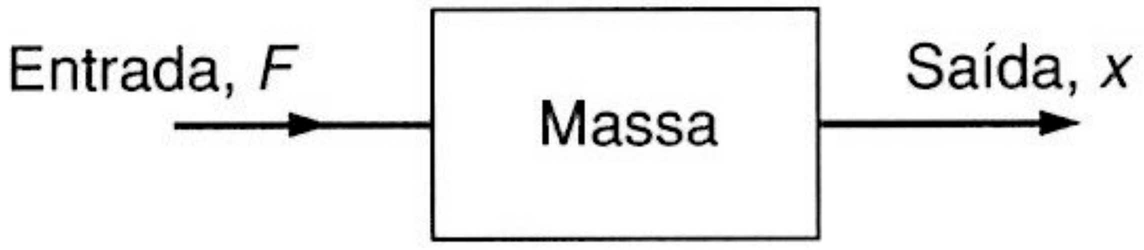
- **Bloco amortecedor**:
  Representa as forças experimentadas quando nos esforçamos para empurrar um objeto através de um fluido ou para mover um objeto contra forças de atrito.
  O "amortecedor" usado para representar essas forças que retardam o movimento de objetos pode ser considerado um "pistão" movendo-se em um cilindro fechado.
  É um componente mecânico que **resiste a velocidade imposta**.
- $F = b \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$
  onde $b =$ coeficiente de atrito viscoso $[N \cdot s/m]$
- Caso esteja engastado:
  $F = b \cdot \dot{x}_2$
- $F = b \cdot v = b \cdot \dfrac{dx}{dt} = b \cdot \dot{x}$
  onde: $v =$ velocidade do deslocamento.
- Dissipa energia.





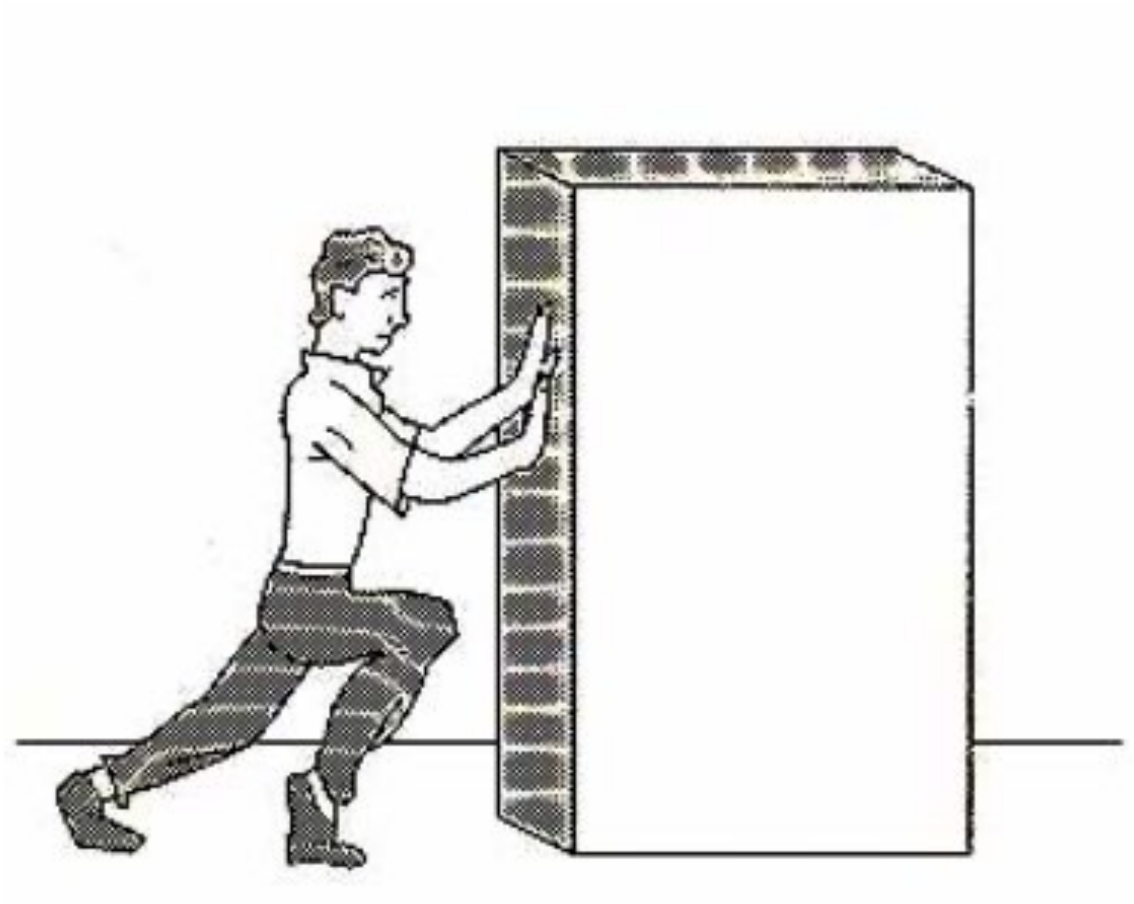
SISTEMA MECÂNICO TRANSLACIONAL: MASSA

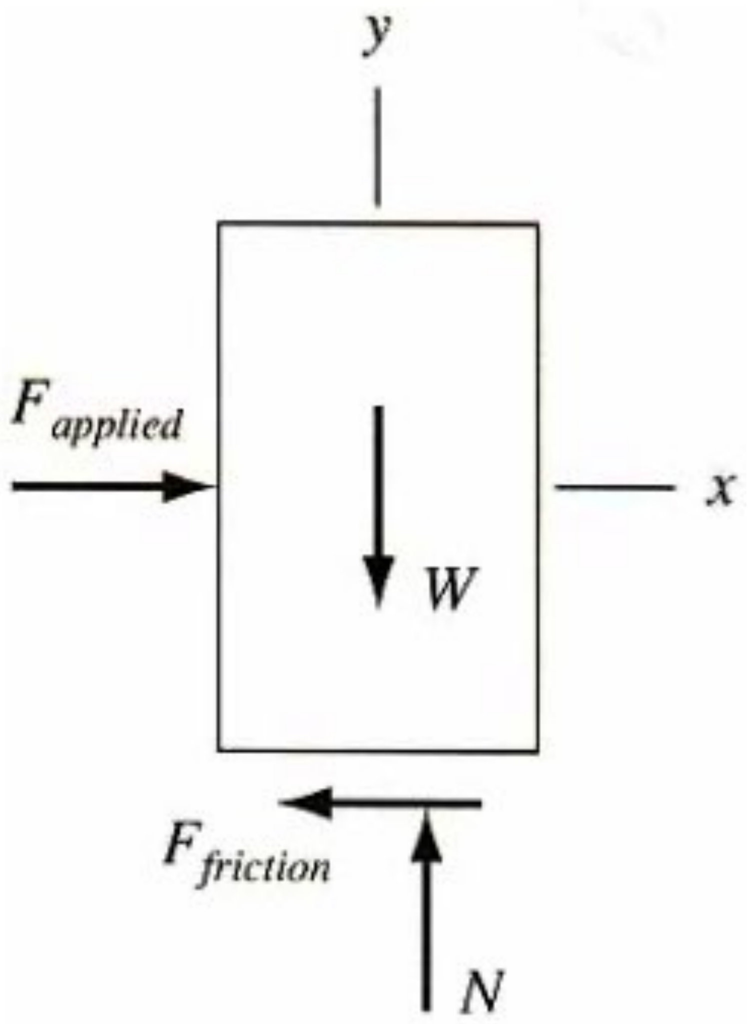




- **Bloco massa**:
  É uma propriedade do material que causa resistência à aceleração.
  Reconhecemos uma massa quando tentamos movimentá-la e necessitamos aplicar uma força para colocá-la em movimento (acelerá-la).
  Parte da força aplicada é devido ao atrito entre a superfície e a massa.
  Outra parte é devido a esta propriedade de **resistir à aceleração**.
  Quanto maior a massa, maior a força requerida para desenvolver uma aceleração específica.

- Segunda lei de Newton:
  $$\sum \text{Forças} = m\ddot{x}$$
  ou:
  $$F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = m \cdot \ddot{x}$$





- Na figura inferior ao lado, o sistema de forças poderia ser equacionado como:
  $$F_{aplicada} - F_{atrito} = m \cdot \ddot{x}$$
  Se desconsiderarmos o atrito, poderia-se dizer que a força aplicada numa massa corresponde à reação (aceleração) que uma massa desenvolverá:
  $$F_{aplicada} = m \cdot \ddot{x}$$

SISTEMA MECÂNICO TRANSLACIONAL: RESUMO

Elementos	Equação	Constante de proporcionalidade	
Massa	$f_m = m \cdot \ddot{x}$	Massa, m	2a-Lei de Newton
Amortecedor	$f_c = c \cdot \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)$	Coeficiente de amortecimento viscoso, c	
Mola	$f_k = k \cdot \left(x_2 - x_1\right)$	Rigidez, k	lei de Hooke

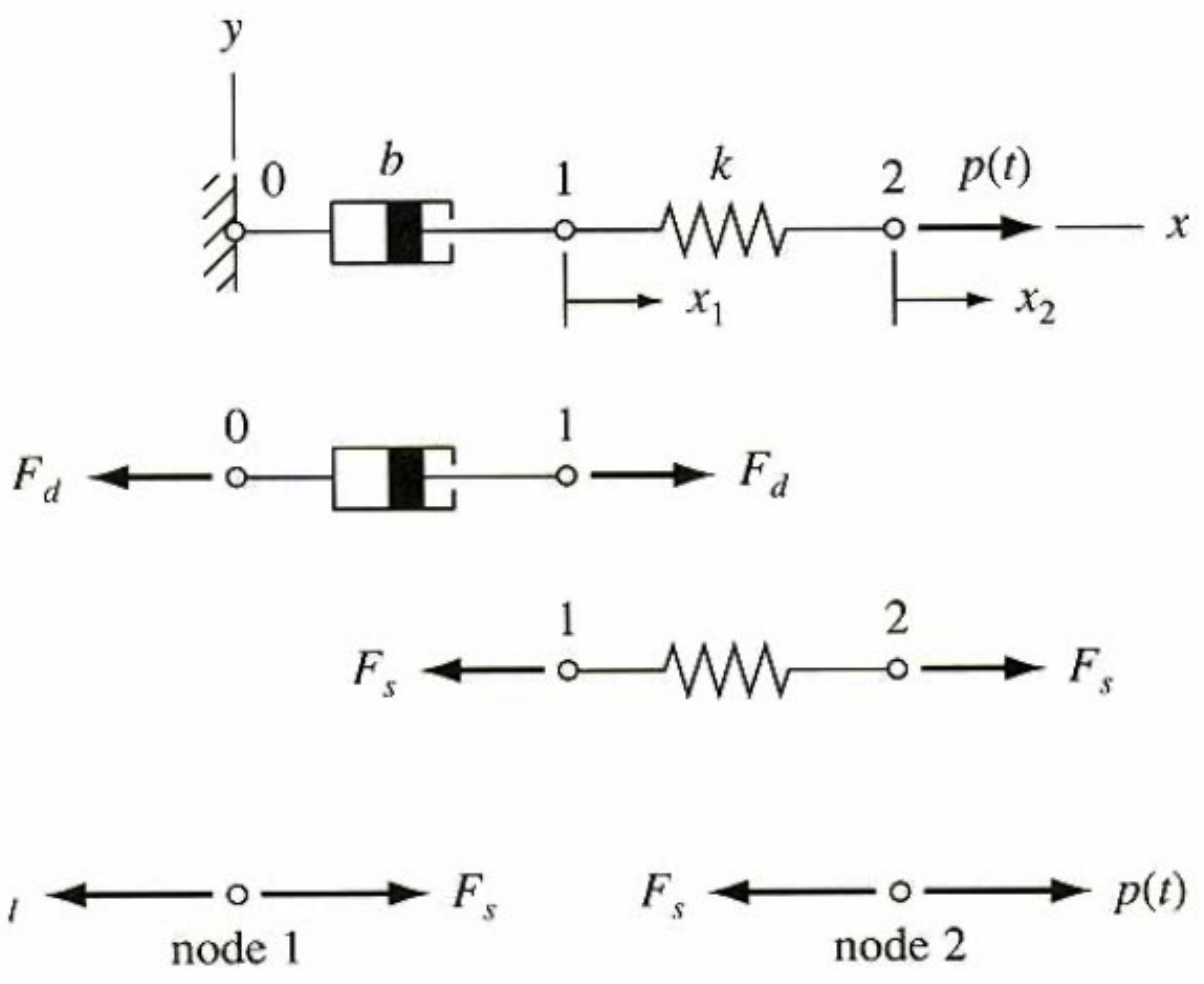
EXEMPLO_1:

➤ Seja o sistema mola-amortecedor mostrado na figura ao lado:

a) Encontre as equações diferenciais do sistema que relacionam os deslocamentos x_1 e x_2.

b) Encontre as funções transferências: $\dfrac{X_2(s)}{P(s)}$ e $\dfrac{X_1(s)}{P(s)}$.

c) Se a força aplicada $p(t)$ for constante, o que ocorre com a posição x_1 e x_2 ?



Solução:

a) Em cada ponto de translação, equacionar o equilíbrio de forças em cada nó:

Nó 2: se fracionarmos na direção do eixo x, a mola com uma força $p(t)$, a mesma regerá com uma força contrária ao movimento, F_s:

$F_s = k \cdot (x_2 - x_1) = p(t)$

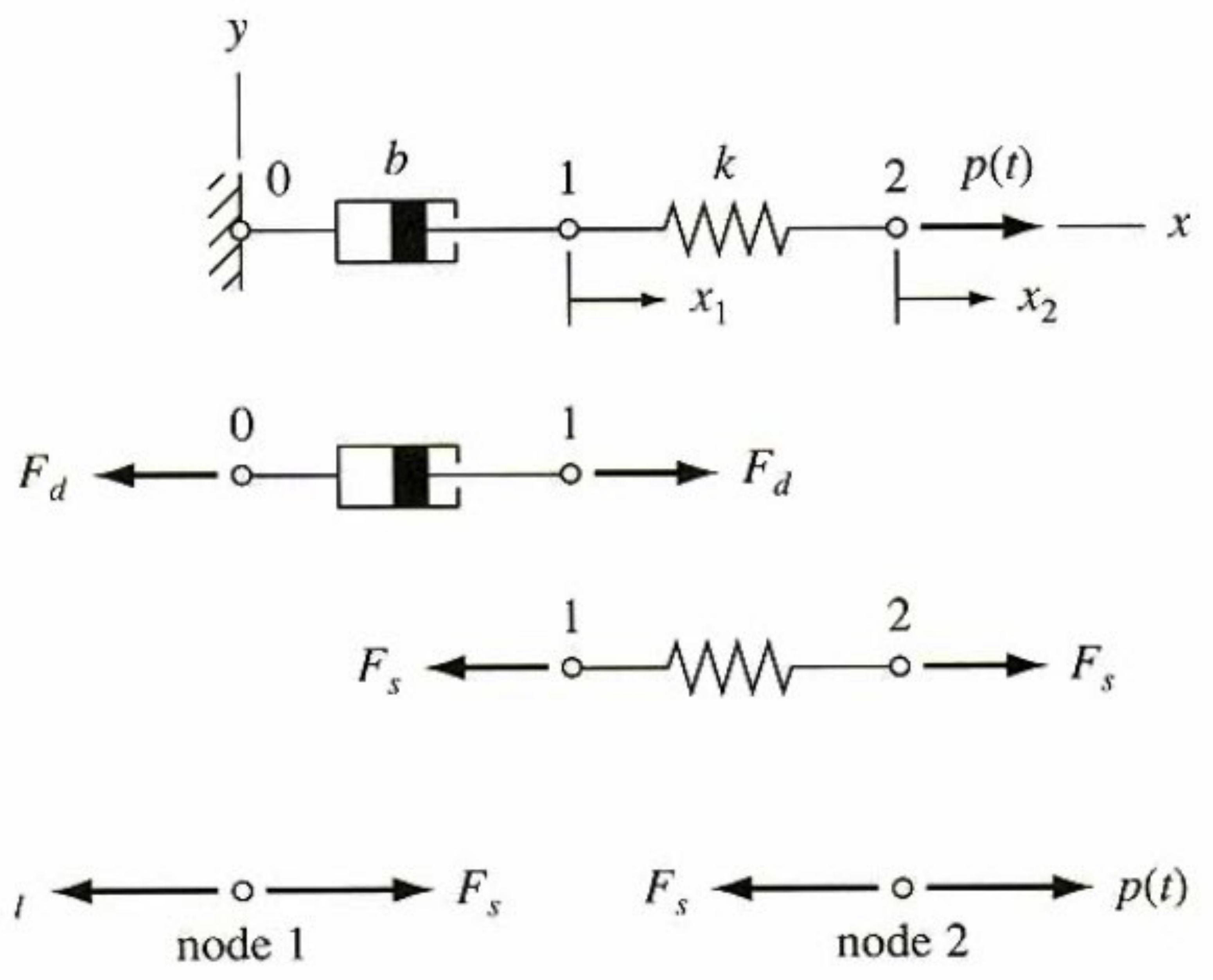
Nó 1: devido a tração da mola (F_s), o amortecedor reage com uma força contrária ao movimento da mola, F_d:

$b \cdot \dot{x}_1 = F_d = F_s$

Assim: $b \cdot \dot{x}_1 = k \cdot (x_2 - x_1) = p(t)$

EXEMPLO_1:

- Seja o sistema mola-amortecedor mostrado na figura ao lado:
    a) Encontre as equações diferenciais do sistema que relacionam os deslocamentos x_1 e x_2.
    b) Encontre as funções transferências: $\dfrac{X_2(s)}{P(s)}$ e $\dfrac{X_1(s)}{P(s)}$.
    c) Se a força aplicada $p(t)$ for constante, o que ocorre com a posição x_1 e x_2 ?



Solução:

a) **Assim**: $b \cdot \dot{x}_1 = k \cdot (x_2 - x_1) = p(t)$

b) Transformada de Laplace (condições iniciais nulas):

$$b \cdot s \cdot X_1(s) = k \cdot \big(X_2(s) - X_1(s)\big) = P(s)$$

$$\big(b \cdot s + k\big) \cdot X_1(s) = k \cdot X_2(s)$$

$$X_1(s) = \frac{k}{(b \cdot s + k)} \cdot X_2(s)$$

Logo: $\dfrac{X_1(s)}{P(s)} = \dfrac{1}{b \cdot s}$

b) Transformada de Laplace (condições iniciais nulas):

$$k \cdot \left(X_2(s) - \frac{k}{(b \cdot s + k)} \cdot X_2(s) \right) = P(s)$$

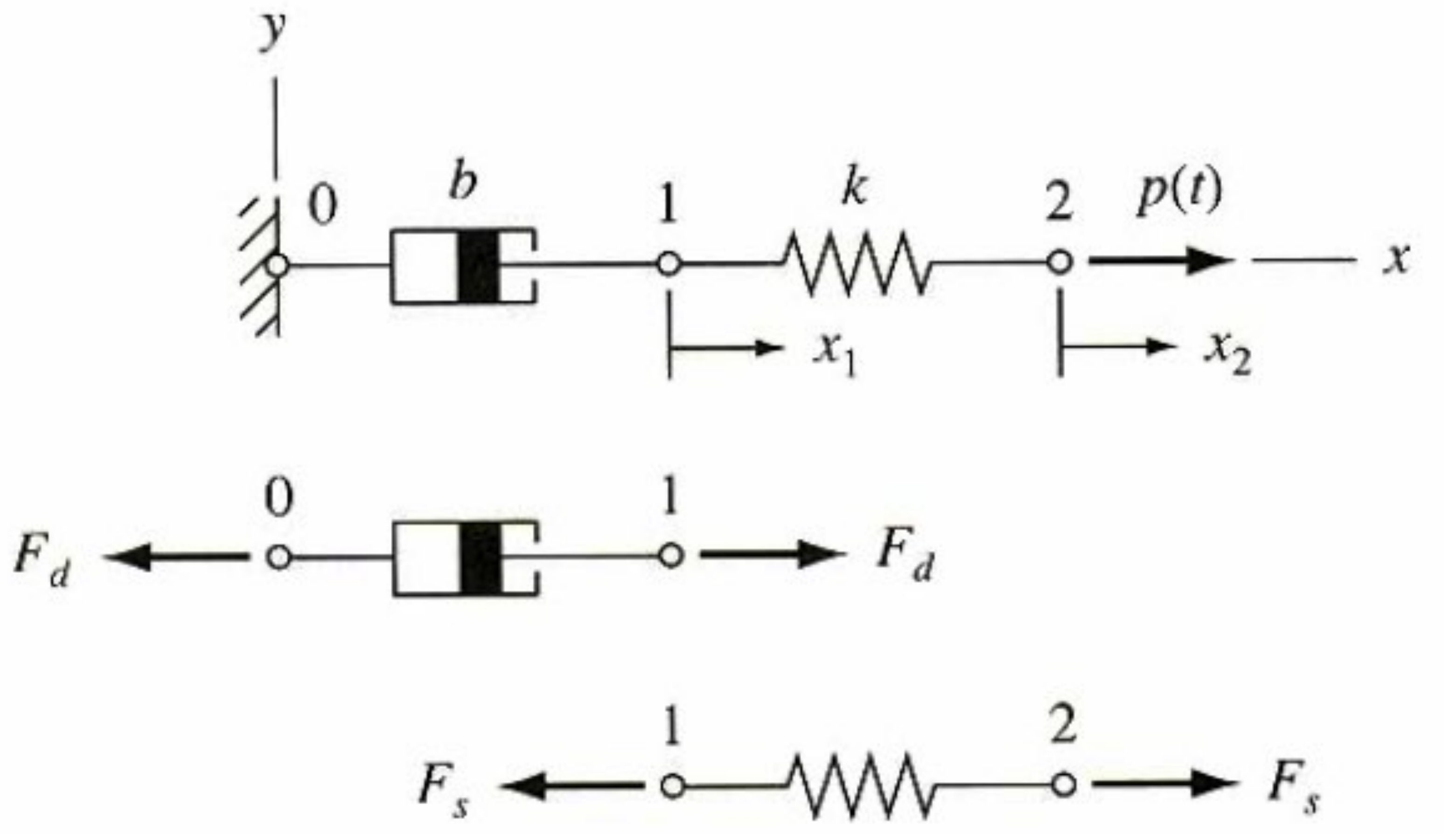
$$k \cdot \left(\frac{b \cdot s + k - k}{(b \cdot s + k)} \right) \cdot X_2(s) = P(s)$$

$$k \cdot \left(\frac{s}{(s + k/n)} \right) \cdot X_2(s) = P(s)$$

Logo: $\dfrac{X_2(s)}{P(s)} = \dfrac{1}{k} \cdot \left(\dfrac{s + k/b}{s} \right)$

EXEMPLO_1:

- Seja o sistema mola-amortecedor mostrado na figura ao lado:
  a) Encontre as equações diferenciais do sistema que relacionam os deslocamentos x_1 e x_2.
  b) Encontre as funções transferências: $\dfrac{X_2(s)}{P(s)}$ e $\dfrac{X_1(s)}{P(s)}$.
  c) Se a força aplicada $p(t)$ for constante, o que ocorre com a posição x_1 e x_2 ?



Solução:

a) **Assim**: $b \cdot \dot{x}_1 = k \cdot (x_2 - x_1) = p(t)$

c) Se $p(t) = cte \longrightarrow P(s) = \dfrac{cte}{s}$

Assim: $X_1(s) = \dfrac{1}{b \cdot s} \cdot \dfrac{cte}{s} = \dfrac{cte}{b} \cdot \dfrac{1}{s^2} \qquad \therefore \quad x_1(t) = \dfrac{cte}{b} \cdot t$

$$X_2(s) = \frac{1}{k}\left(\frac{s + k/b}{s}\right) \cdot \frac{cte}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} \qquad \therefore \quad x_2(t) = \frac{cte}{k} + \frac{cte}{b}\,t$$

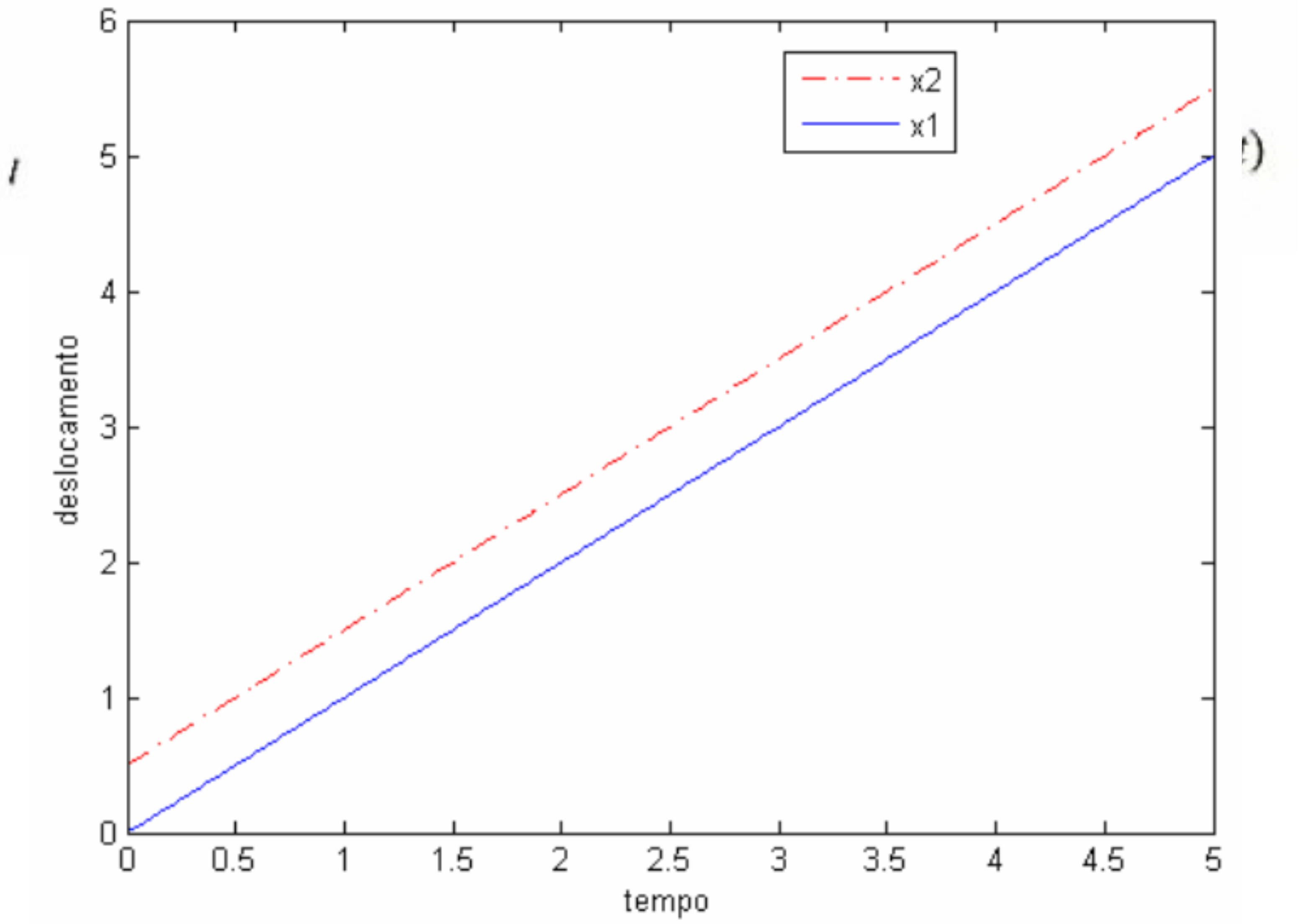
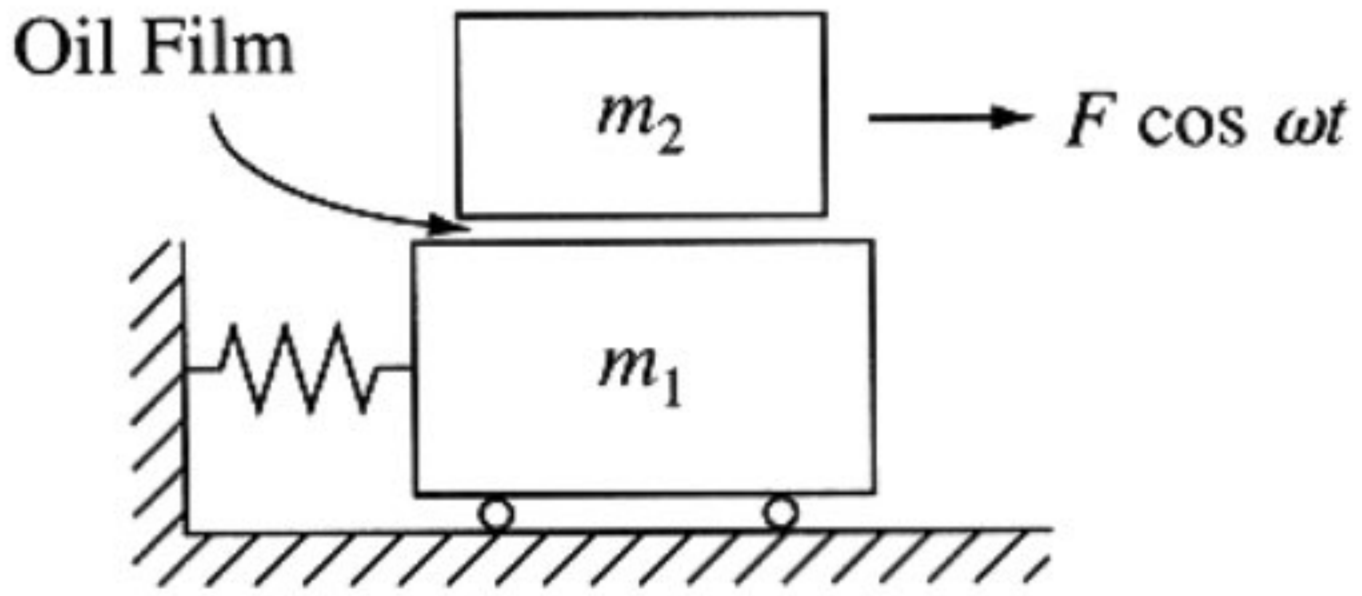
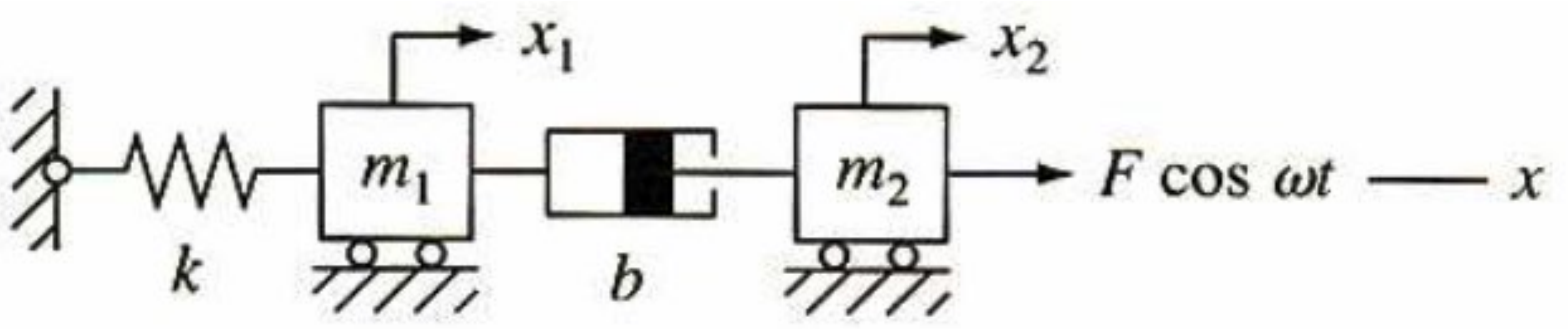


Fig.: Exemplo de resposta temporal para $k = 2$, $b = 1$ e $cte = 1$.

EXEMPLO_2



- A figura ao lado representa um máquina que possui base com superfície lubrificada para reduzir vibrações, mas a mesma sofre com excitações laterais (forças periódicas), dada por: $F \cdot \cos(\omega \cdot t)$.
- Este sistema pode ser representado como um sistema massa-mola-amortecedor.



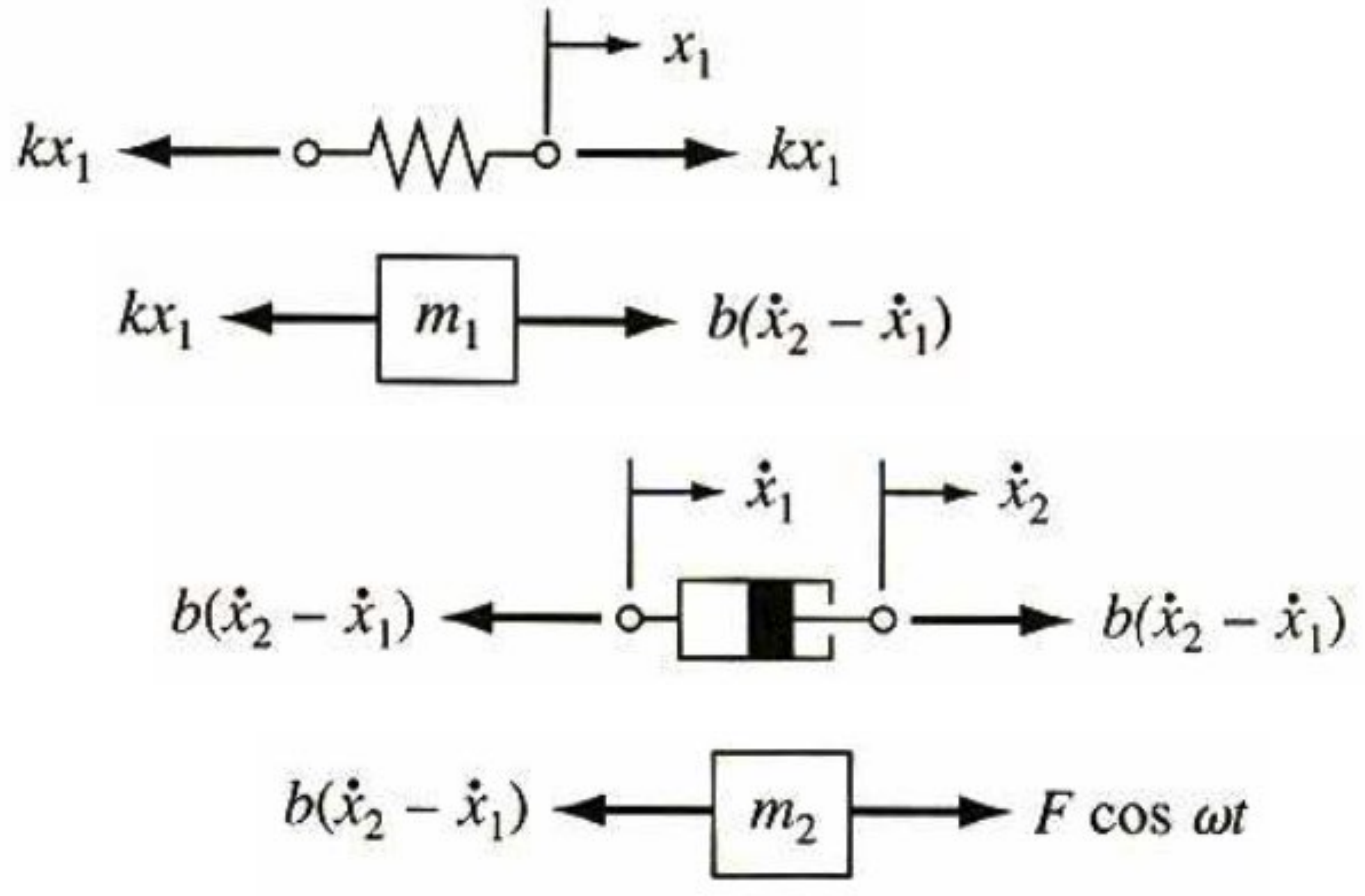
- Para modelar este sistema, deve-se observar os nós e aplicar a segunda lei de Newton. Quando existem massas, as massas representam nós. Em cada nó ocorre um deslocamento. Assim:

  Na massa m_2: a força aplicada terá como reação uma força da massa 2 e do amortecedor:

  $F \cdot \cos(\omega \dot{t}) = m_2 \cdot \ddot{x}_2 + b \cdot \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)$

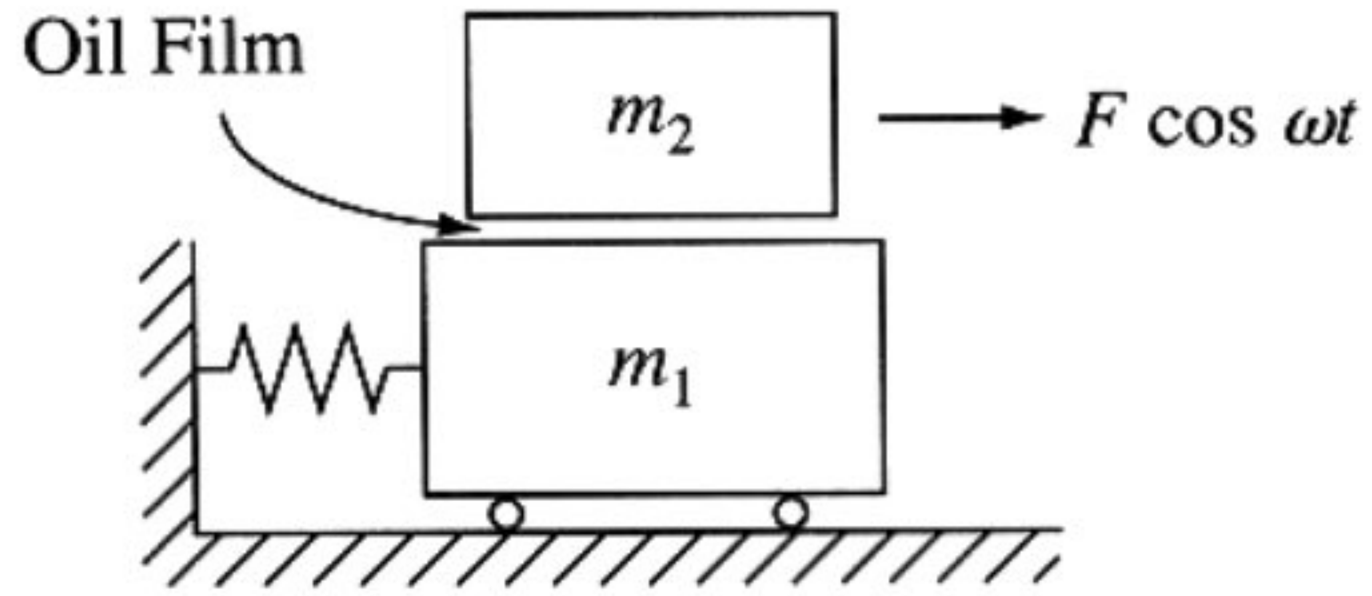
  Na massa m_1: a força do amortecedor terá como reação, uma força da massa 1 da mola:

  $b \cdot \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) = m_1 \cdot \ddot{x}_1 + k \cdot x_1$

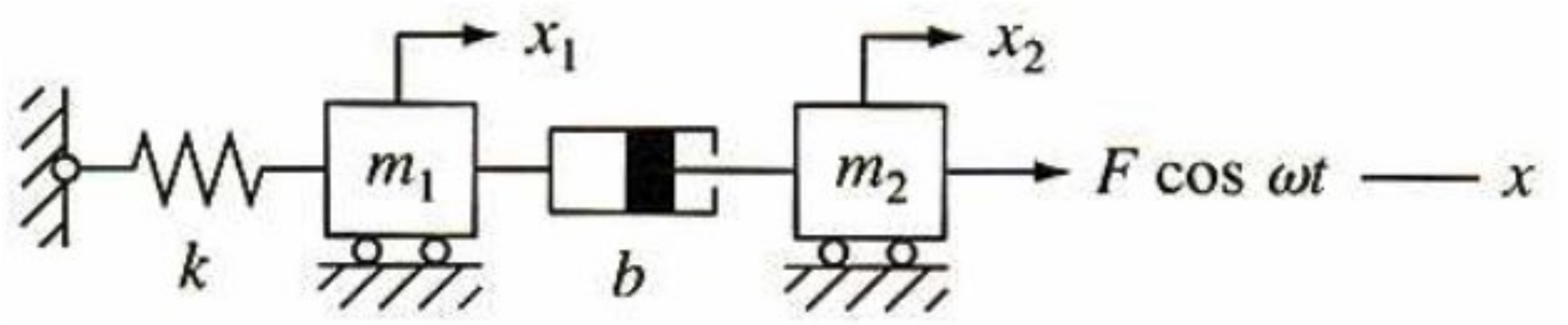


- Se for necessário analisar o deslocamento da massa m_2, pode-se representar o sistema através de uma função de transferência: $X_2(s) = f(F, \omega, m_1, m_2, b, k)\ldots$

EXEMPLO_2



- Se for necessário analisar o deslocamento da massa m_2, pode-se representar o sistema através de uma função de transferência: $X_2(s) = f(F, \omega, m_1, m_2, b, k)$:

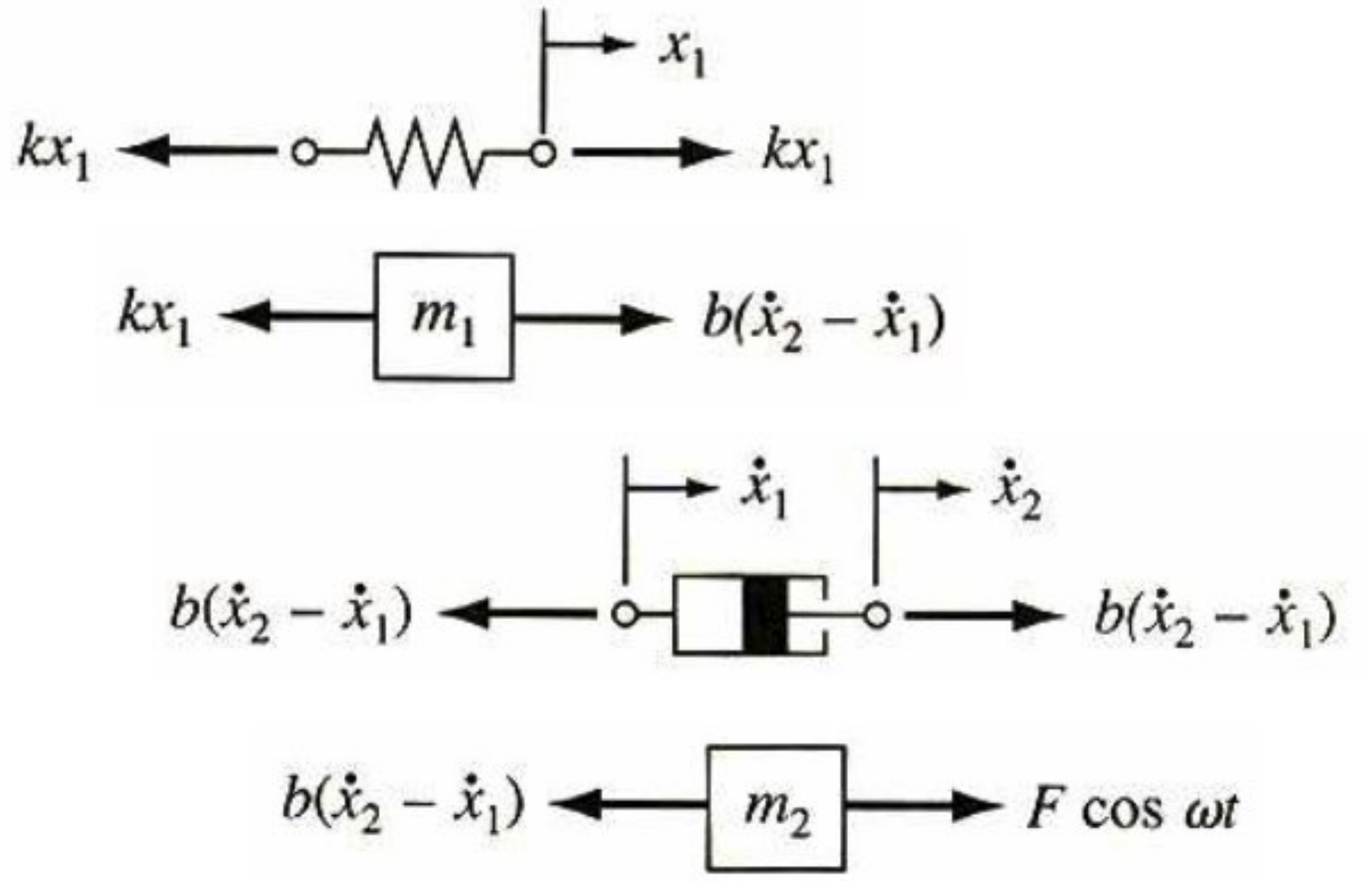


- Temos:

$$F \cdot \cos(\omega \dot{t}) = m_2 \cdot \ddot{x}_2 + b \cdot \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)$$
$$b \cdot \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) = m_1 \cdot \ddot{x}_1 + k \cdot x_1$$

- Assim:

$$F \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = m_s \cdot s^2 \cdot X_2(s) + b \cdot \left(s \cdot X_2(s) - s \cdot X_1(s)\right)$$
$$b \cdot \left(s \cdot X_2(s) - s \cdot X_1(s)\right) = m_1 \cdot s^2 \cdot X_1(s) + k \cdot X_1(s)$$
$$F \cdot \frac{s}{s^2 = \omega^2} = \left(m_2 \cdot s^2 + b \cdot s\right) X_2(s) - b \cdot s \cdot X_1(s)$$
$$b \cdot s \cdot X_2(s) = \left(m_1 \cdot s^2 + b \cdot s + k\right) \cdot X_1(s)$$
$$F \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \left(m_2 \cdot s^2 + b \cdot s\right) X_2(s) - b \cdot s \cdot \left(\frac{b \cdot s}{m_1 \cdot s^2 + b \cdot s + k}\right) \cdot X_2(s)$$
$$F \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot s^4 + (m_1 + m_2) \cdot b \cdot s^3 + m_2 \cdot k \cdot s^2 + b \cdot k \cdot s}{m_1 \cdot s^2 + b \cdot s + k} \cdot X_2(s)$$
$$X_2(s) = F \cdot \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right) \cdot \left(\frac{m_1 \cdot s^2 + b \cdot s + k}{m_1 \cdot m_2 \cdot s^4 + (m_1 + m_2) \cdot b \cdot s^3 + m_2 \cdot k \cdot s^2 + b \cdot k \cdot s}\right)$$



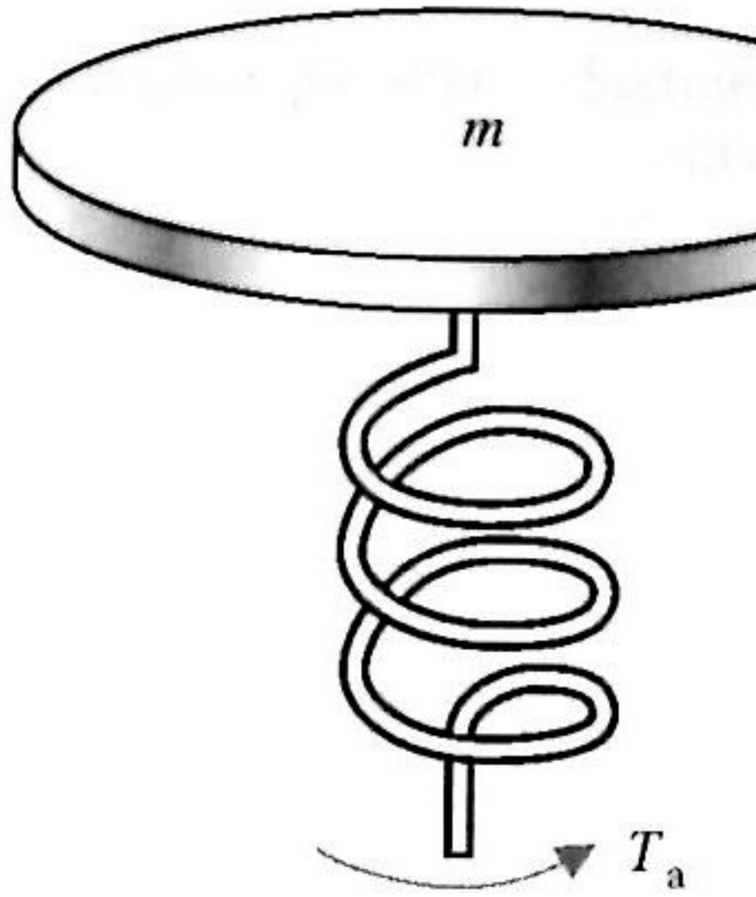
SISTEMAS MECÂNICOS

- Elementos básicos: Molas, Amortecedores, Massa e transmissões.
  As **molas** representam a rigidez do sistema;
  Os **amortecedores**, as forças de oposição ao movimento, os efeitos de amortecimento e fricção;
  As **massas**, a inércia ou resistência à aceleração.
- Sua análise envolve 2 tipos distintos de movimentos: **translacional** × **rotacional**.
- O equacionamento do sistema pode ser rea
- Assim: sistemas mecânicos estão sujeitos à
  - **forças (quando translacionais)** e
  - **torques (quando rotacionais)**.
- Outro enfoque: envolver a **análise energét**
  Não usaríamos as leis de Newton, mas sim
  Porém os mesmos resultados seriam obtid com base em
  energias e potências envolvidas no movime

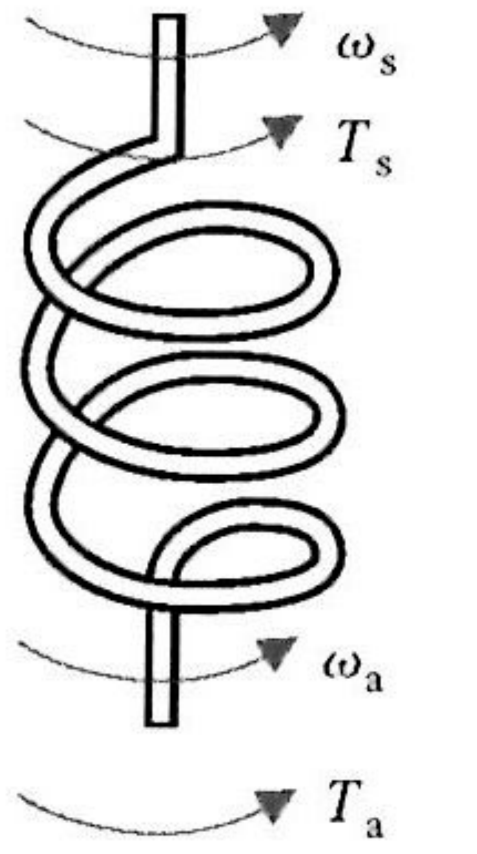
Quando abordamos movimentos rotacionais.
Envolve elemento mecânico forçado a girar em torno de um eixo.
Em sistemas mecânicos translacionais, realizamos a análise através do equilíbrio de forças.
Neste caso, para elementos girantes, devemos levar em consideração o torque associado aos elementos.

SISTEMA MECÂNICO ROTACIONAL: ELEMENTOS

- Quando um movimento implica rotação, há 3 blocos envolvidos:
  - mola torsional,
  - amortecedor rotativo e o
  - momento de inércia (inércia da massa rotativa).
- Neste caso, a entrada é o torque e a saída é o ângulo de rotação.



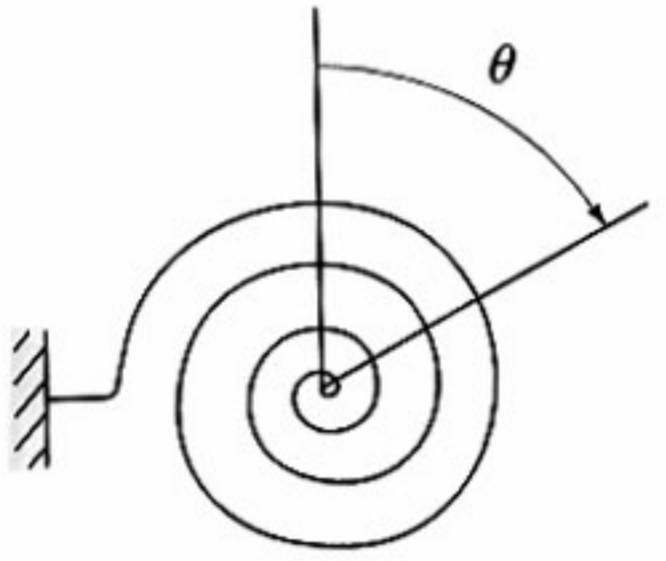
Sistema de torção massa-mola.

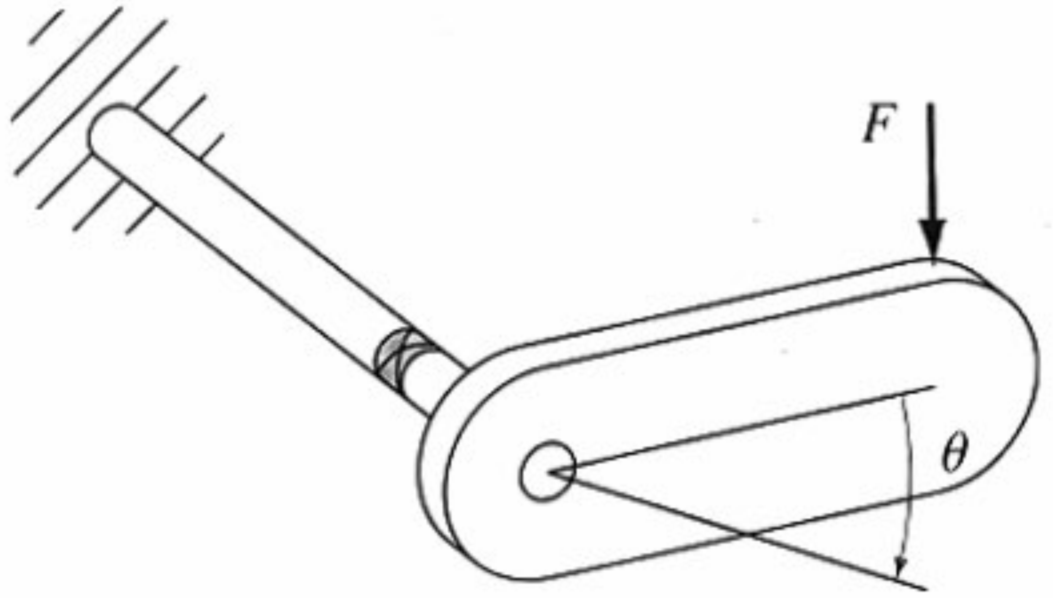


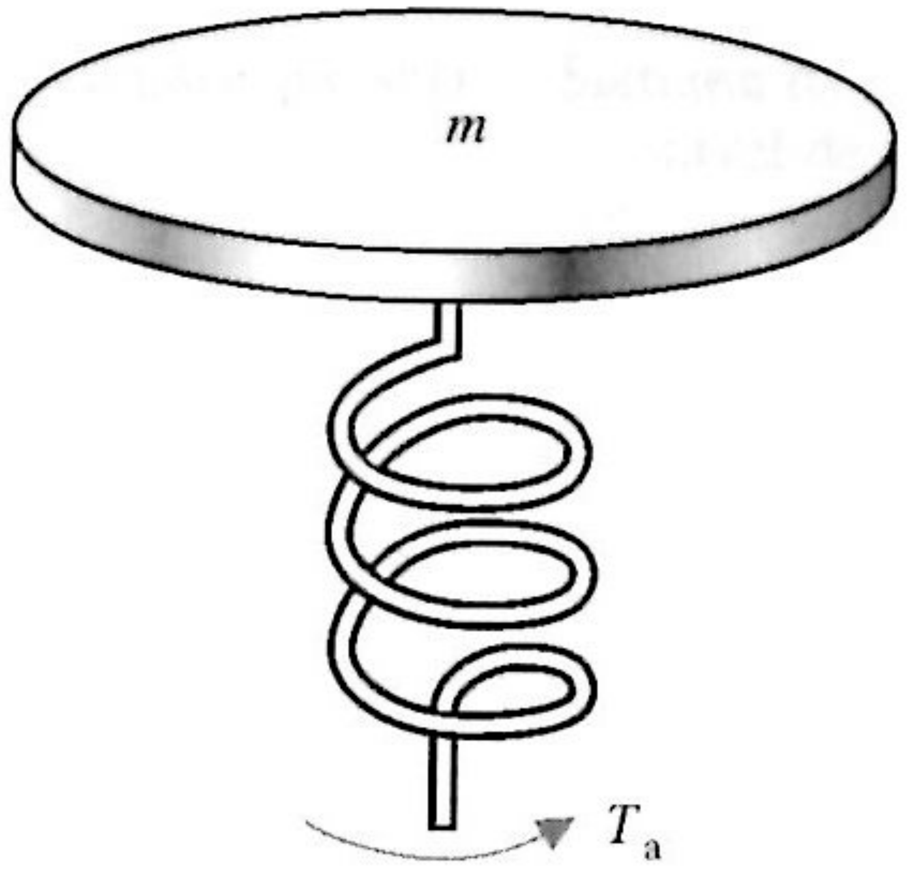
Sistema de torção, mola.

SISTEMA MECÂNICO ROTACIONAL: MOLA (DE TORÇÃO)

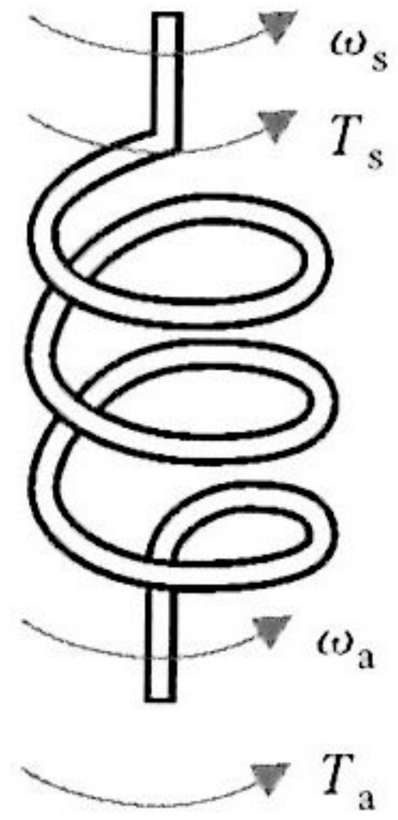
- É um elemento que impõe uma resistência ao deslocamento angular, θ, de um eixo nela acoplado.
- Para molas lineares:
  $T = k \cdot \left(\theta_1 - \theta_2\right)$
  onde k = constante elástica da mola $[N \cdot m/rad]$.
- Caso esteja engastada:
  $T = k \cdot \theta$







Sistema de torção massa-mola.



Sistema de torção, mola.

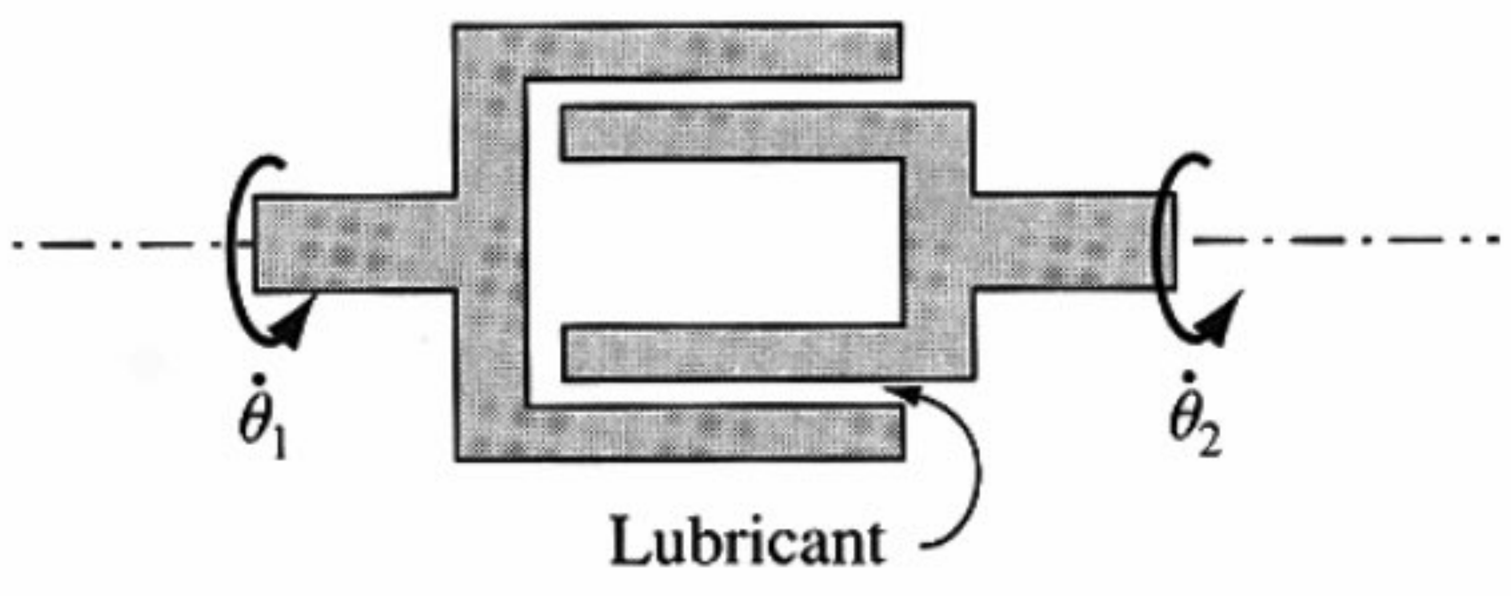
SISTEMA MECÂNICO ROTACIONAL: AMORTECEDOR ROTACIONAL

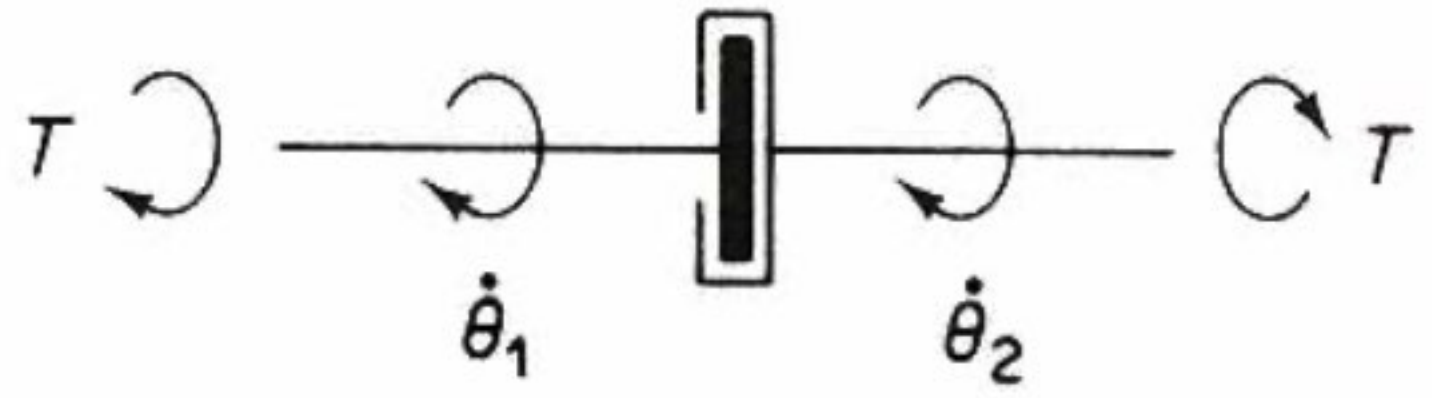
- Quando ocorre uma fricção causada por uma fina camada de lubrificante entre duas superfícies girantes, pode-se produzir uma resistência ao torque que é diretamente proporcional a velocidade angular relativa entre as superfícies, ou:
- $T = b \cdot \left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)$

  onde $b =$ coeficiente de amortecimento angular $[N \cdot m \cdot s/rad]$,

  ou ainda:

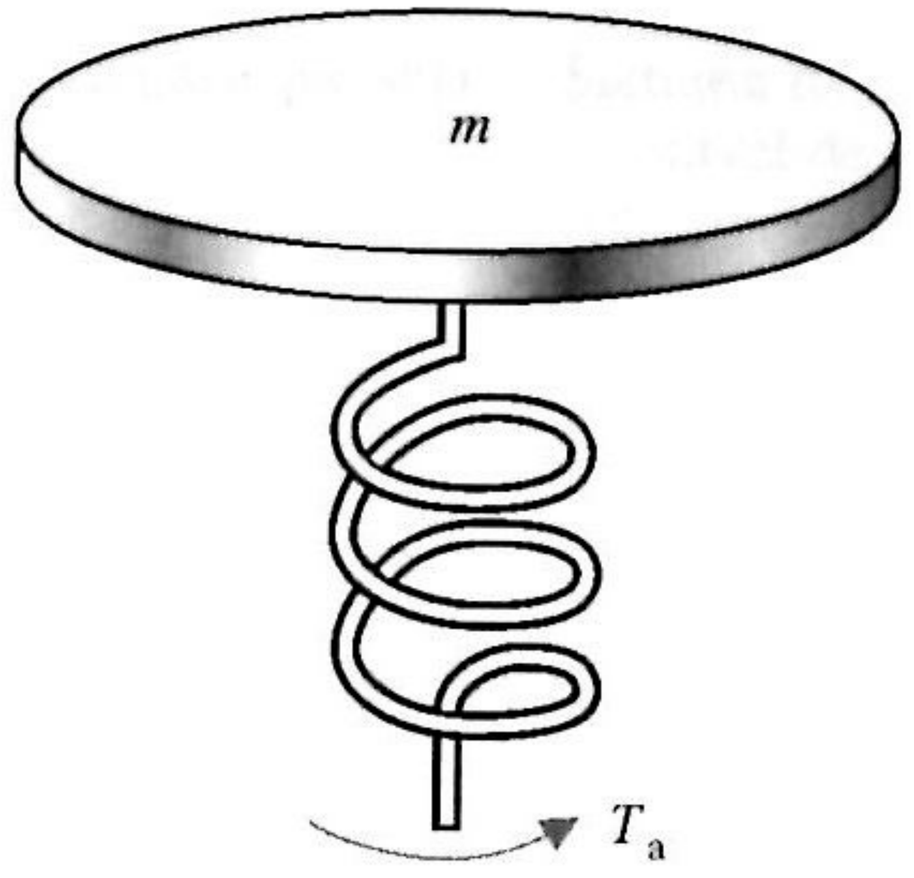
  $T = b \cdot (\omega_1 - \omega_2)$

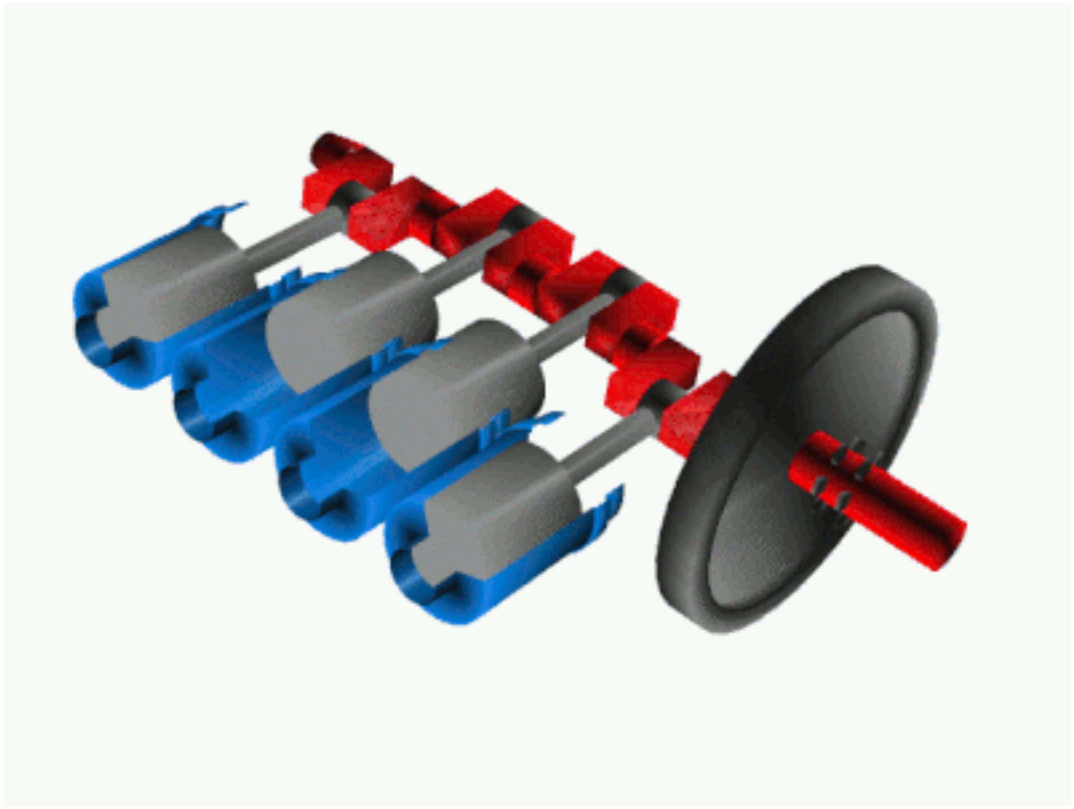




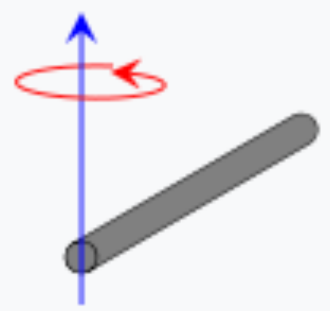
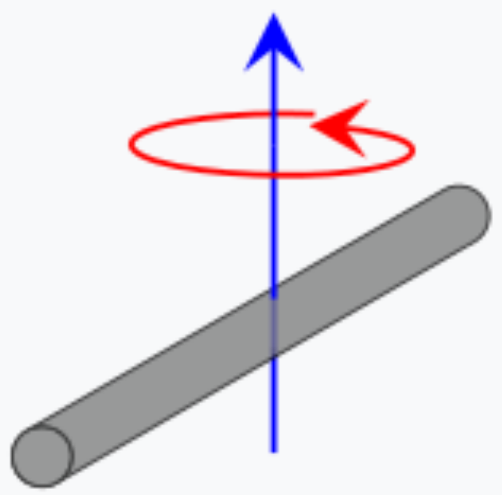
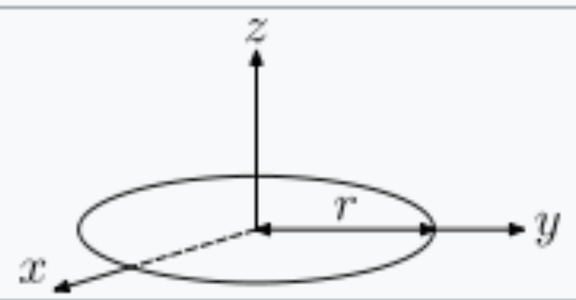
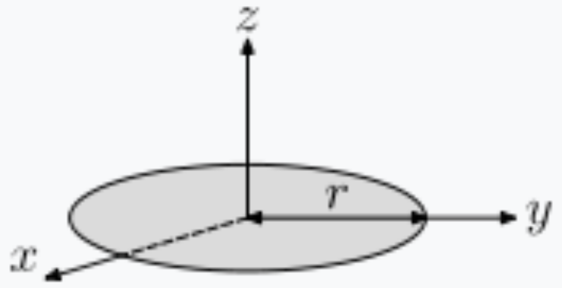
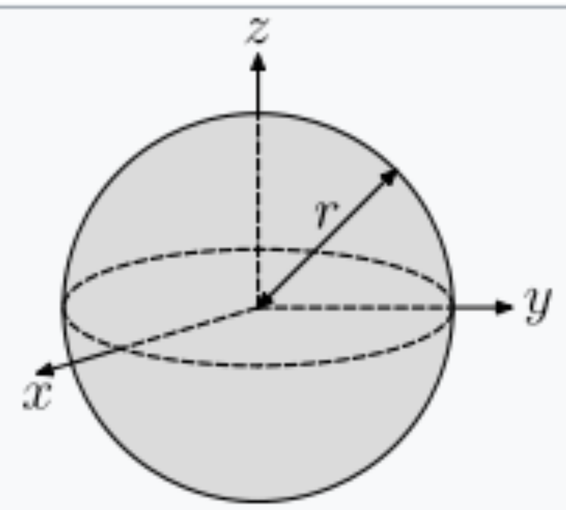
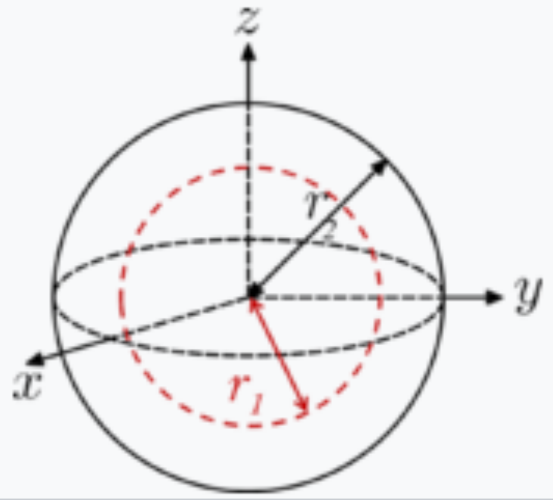
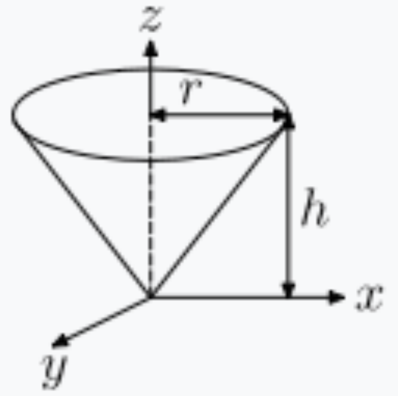
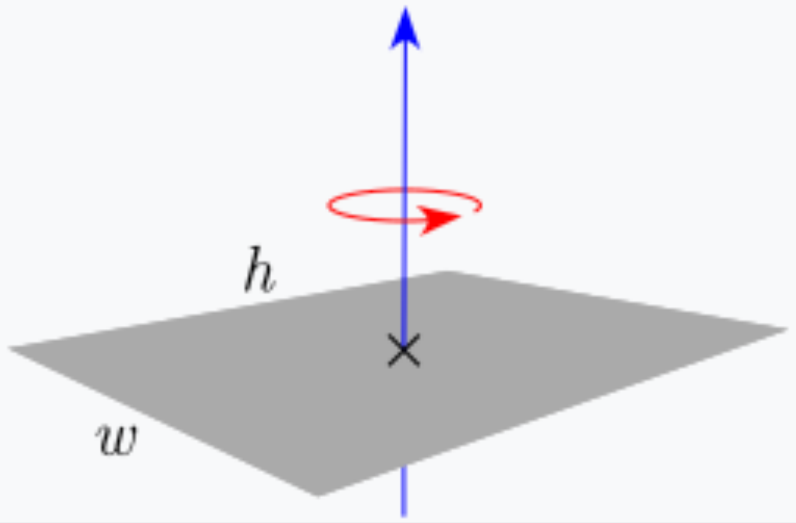
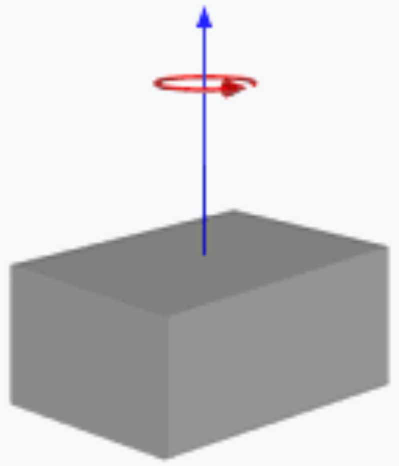
SISTEMA MECÂNICO ROTACIONAL: INÉRCIA

- Inércia é a resistência que uma **massa** exerce, quando acelerado.
- A inércia de um corpo depende de sua massa, do eixo de giro e do formato da massa.
- Se a massa está em equilíbrio, a somatória dos momentos nela aplicada é igual a zeros.
- Se a massa estiver em movimento acelerado, de acordo com a segunda lei de Newton (somatório dos momentos):
$$\sum M = J \cdot \ddot{\theta}$$
onde $J =$ momento de inércia do corpo girante, ou:
$$\sum M = J \cdot \dot{\omega}$$





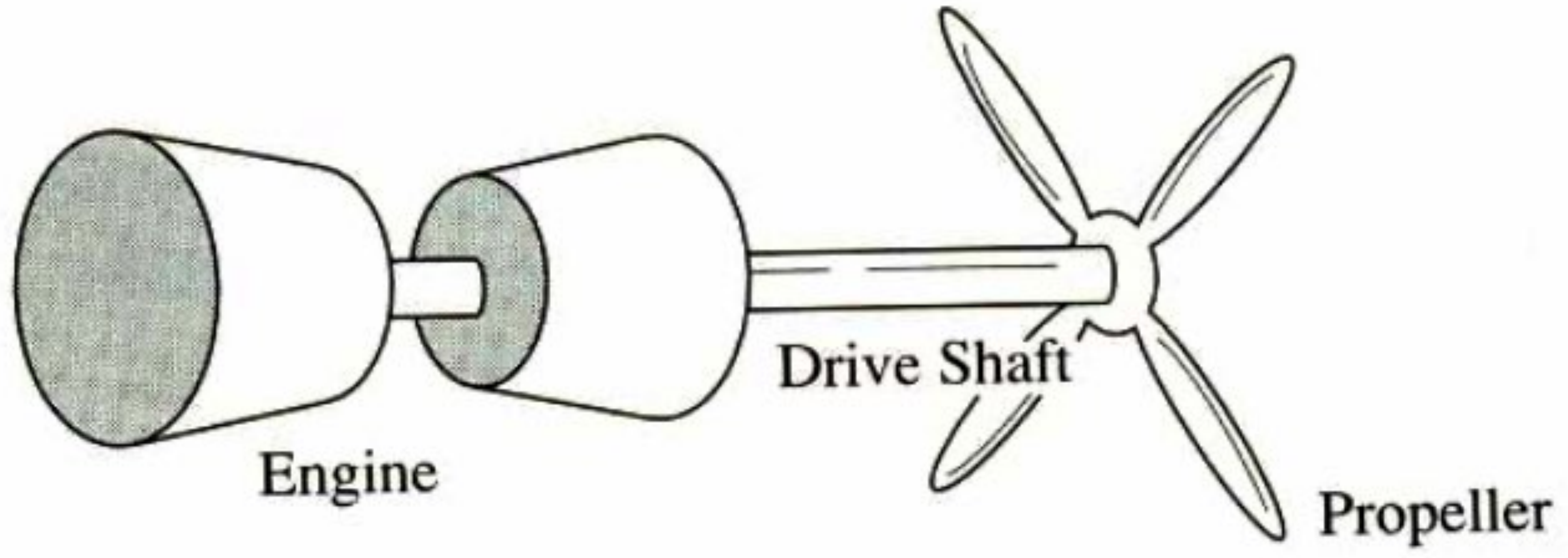
MOMENTO DE INÉRCIA

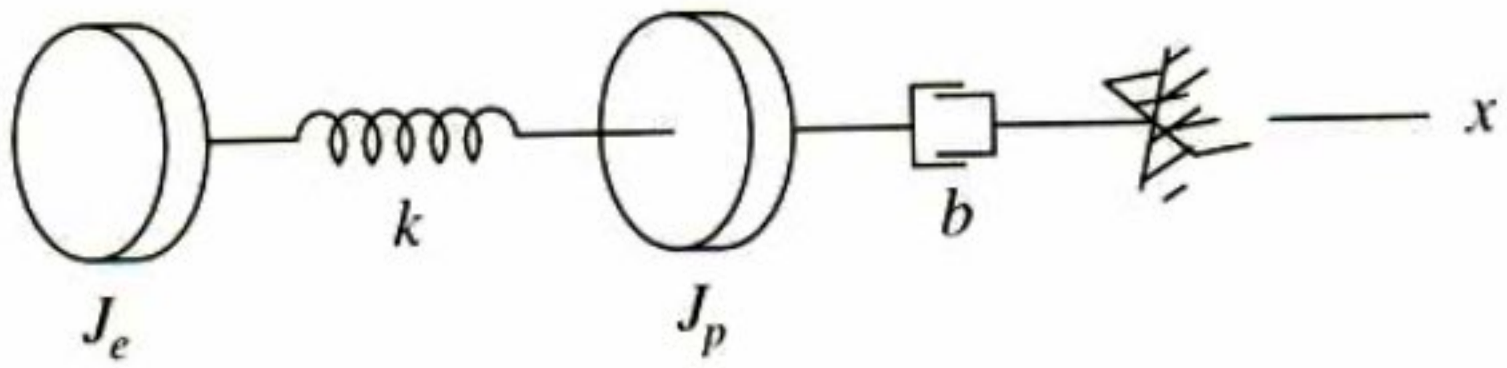
Descrição	Figura	Momento(s) de inércia
Massa pontual *m* a uma distância *r* dos eixos de rotação.		$I = mr^2$
Duas massas pontuais, *M* e *m*, com a massa reduzida μ e separadas por uma distância *x*.		$I = \frac{Mm}{M+m}x^2 = \mu x^2$
Barra de comprimento *L* e massa *m* (Eixo de rotação no fim da barra)		$I_{\text{fim}} = \frac{mL^2}{3}$ [1]
Barra de comprimento *L* e massa *m*		$I_{\text{centro}} = \frac{mL^2}{12}$ [1]
Aro circular de raio *r* e massa *m*		$I_z = mr^2$ $I_x = I_y = \frac{mr^2}{2}$
Disco fino de raio *r* e massa *m*		$I_z = \frac{mr^2}{2}$ $I_x = I_y = \frac{mr^2}{4}$
Bola (sólida) de raio *r* e massa *m*		$I = \frac{2mr^2}{5}$ [1]
Esfera (casca) de raio r_2, com cavidade cocentrica de raio r_1 e massa *m*		$I = \frac{2m}{5}\left[\frac{r_2^5 - r_1^5}{r_2^3 - r_1^3}\right]$ [1]
Cone circular de raio *r*, altura *h* e massa *m*		$I_z = \frac{3}{10}mr^2$ [3] $I_x = I_y = \frac{3}{5}m\left(\frac{r^2}{4} + h^2\right)$ [3]
Placa retangular fina de altura *h*, espessura *w* e massa *m*		$I_c = \frac{m(h^2 + w^2)}{12}$ [1]
Cuboide sólido de altura *h*, espessura *w*, profundidade *d* e massa *m*		$I_h = \frac{1}{12}m\left(w^2 + d^2\right)$ $I_w = \frac{1}{12}m\left(h^2 + d^2\right)$ $I_d = \frac{1}{12}m\left(h^2 + w^2\right)$

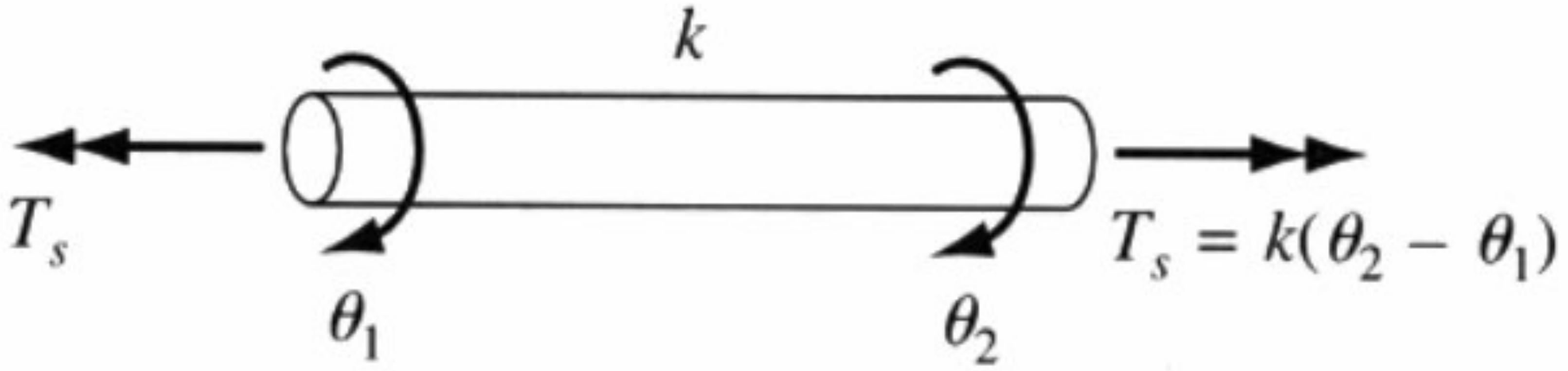
Lista de momentos de inércia: https://pt.wikipedia.org/wiki/Lista_de_momentos_de_inércia

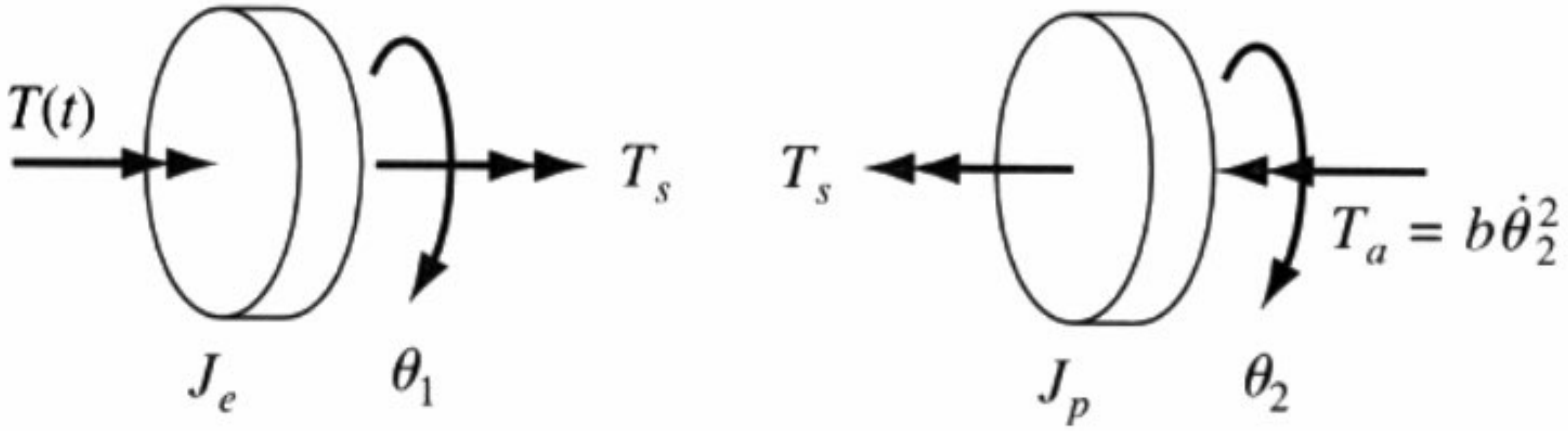
EXEMPLO: SISTEMA MOTOR-PROPULSOR

- A figura do topo mostra o propulsor de um avião (de forma simplificada)
- O momento de inércia do motor é representador por J_e e o momento de inércia da hélice é representado por J_p. O torque aplicado pelo motor é definido como $T(t)$. A inércia do eixo é desprezada e será representado apenas como uma mola.
- Note que a hélice ao girar, gera uma resistência ao torque do motor. Essa resistência é devido ao arrasto causado pela hélice no ar sendo diretamente proporcional ao quadrado da velocidade:
  $T_a(t) = b \cdot \dot{\theta}_2^2$. Mas como estamos tratando apenas de sistemas lineares:
  $T_a(t) = b \cdot \dot{\theta}_2$
- **Análise**: da mesma forma que a realizada para sistema translacional. Porém somando momentos. Analisamos cada massa da mesma maneira que analisamos o sistema translacional. Porém de acordo com o somatório dos momentos:
  $\sum M = 0$



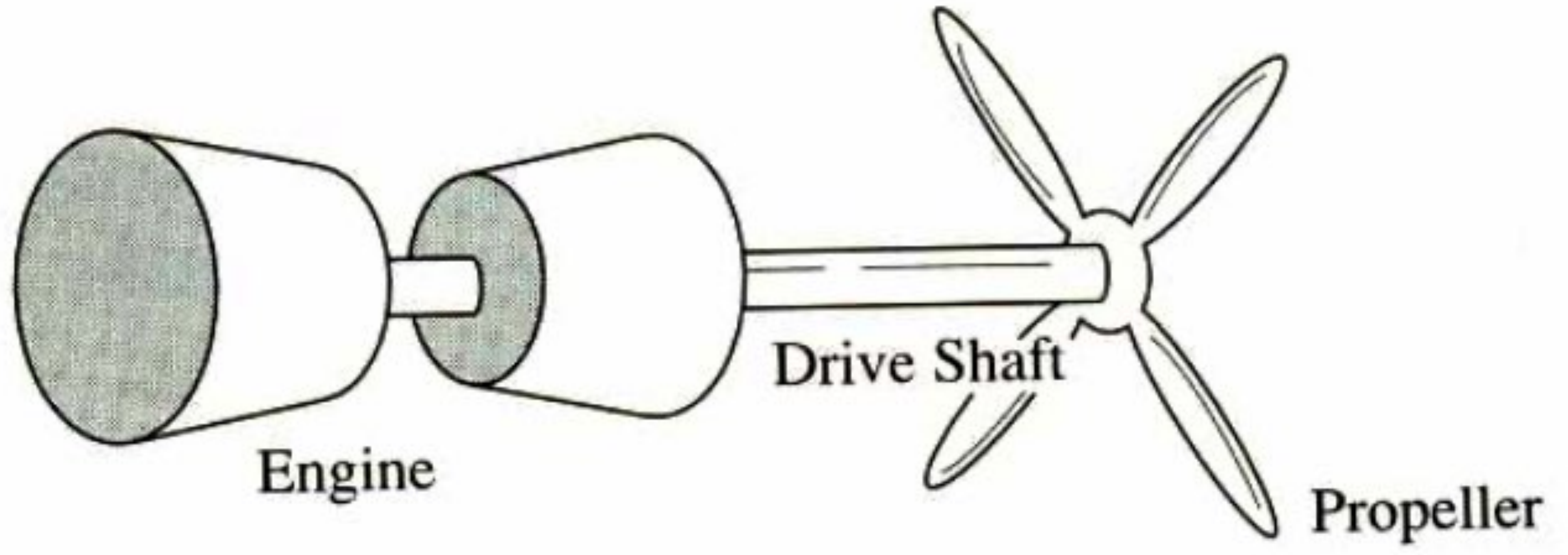




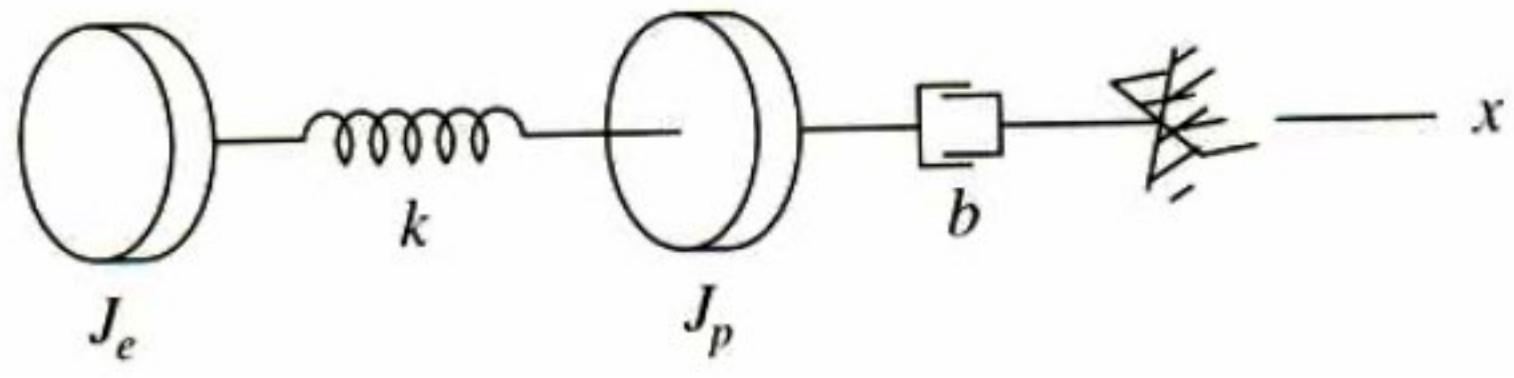


Pag. 7 de "3_Sistemas_Mecanicos_Translacionais_e_Ro.pdf"

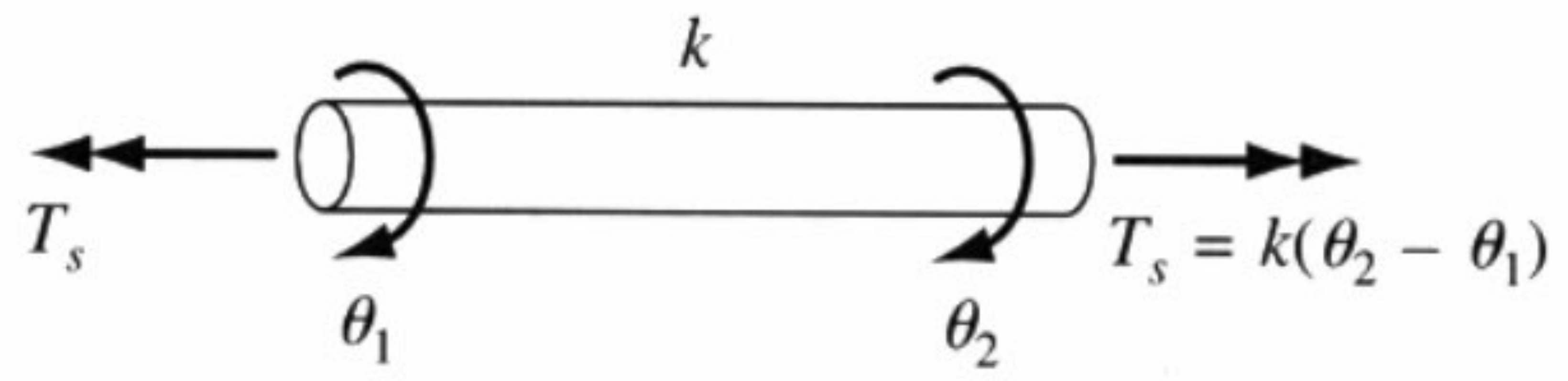
EXEMPLO: SISTEMA MOTOR-PROPULSOR



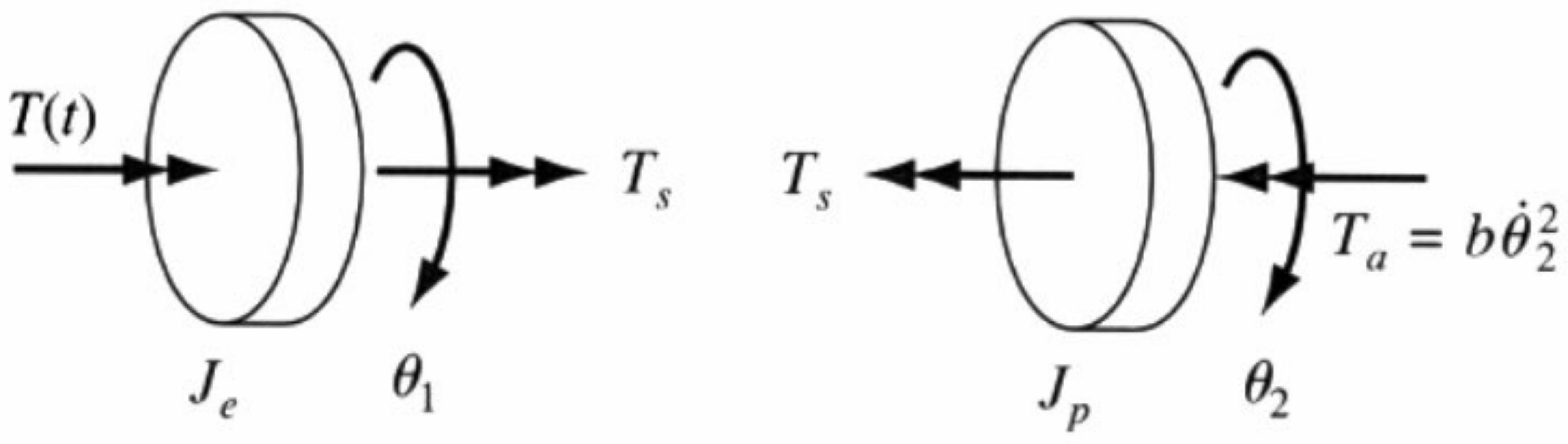
- J_e = momento de inércia do motor;
  J_p = momento de inércia da hélice;
  $T(t)$ = torque aplicado pelo motor.



- A hélice ao girar, gera uma resistência ao torque do motor diretamente proporcional ao quadrado da velocidade, mas linearizado:
  $T_a(t) = b \cdot \dot{\theta}_2$



- Na Inércia J_e: o torque aplicado pelo motor têm como resistência o torque na inércia do motor e o torque no eixo atuando como mola:
  $\sum M = 0$
  $T(t) = J_e \cdot \ddot{\theta}_1 + k\left(\theta_1(t) - \theta_2(t)\right)$ (Note:"+" do torque: regra da mão direita)

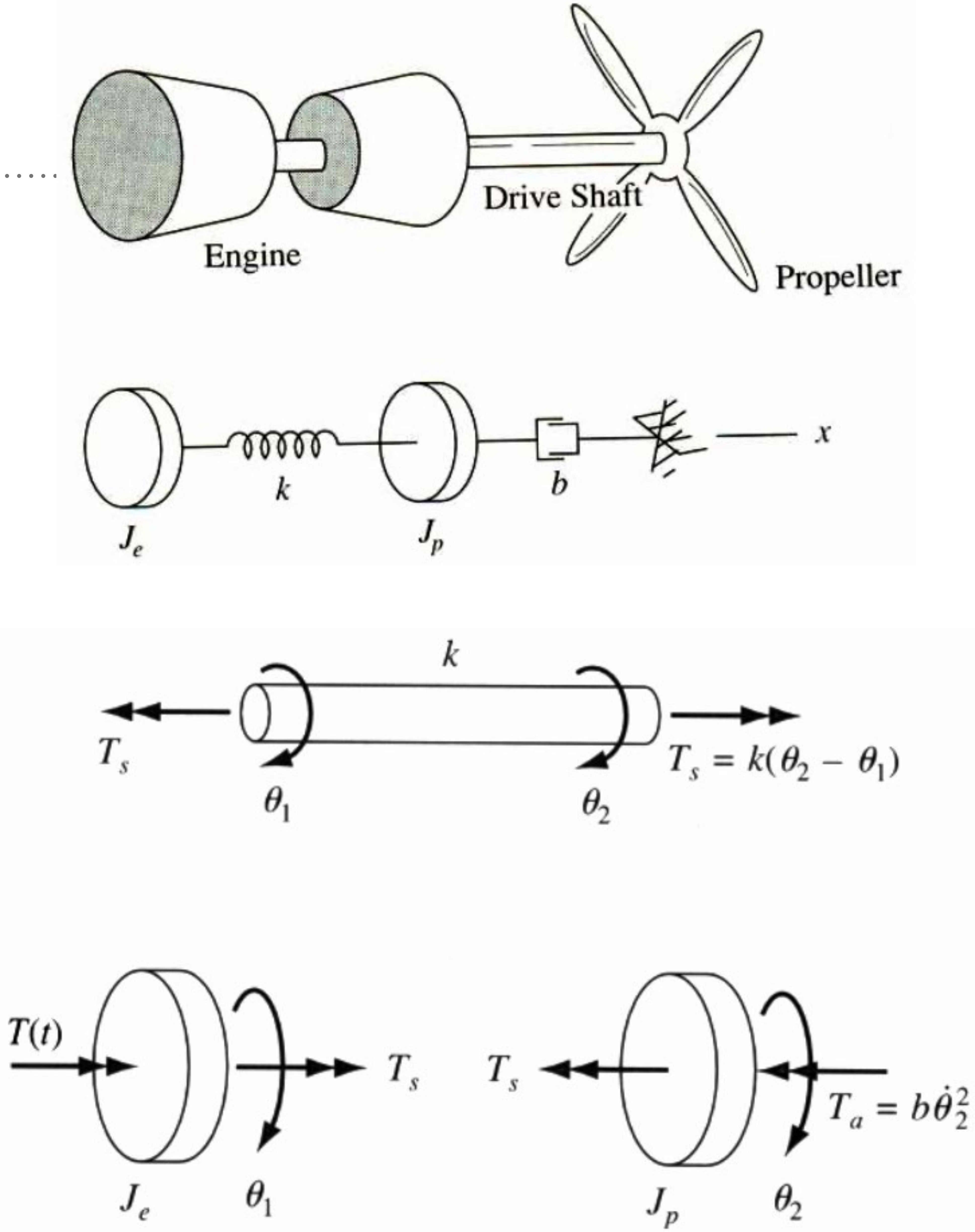


- Na Inércia J_p: o torque transferido pelo eixo tem como resistência o torque de inércia da hélice e o torque gerado pela resistência do ar T_b (arrasto):
  $k\left(\theta_1(t) - \theta_2(t)\right) = J_p \cdot \ddot{\theta}_2 + b \cdot \dot{\theta}_2$
- Este sistema foi modelado tendo como variável dependente, a posição angular e suas derivadas (velocidade de aceleração).

Pag. 7 de "3_Sistemas_Mecanicos_Translacionais_e_Ro.pdf"

EXEMPLO: SISTEMA MOTOR-PROPULSOR

- $\sum M = 0$
- Na inércia J_e:
  $T(t) = J_e \cdot \ddot{\theta}_1 + k\left(\theta_1(t) - \theta_2(t)\right)$
- Na Inércia J_p:
  $k\left(\theta_1(t) - \theta_2(t)\right) = J_p \cdot \ddot{\theta}_2 + b \cdot \dot{\theta}_2$
- Analisando o sistema em função da velocidade:
  Por exemplo: queremos relacionar velocidade da hélice $(\dot{\theta}_2 = \omega_2(t)) \times$ torque aplicado no motor:
  $T(t) = J_e \cdot \dot{\omega}_1 + k \cdot \int \left(\omega_1(t) - \omega_2(t)\right) dt$
  $k \cdot \int \left(\omega_1(t) - \omega_2(t)\right) dt = J_p \cdot \dot{\omega}_2 + b \cdot \omega_2(t)$



Pag. 7 de "3_Sistemas_Mecanicos_Translacionais_e_Ro.pdf"

EXEMPLO: SISTEMA MOTOR-PROPULSOR

- Relacionando velocidade da hélice ($\dot{\theta}_2 = \omega_2(t)$) $\times$ torque aplicado no motor:

$$T(t) = J_e \cdot \dot{\omega}_1 + k \cdot \int \big(\omega_1(t) - \omega_2(t)\big)\, dt$$

$$k \cdot \int \big(\omega_1(t) - \omega_2(t)\big)\, dt = J_p \cdot \dot{\omega}_2 + b \cdot \omega_2(t)$$

- Transformada de Laplace:

$$\Omega_2(s) = \left(\frac{k}{J_e \cdot J_p \cdot s^3 + J_e \cdot b \cdot s^2 + (J_e \cdot k + J_p \cdot k) \cdot s + b \cdot k} \right) \cdot T(s)$$

- Transformada de Laplace:

$$\begin{cases} T(s) = J_e.s.\Omega_1(s) + k.\dfrac{1}{s}\big(\Omega_1(s) - \Omega_2(s)\big) \\ k.\dfrac{1}{s}\big(\Omega_1(s) - \Omega_2(s)\big) = J_p.s.\Omega_2(s) + b.\Omega_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(s) = \left(J_e.s + \dfrac{k}{s}\right)\Omega_1(s) - \dfrac{k}{s}.\Omega_2(s) \\ \Omega_1(s).\dfrac{k}{s} = \left(J_p.s + b + \dfrac{k}{s}\right)\Omega_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(s) = \left(\dfrac{J_e.s^2 + k}{s}\right)\Omega_1(s) - \dfrac{k}{s}.\Omega_2(s) \\ \Omega_1(s) = \left(\dfrac{J_p.s^2 + b.s + k}{k}\right)\Omega_2(s) \end{cases}$$

$$T(s) = \left(\frac{J_e.s^2 + k}{s}\right).\left(\frac{J_p.s^2 + b.s + k}{k}\right)\Omega_2(s) - \frac{k}{s}.\Omega_2(s)$$

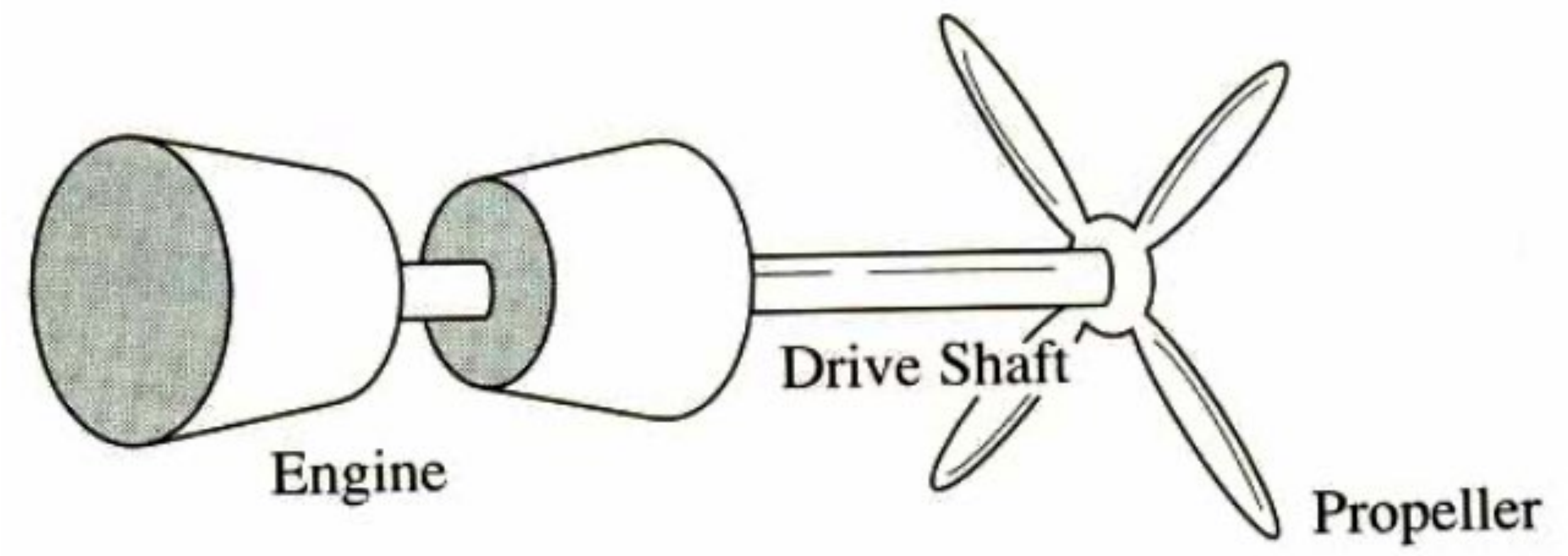
$$T(s) = \left(\frac{J_e.J_p.s^4 + J_e.b.s^3 + J_e.k.s^2 + J_p.k.s^2 + b.k.s + k^2}{k.s} - \frac{k}{s}\right)\Omega_2(s)$$

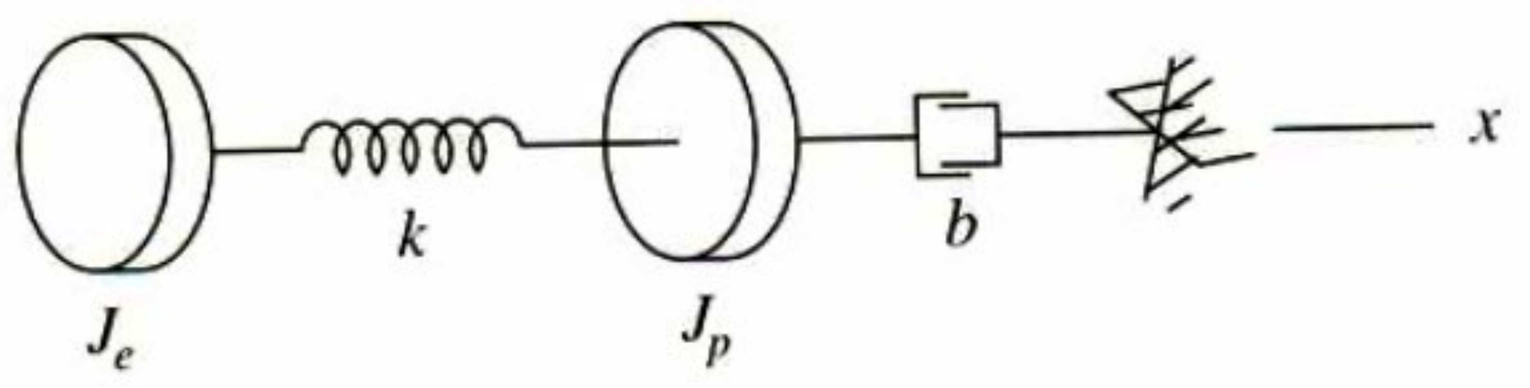
$$T(s) = \left(\frac{J_e.J_p.s^4 + J_e.b.s^3 + (J_e.k + J_p.k).s^2 + b.k.s}{k.s}\right)\Omega_2(s)$$

$$\boxed{\Omega_2(s) = \left(\frac{k}{J_e.J_p.s^3 + J_e.b.s^2 + (J_e.k + J_p.k).s + b.k}\right).T(s)}$$

Pag. 7 de “3_Sistemas_Mecanicos_Translacionais_e_Ro.pdf”

EXEMPLO: SISTEMA MOTOR-PROPULSOR





- Relacionando velocidade da hélice ($\dot{\theta}_2 = \omega_2(t)$) × torque aplicado no motor:

$$T(t) = J_e \cdot \dot{\omega}_1 + k \cdot \int \big(\omega_1(t) - \omega_2(t)\big)\, dt$$

$$k \cdot \int \big(\omega_1(t) - \omega_2(t)\big)\, dt = J_p \cdot \dot{\omega}_2 + b \cdot \omega_2(t)$$

- Transformada de Laplace:

$$\Omega_2(s) = \left(\frac{k}{J_e \cdot J_p \cdot s^3 + J_e \cdot b \cdot s^2 + (J_e \cdot k + J_p \cdot k) \cdot s + b \cdot k} \right) \cdot T(s)$$

Simulação:

Entrada: degrau de 100K [Nm];

$$T(s) = \frac{100.000}{s}$$

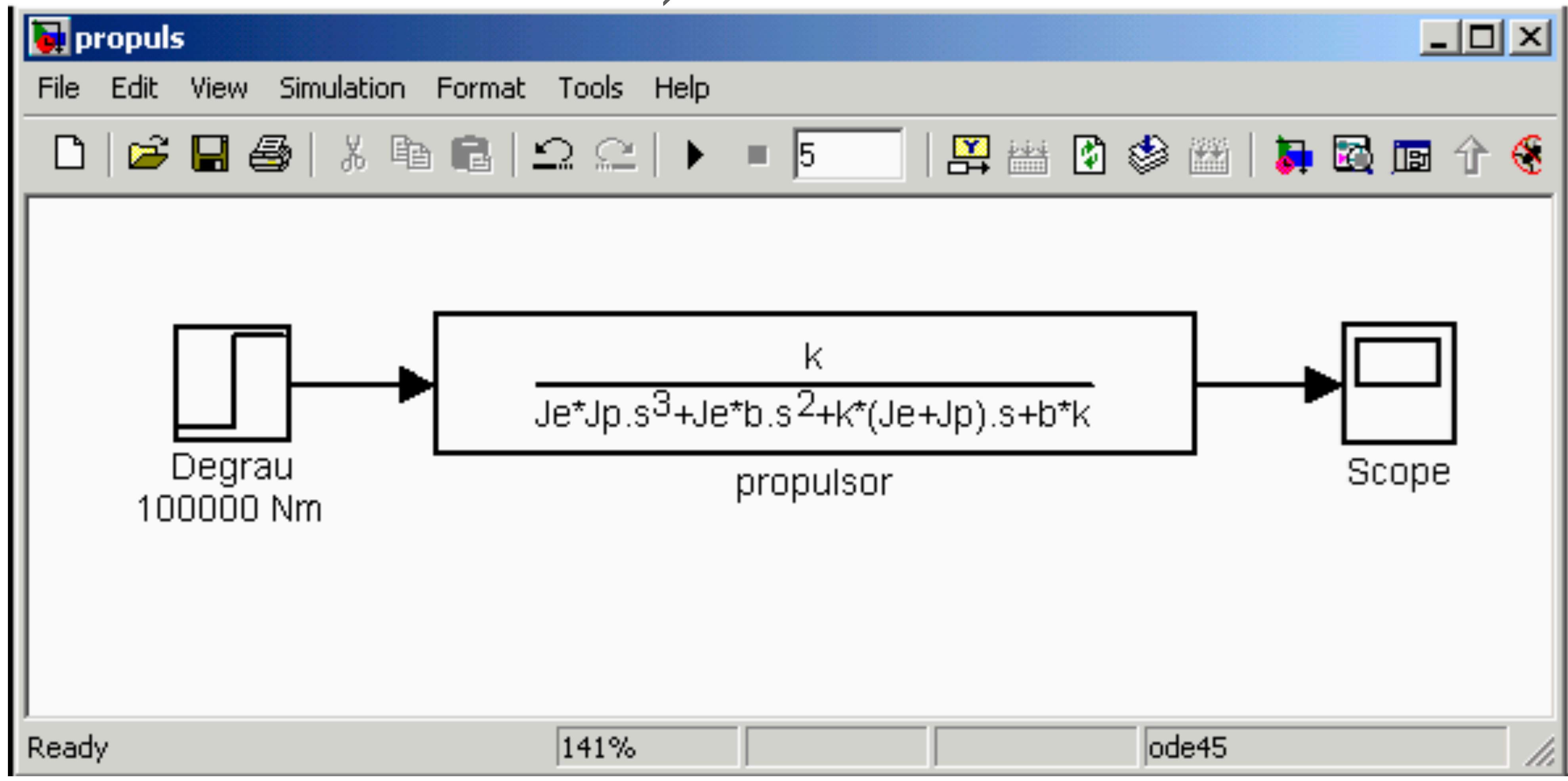
$J_e = 5$ *[Nm/rad/s²];*

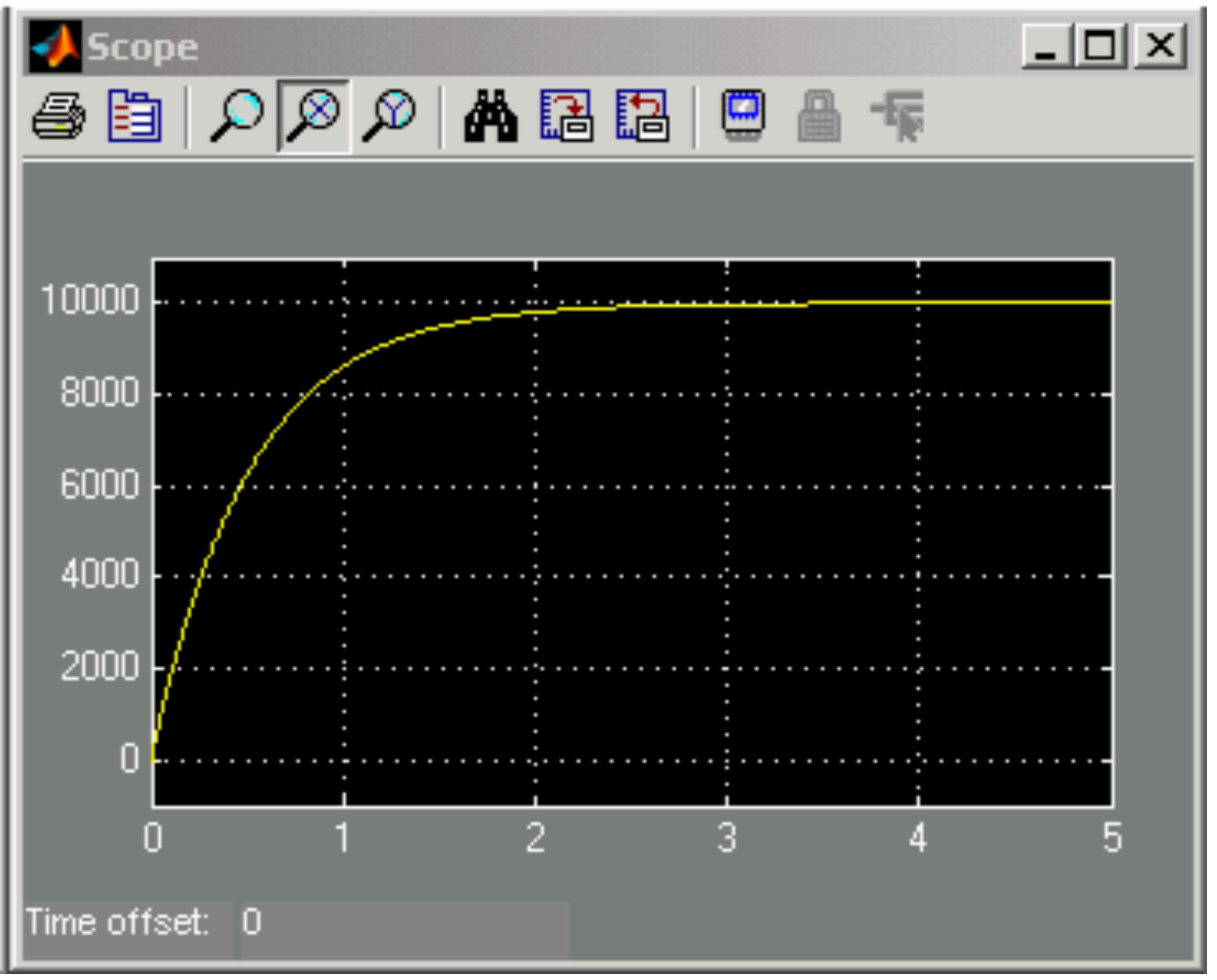
$J_p = 0{,}01$ *[Nm/rad/s²];*

$b = 10$ *[Nm/rad/s];*

$k = 10.000$ *[N rad].*

Pag. 7 de "3_Sistemas_Mecanicos_Translacionais_e_Ro.pdf"



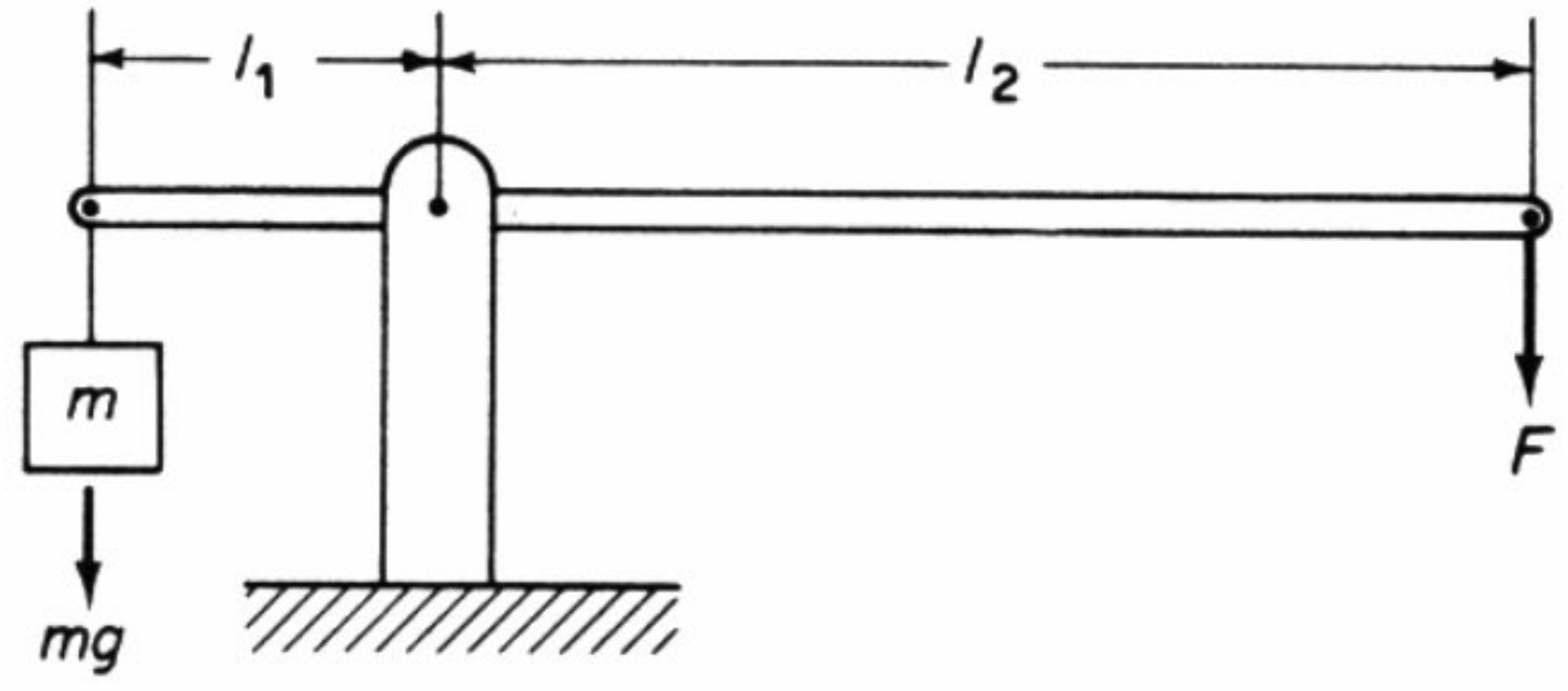


ELEMENTOS AMPLIFICADORES/REDUTORES LINEARES:

- **Alavancas**:
  Elemento que transmite energia de um ponto para outro.
  Possui relação de torque = 1.

$$l_1 \cdot m \cdot g = l_2 \cdot F$$

$$F = m \cdot g \cdot \frac{l_1}{l_2}$$



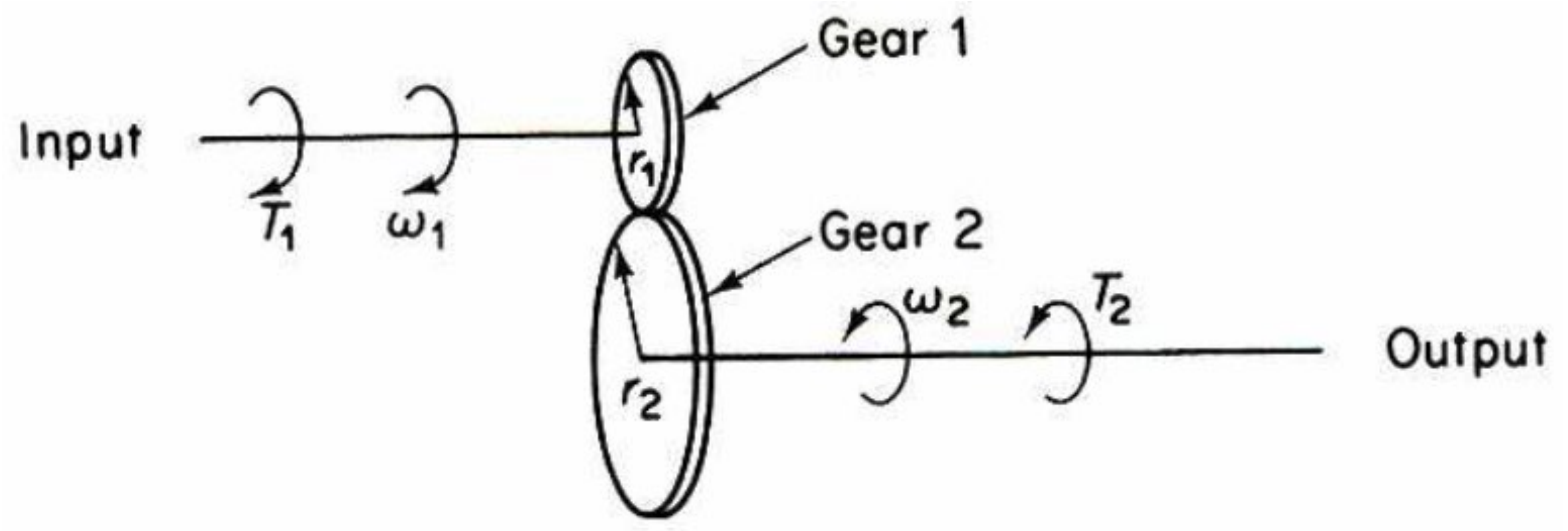
ELEMENTOS AMPLIFICADORES/REDUTORES ROTACIONAIS:

- **Engrenagens/Polias:**
  Usados para reduzir velocidade e aumentar o torque.
  Possui relação inversa entre o raio da polia ou o número de dentes da engrenagem com a velocidade angular, pois devem possuir a mesma velocidade tangencial e força.

$$r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2$$

$$\frac{T_1}{r_1} = \frac{T_2}{r_2}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{T_1}{T_2}$$



Onde: r = raio da polia;

n = num. Dentes da engrenagem;

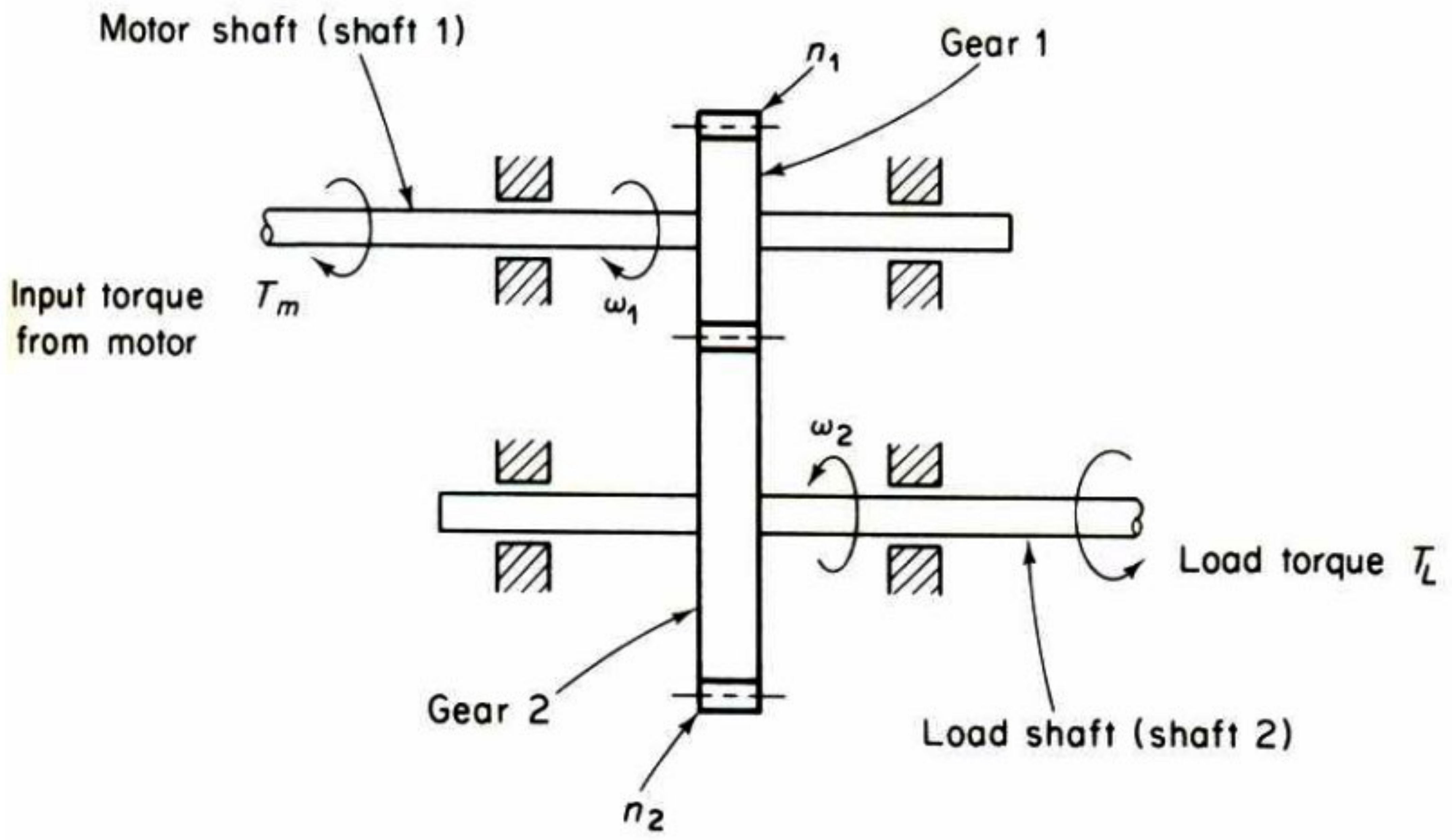
ω = velocidade angular do eixo.

EXEMPLO: ELEMENTO AMPLIFICADORES/REDUTORES ROTACIONAL:

- Modele o sistema de engrenagens e encontre a equação que relaciona os torques do motor (T_M) e de carga (T_L) com as velocidades.
- O torque do motor T_M é aplicado no eixo 1. O momento de inércia do eixo somado ao da polia é definido como J_1. De forma similar, temos J_2 e T_L no eixo 2.
- Se desconsideramos o atrito, podemos afirmar que o torque aplicado ao eixo 1 tem como resistência o movimento da engrenagem 1 e o torque transmitido para a engrenagem 2:

$$T_M(t) = J_1 \cdot \dot{\omega}_1 + T_1(t)$$
$$\omega_1(t) \cdot T_1(t) = \omega_2(t) \cdot T_2(t)$$
$$T_2(t) = J_2 \cdot \dot{\omega}_2 + T_L(t)$$

- O torque transmitido para a engrenagem 2 tem como resistência o movimento da engrenagem 2 e o torque de carga T_L:



- Transformada de Laplace:

$$T_M(s) = J_1 \cdot s \cdot \Omega_1 + T_1(s)$$
$$\Omega_1(s) \cdot T_1(s) = \Omega_2(s) \cdot T_2(s)$$
$$T_2(s) = J_2 \cdot s \cdot \Omega_2(s) + T_L(s)$$

Simplificando….

EXEMPLO: ELEMENTO AMPLIFICADORES/REDUTORES ROTACIONAL:

- Simplificando:

$$T_M(s) = J_1.s.\Omega_1(s) + \frac{\Omega_2(s)}{\Omega_1(s)} T_2(s)$$

$$T_2(s) = J_2.s.\Omega_2(s) + T_L(s)$$

Logo:

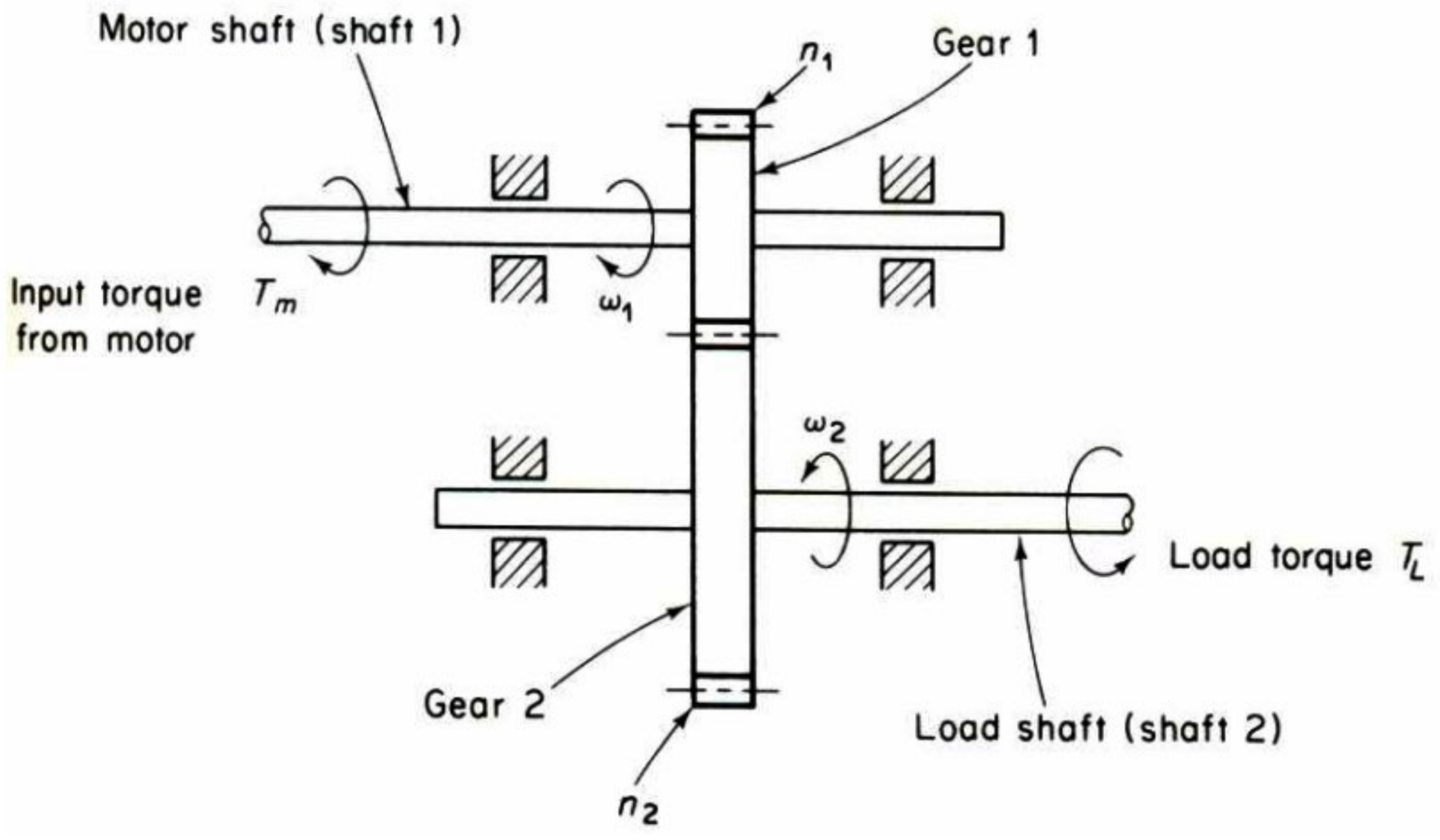
$$T_M(s) = J_1.s.\Omega_1(s) + \frac{\Omega_2(s)}{\Omega_1(s)} \left(J_2.s.\Omega_2(s) + T_L(s) \right)$$

Como:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} \quad \text{.............} \quad \frac{\Omega_2(s)}{\Omega_1(s)} = \frac{n_1}{n_2}$$

Assim:

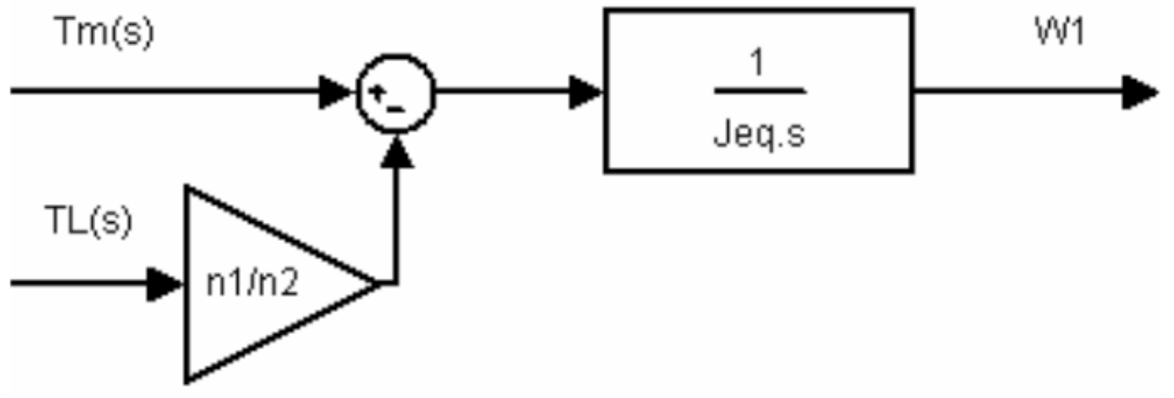
$$T_M(s) = J_1.s.\Omega_1(s) + \frac{n_1}{n_2} \left(J_2.s.\Omega_2(s) + T_L(s) \right)$$



- Em termos de velocidade no eixo 1:

$$T_M(s) = \left[J_1 + \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 .J_2 \right] .s.\Omega_1(s) + \left(\frac{n_1}{n_2} \right) .T_L(s)$$

$$\boxed{\left(T_M(s) - \left(\frac{n_1}{n_2} \right) .T_L(s) \right) . \frac{1}{J_{eq}.s} = \Omega_1(s)}$$



EXEMPLO: ELEMENTO AMPLIFICADORES/REDUTORES ROTACIONAL:

- Em termos de velocidade no eixo 1:

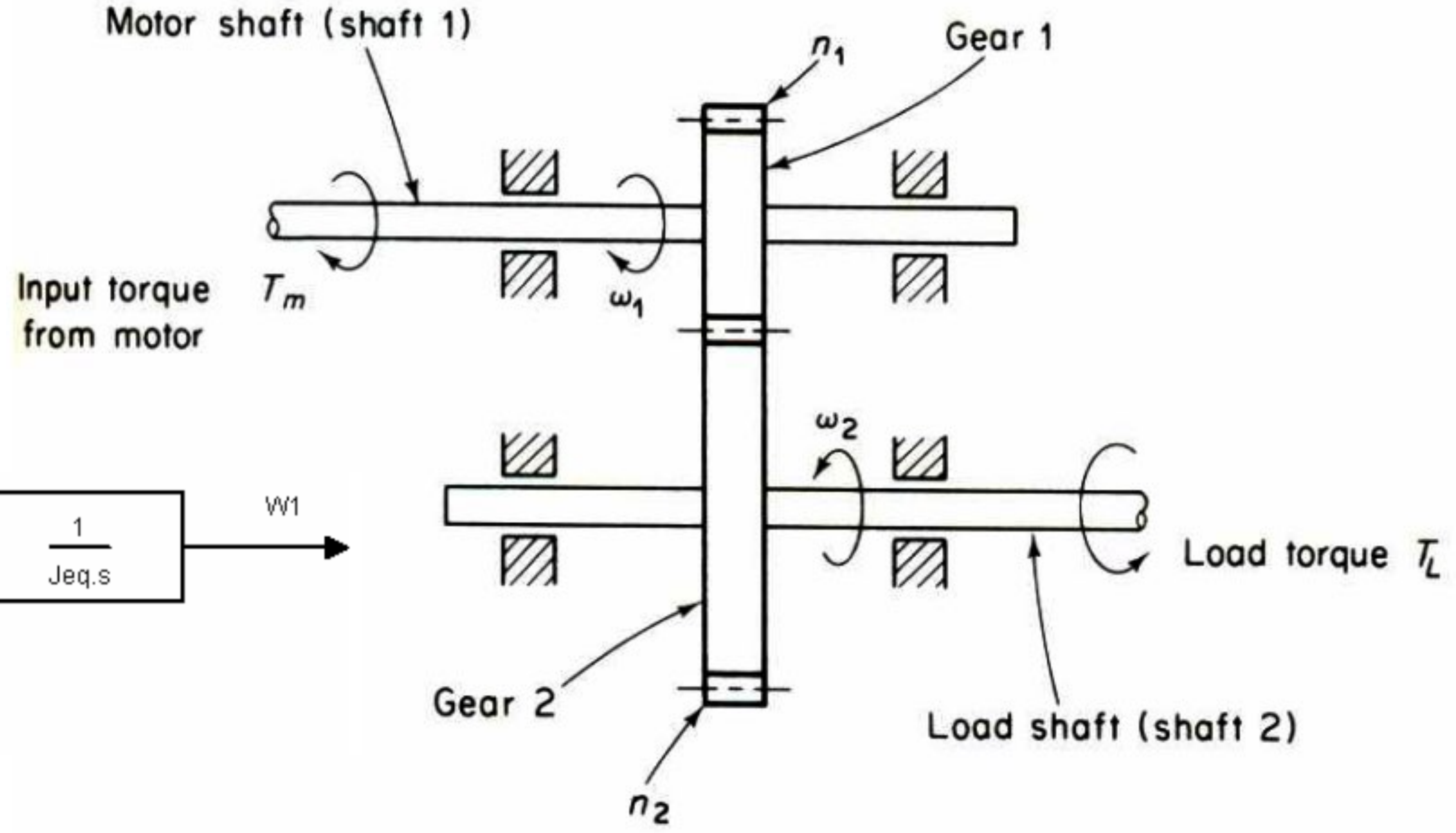
$$T_M(s) = \left[J_1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 .J_2\right].s.\Omega_1(s) + \left(\frac{n_1}{n_2}\right).T_L(s)$$

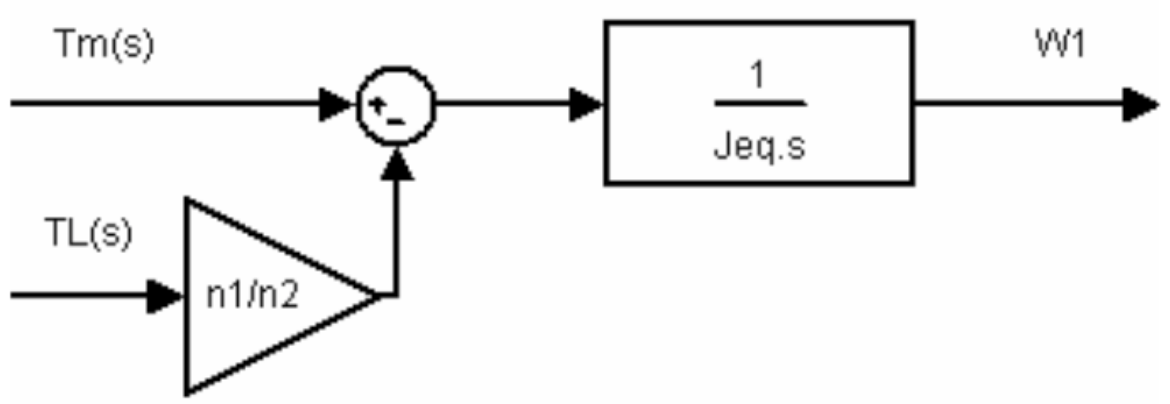
$$\boxed{\left(T_M(s) - \left(\frac{n_1}{n_2}\right).T_L(s)\right).\frac{1}{J_{eq}.s} = \Omega_1(s)}$$

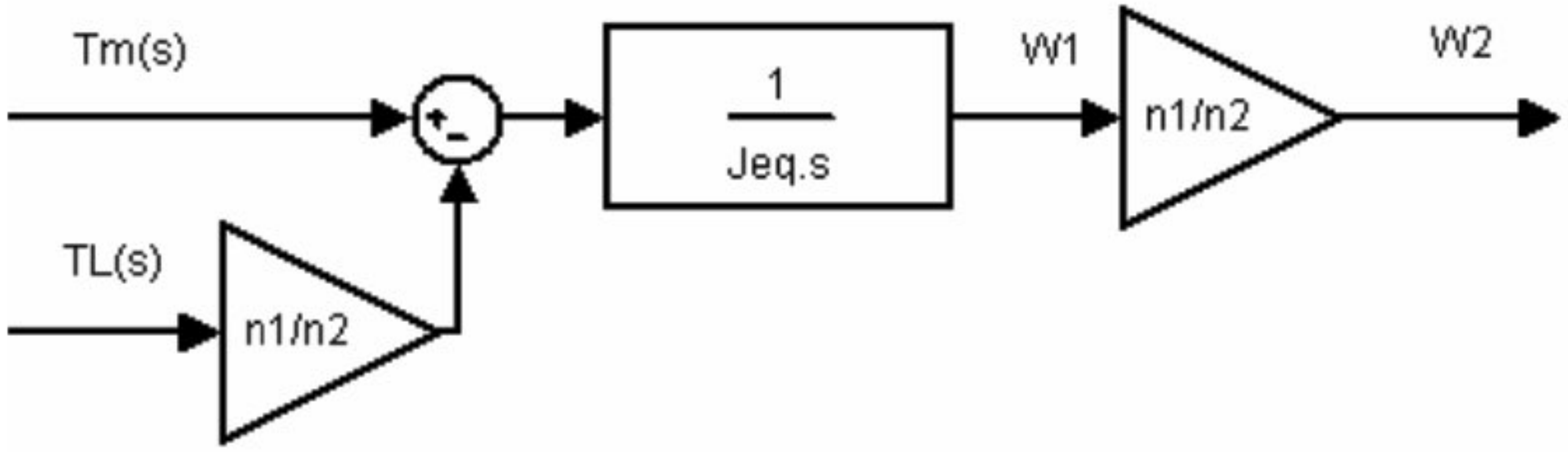
- Em termos de velocidade no eixo 2:

$$T_M(s) = \left[J_1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 .J_2\right].\frac{n_2}{n_1}.s.\Omega_2(s) + \left(\frac{n_1}{n_2}\right).T_L(s)$$

$$\boxed{\left(T_M(s) - \left(\frac{n_1}{n_2}\right).T_L(s)\right).\left(\frac{n_1}{n_2}\right).\frac{1}{J_{eq}.s} = \Omega_2(s)}$$



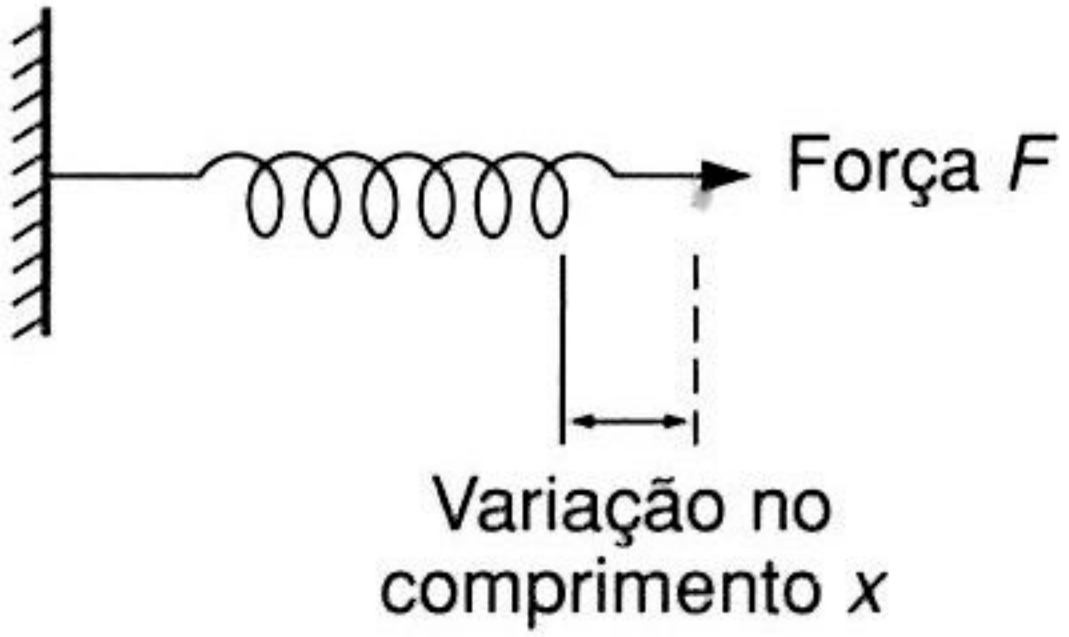




ENERGIA: ELEMENTOS TRANSLACIONAIS

- Se faz necessária energia para:
  - tracionar uma mola;
  - acelerar uma massa, e;
  - mover um pistão (amortecedor).

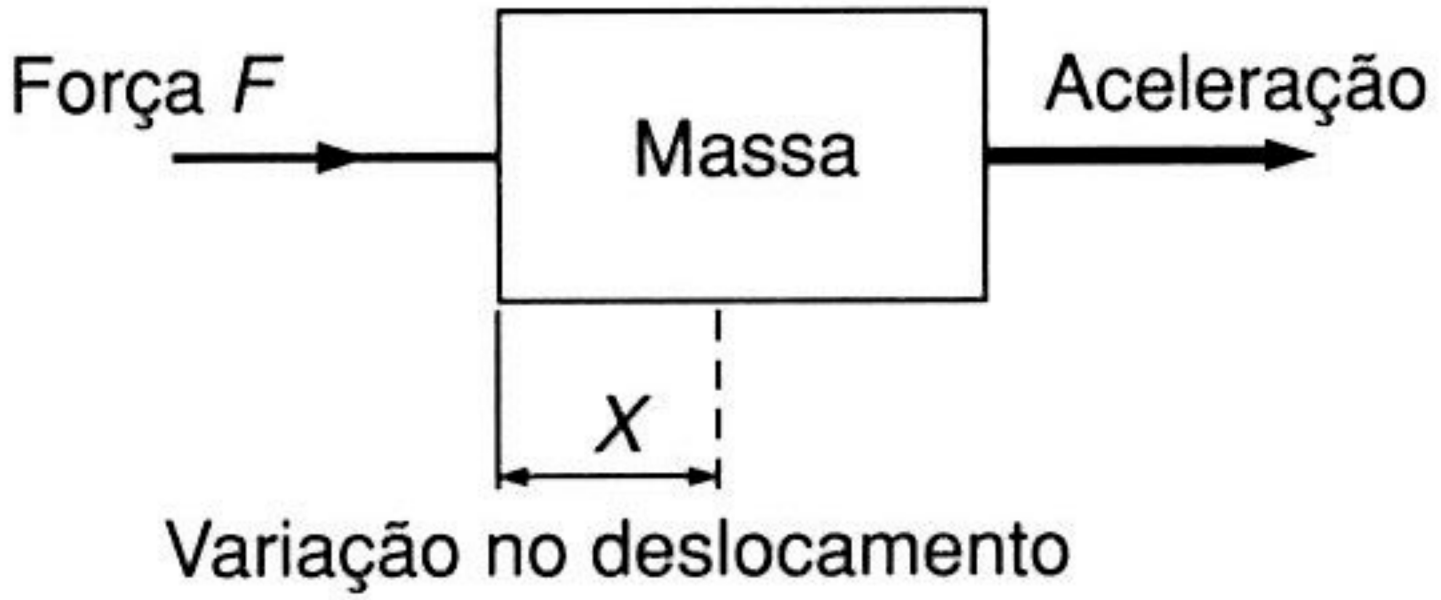
Mola:



$$F = k \cdot x$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$$

Massa:

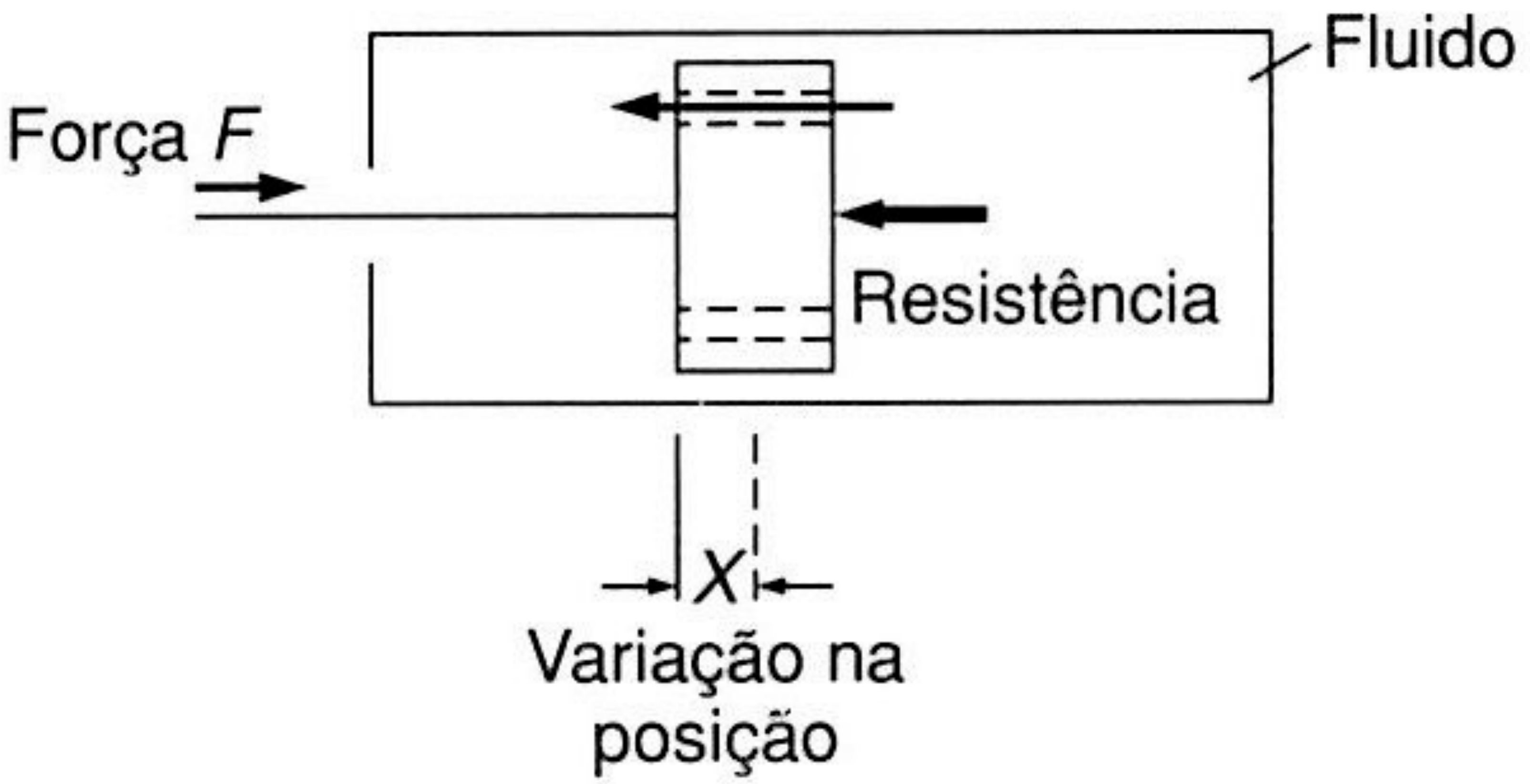


$$F = m \cdot \ddot{x}$$

$$E = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$$

- No caso de uma mola e uma massa, podemos recuperar a energia, mas no caso do amortecedor, não (amortecedor dissipa energia).
- A **mola** quando tracionada, **armazena energia**, que é liberada quando a mola retorna ao seu comprimento original.
- No caso de uma **massa**, existe **energia armazenada** quando ela se move com velocidade não nula (energia esta chama de energia cinética). É liberada quando o movimento cessa.

Amortecedor:

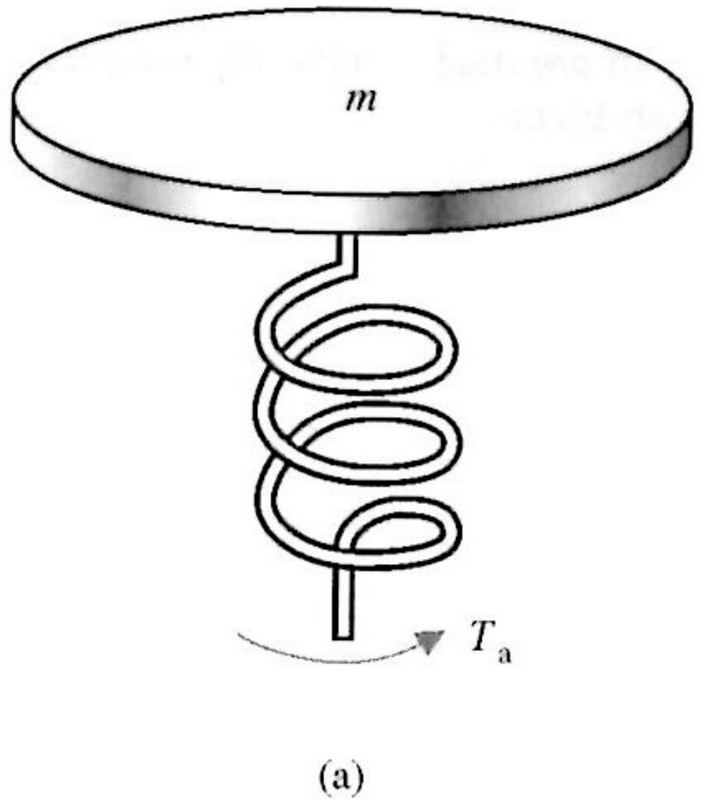


$$F = c \cdot \dot{x}$$

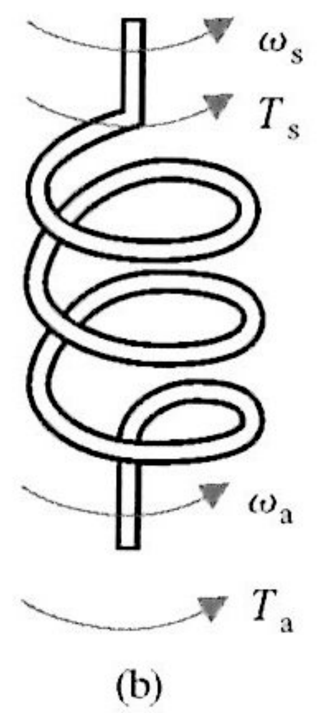
$$P = c \cdot \dot{x}^2$$

ENERGIA: ELEMENTOS ROTACIONAIS

- A mola torcional e a massa rotativa armazenam energia;
- O amortecedor rotativo dissipa energia.
- A **energia armazenada** em uma **mola torcional** quando gira de um ângulo θ envolve:
  Torque aplicado: $T = k \cdot \theta$
  Energia envolvida: $E = \dfrac{1}{2} k\,\theta^2$ ou $E = \dfrac{1}{2}\dfrac{T^2}{k}$.
- A **energia armazenada** por uma **massa rotativa** com uma velocidade angular ω envolve:
  Torque aplicado: $T = I \cdot \dot{\omega} = I \cdot \ddot{\theta}$ (quanto maior a inércia $\Rightarrow$ maior torque necessário para provocar uma aceleração angular).
  Energia envolvida: $E = \dfrac{1}{2} I\,\omega^2 = \dfrac{1}{2} I\,\ddot{\theta}^2$.
- A **energia dissipada** por um **amortecedor rotativo** quando está em operação com uma velocidade ω envolve:
  $T = c \cdot \omega = c\dot{\theta};\qquad T = I \cdot \dot{\omega} = I \cdot \ddot{\theta};\qquad P = c\,\omega^2 = c\,\ddot{\theta}^2$

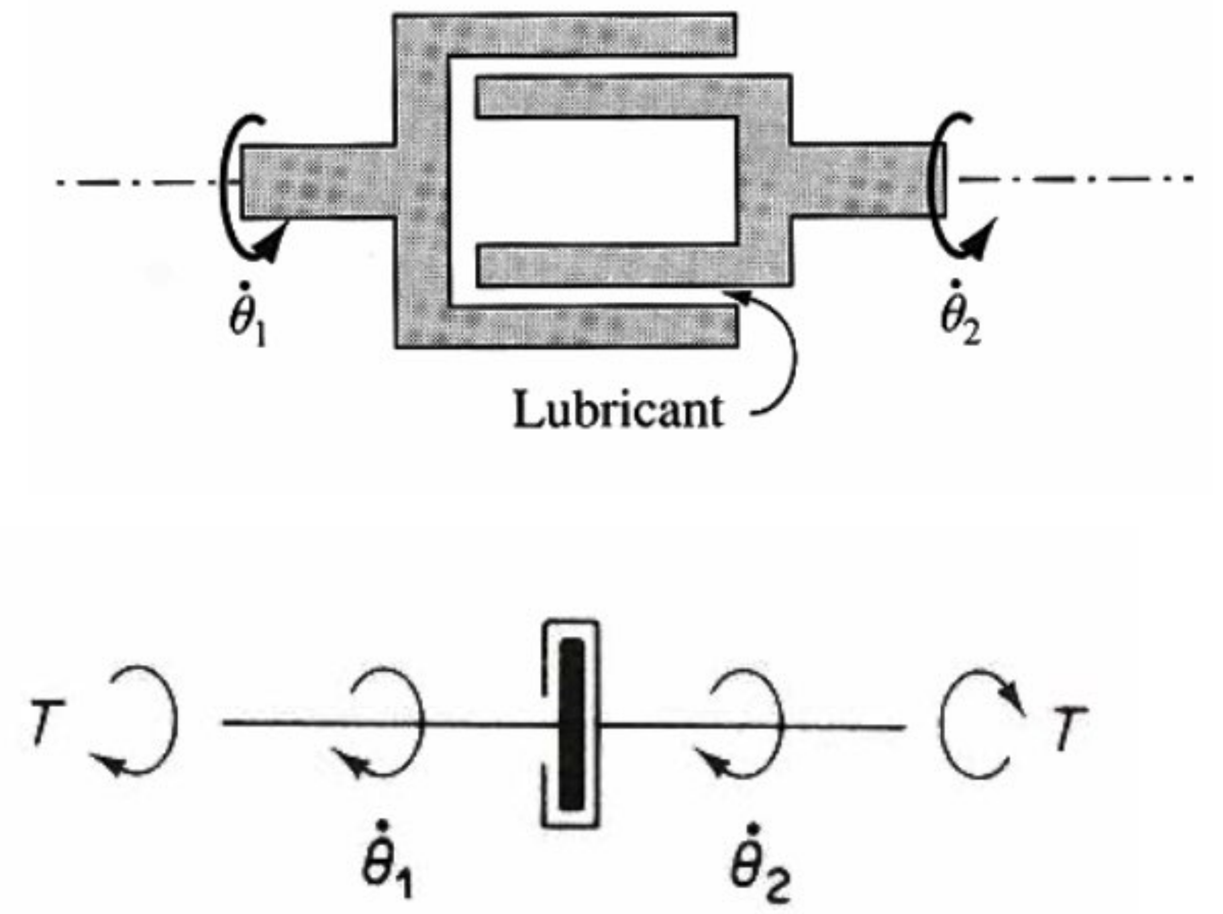


Sistema de torção massa-mola.



Sistema de torção, mola.

Mola torcional (armazena energia).



Amortecedor torcional (dissipa energia).

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

	Unidade	Símbolo	Variável
Comprimento	Metro	m	x
Massa	Quilograma	Kg	m
Tempo	Segundo	s	t
Temperatura	Kelvin	K	
Corrente elétrica	Ampère	A	i
Velocidade	Metros por segundo	m/s	$v = \dot{x}$
Área	Metro quadrado	m^2	
Força	Newton	$N=Kg.m/s^2$	F
Torque	Quilogrâmetro	kg.m	T
Pressão	Pascal	Pa	
Energia	Joule	J=N.m	E
Potência	Watt	W=J/s	P

Ref.: [Cap. 2: Modelos Matemáticos de Sistemas] in Dorf, Richard C.; Bishop, Robert H.; Sistemas de Controle Modernos, 8a-ed, LTC, 2001.

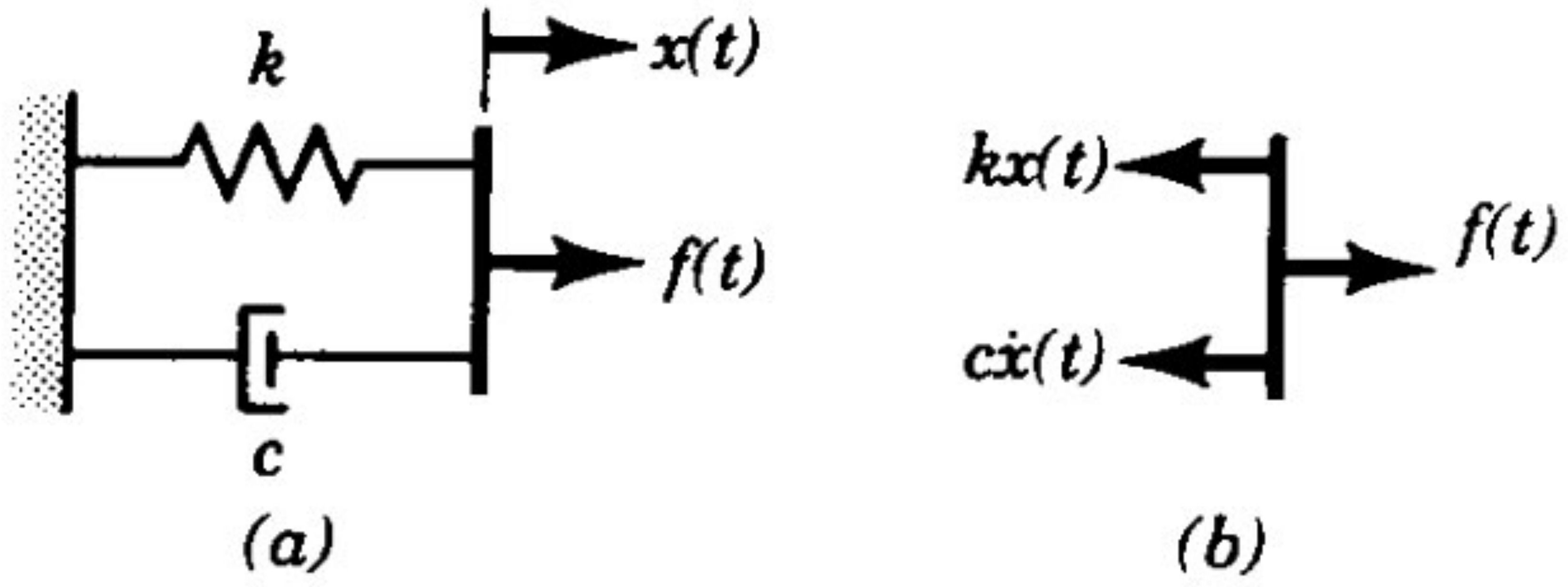
RESUMO EQUAÇÕES BLOCOS MECÂNICOS

Bloco	Equação	Energia Armazenada/Potência Dissipada	
Mola translacional	$F = k\,x$	$E = \dfrac{1}{2}\dfrac{F^2}{k}$	*Armazenamento de energia*
Mola torcional	$T = k\,\theta$	$E = \dfrac{1}{2}\dfrac{T^2}{k}$	
Massa	$F = m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = m\,\ddot{x}$	$E = \dfrac{1}{2}m\,v^2 = \dfrac{m\ddot{x}}{2}$	
Momento de Inércia	$T = I\,\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = I\ddot{\theta}$	$E = \dfrac{1}{2}I\,\omega^2 = \dfrac{1}{2}I\,\ddot{\theta}^2$	
Amortecimento translacional	$F = c\,\dfrac{dx}{dt} = c\,\dot{x}$	$P = c\,v^2 = c\,\ddot{x}$	*Dissipação de energia*
Amortecimento rotacional	$T = c\,\dfrac{d\theta}{dt} = c\,\dot{\theta}$	$P = c\,\omega^2 = c\,\ddot{\theta}^2$	

Ref.: [Cap. 2: Modelos de Sistemas] in Bolton, W.; Engenharia de Controle, Makron Books do Brasil, 1995.

MODELANDO SISTEMAS

- **Ex_1**: Sistema mola-amortecedor em paralelo (fig (a)).
- fig (b): diagrama do corpo livre: a barra (sistema) é considerado sem massa e sobre a qual atuam as forças externas: de excitação $f(t)$, a força da mola ($k \cdot x(t)$) e a força do atrito (amortecedor) viscoso ($c \cdot \dot{x}(t)$).



- Sistema de apenas 1 grau de liberdade: a coordenada $x(t)$ é suficiente para descrever a dinâmica do sistema.
- Aplicando a 2a-lei de Newton, temos:

$$\sum F_x = m\ddot{x} = 0$$

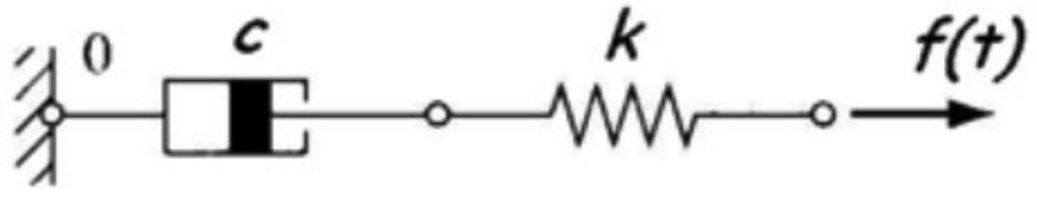
$$f(t) - c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$$

$$c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = f(t)$$

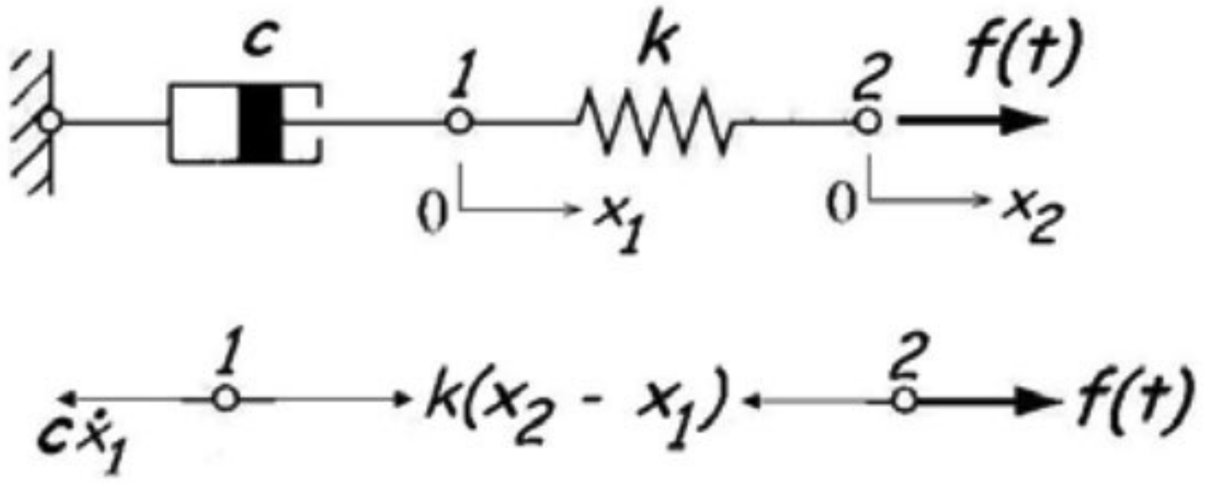
MODELANDO SISTEMAS

- **Ex_2**: Sistema mola-amortecedor em série (fig (a)).
- Agora temos um sistema com 2 graus de liberdade, pois são necessárias 2 coordenadas para descrever o movimento do mesmo: x_1 para o ponto situado entre o amortecedor e a mola; e x_2 para o ponto de aplicação da força $f(t)$
- fig (b): diagrama do corpo livre (foi considerado que $x_2 > x_1$).
- Aplicando a 2a-lei de Newton no ponto (nó) 1:
  $\sum F_{x_1} = m_1 \ddot{x}_1 = 0 \qquad \Leftarrow$ pois: $m_1 = 0$
  $k\left(x_2 - x_1\right) - c \cdot \dot{x}_1 = 0$
- Aplicando 2a-lei de Newton no ponto (nó) 2:
  $\sum F_{x_2} = m_2 \cdot \ddot{x}_2 = 0 \qquad \Leftarrow$ pois: $m_2 = 0$
  $f(t) - k\left(x_2 - x_1\right) = 0$
- Modelo matemático completo:
  $c \cdot \dot{x}_1 + k \cdot x_1 - k \cdot x_2 = 0$
  $-k \cdot x_1 + k \cdot x_2 = f(t)$
- Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

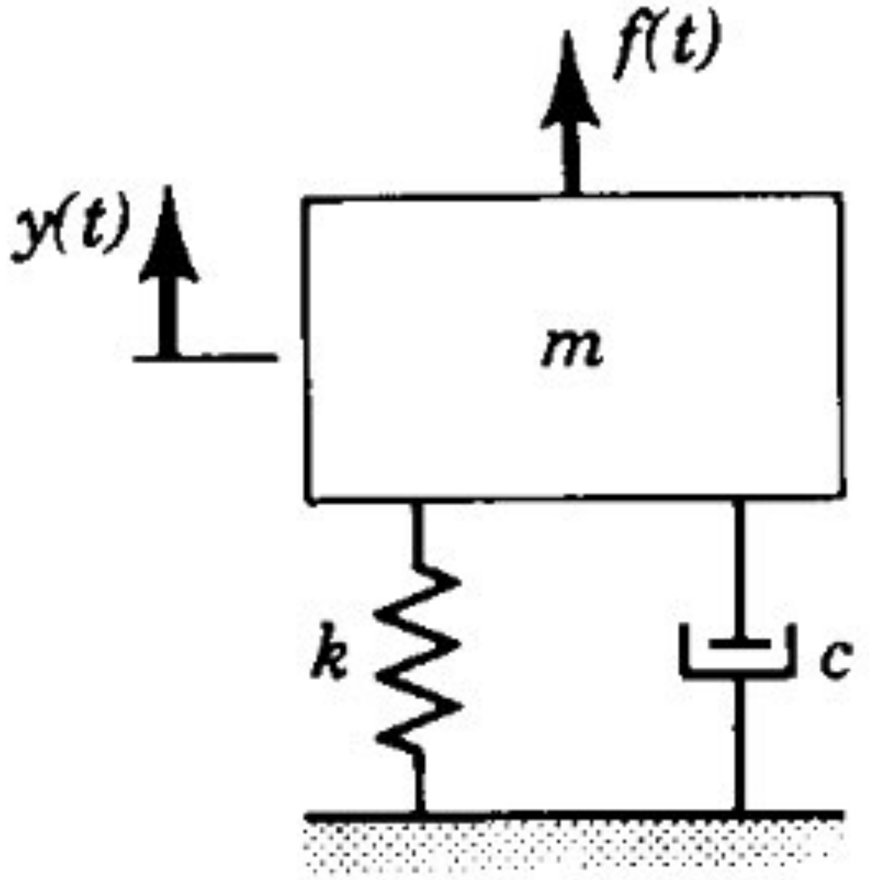


(a)

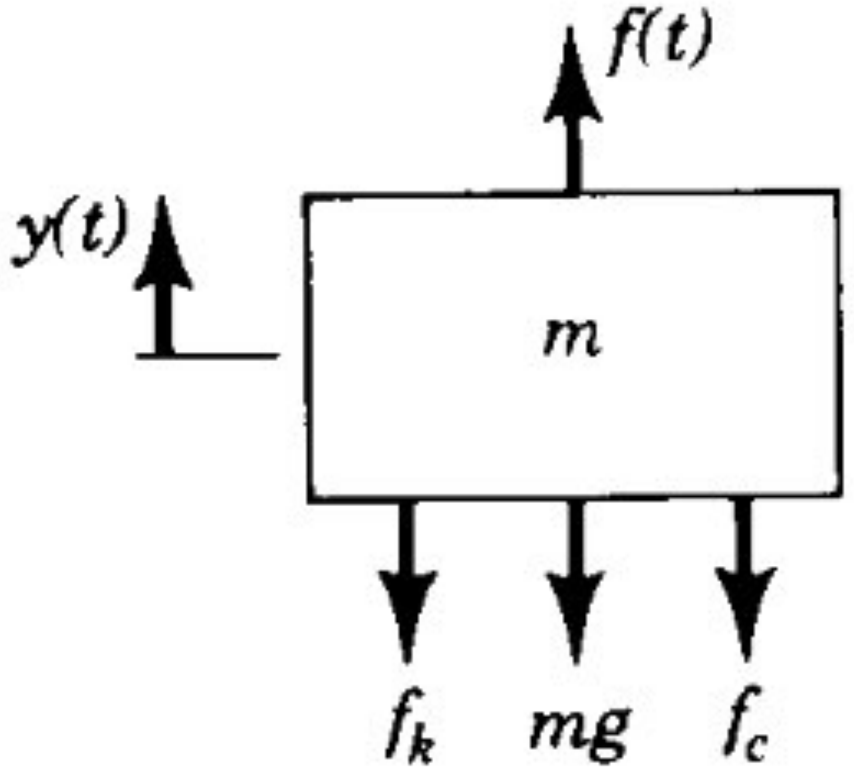


(b)

MODELANDO SISTEMAS



(a)



(b)

- **Ex_3**: Sistema massa-mola-amortecedor com 1 grau de liberdade: fig(a).
- Fig (b): diagrama do corpo livre.
- Onde $y(t)$ = deslocamento vertical da massa m a partir da posição em que a mola não está deformada (ou seja, antes da montagem da massa m no sistema).
- Aplicando 2a-Lei de Newton:

$$\sum F_y = t(t) - f_c(t) - f_k(t) - m \cdot g = m \cdot \ddot{y}(t)$$
$$f_m = m \cdot \ddot{y}$$
$$f_c = c\left(\dot{y}_2 - \dot{y}_1\right)$$
$$f_k = k\left(y_2 - y_1\right)$$

juntando:

$$m \cdot \ddot{y}(t) + c \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) + m \cdot g = f(t)$$

- Considerando que a deflexão da mola equilibra o sistema (fig (c)).

$$m \cdot g = k \cdot \delta_{est}$$

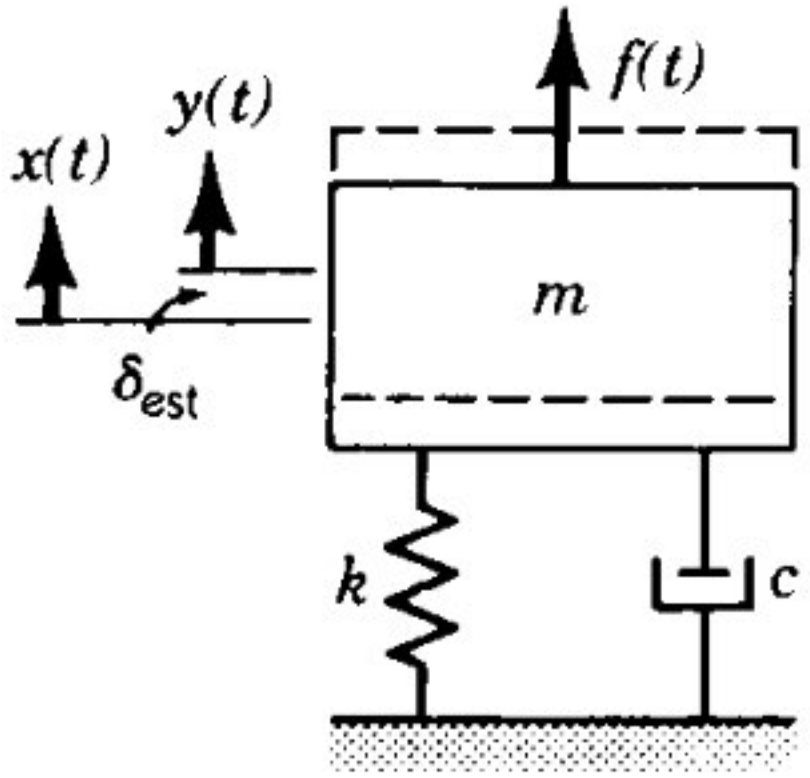
onde δ_{est} = valor deflexão estática.

- Podemos ainda fazer:

$$y(t) = x(t) - \delta_{est}$$

- E por fim obtemos:

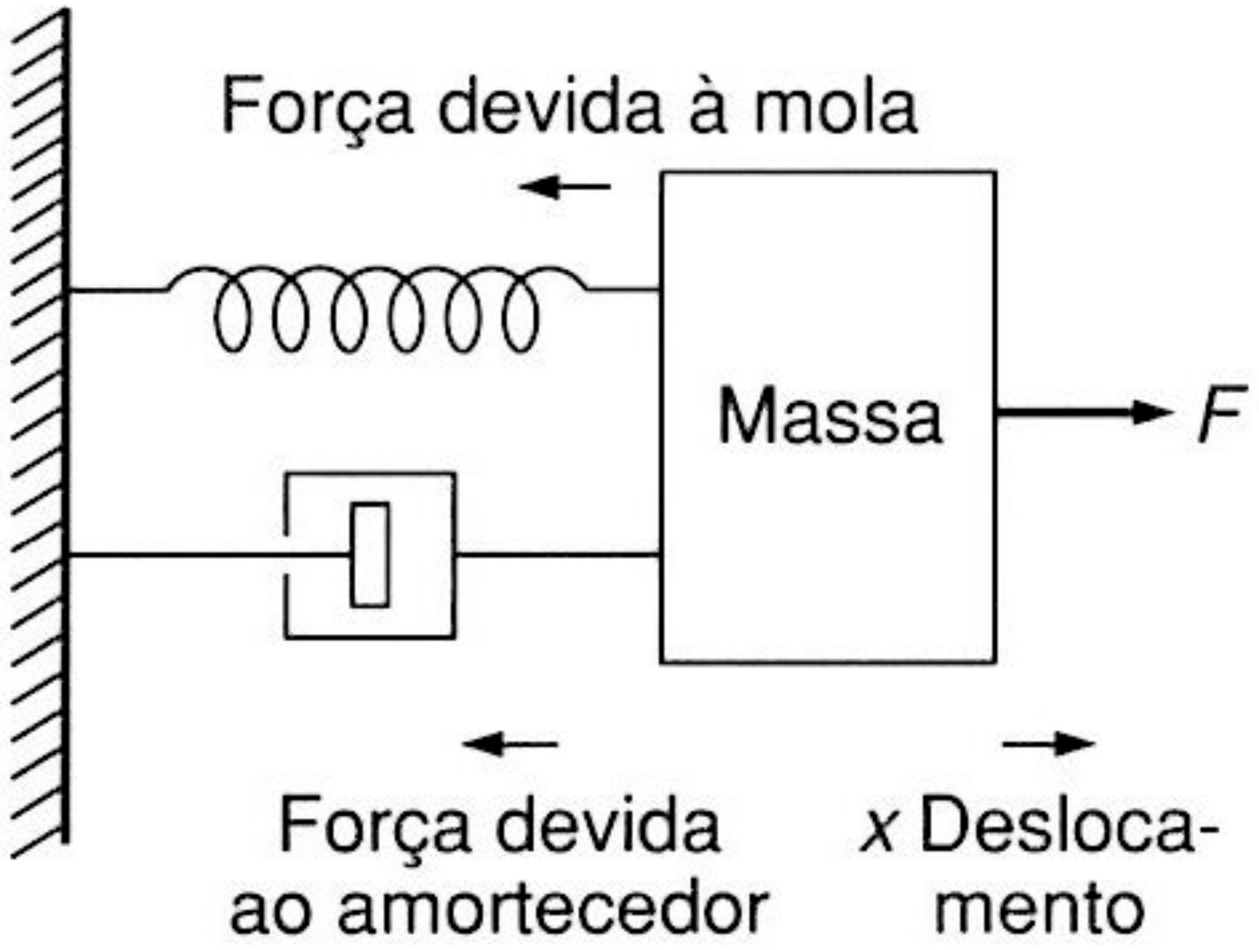
$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = f(t)$$

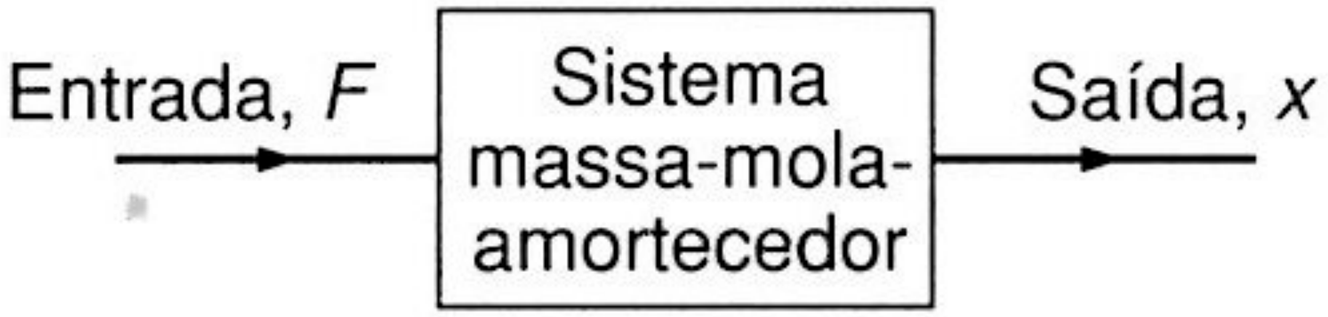


(c)

MODELANDO SISTEMAS MECÂNICOS

- **Ex_4**: Outro sistema massa-mola-amortecedor como mostra a figura ao lado:
- Para determinar a relação entre a força e o deslocamento do sistema, devemos considerar somente uma massa e uma força agindo sobre o corpo.
- Um diagrama de massa e forças é chamado de **diagrama do corpo livre**.
- Quando várias forças agem sobre um corpo simultaneamente, a resultante pode ser determinada pela soma de vetores.
- No caso da figura anterior: o conjunto de forças aplicada à massa é a força aplicada F menos a força resultante da tração ou compressão de um mola, e menos a força do amortecedor:
  $F_r = F - kx - cv$
  $F_r = F - kx - c\dot{x}$
- Esse conjunto de forças é a força aplicada à massa que provoca a aceleração:
  $F_r = ma = m\ddot{x}$
- Assim:
  $F - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$
  $F = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx$ $\leftarrow$ Eq. Diferencial que descreve relação entre Força F, e deslocamento de saída x.

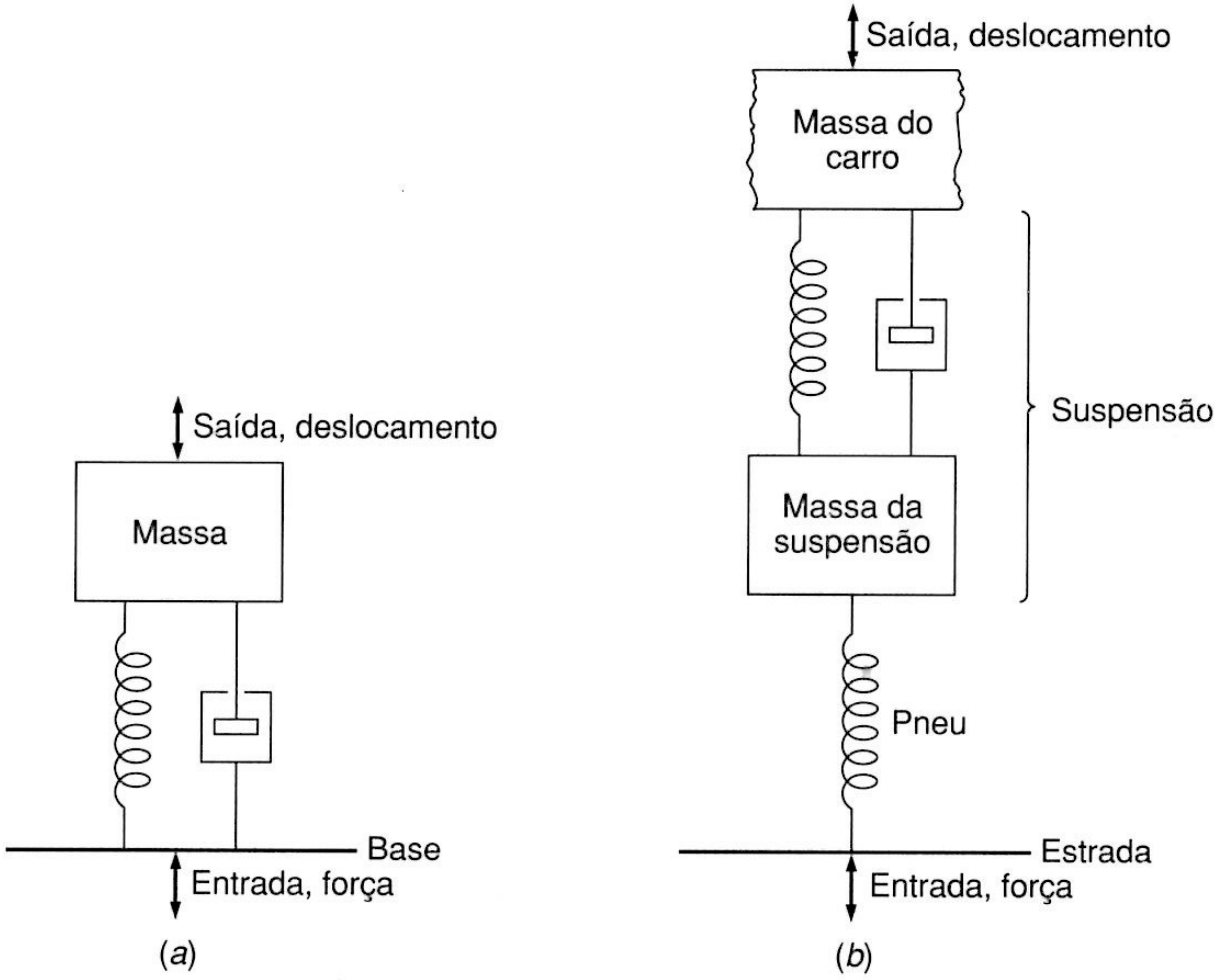




Bloco	Equação
Mola translacional	$F = k\,x$
Mola torcional	$T = k\,\theta$
Massa	$F = m\dfrac{d^2x}{dt^2} = m\,\ddot{x}$
Momento de Inércia	$T = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = I\ddot{\theta}$
Amortecimento translacional	$F = c\dfrac{dx}{dt} = c\,\dot{x}$
Amortecimento rotacional	$T = c\dfrac{d\theta}{dt} = c\,\dot{\theta}$

MODELANDO SISTEMAS MECÂNICOS

- **Ex_5**: Sejam os sistemas da fig. ao lado:
  (a) uma máquina montada no chão, e;
  (b) um carro movendo-se ao longo de uma estrada.



A figura (a) serve de base para estudar os efeitos de distúrbios gerados pela montagem da máquina nos deslocamentos da máquina.

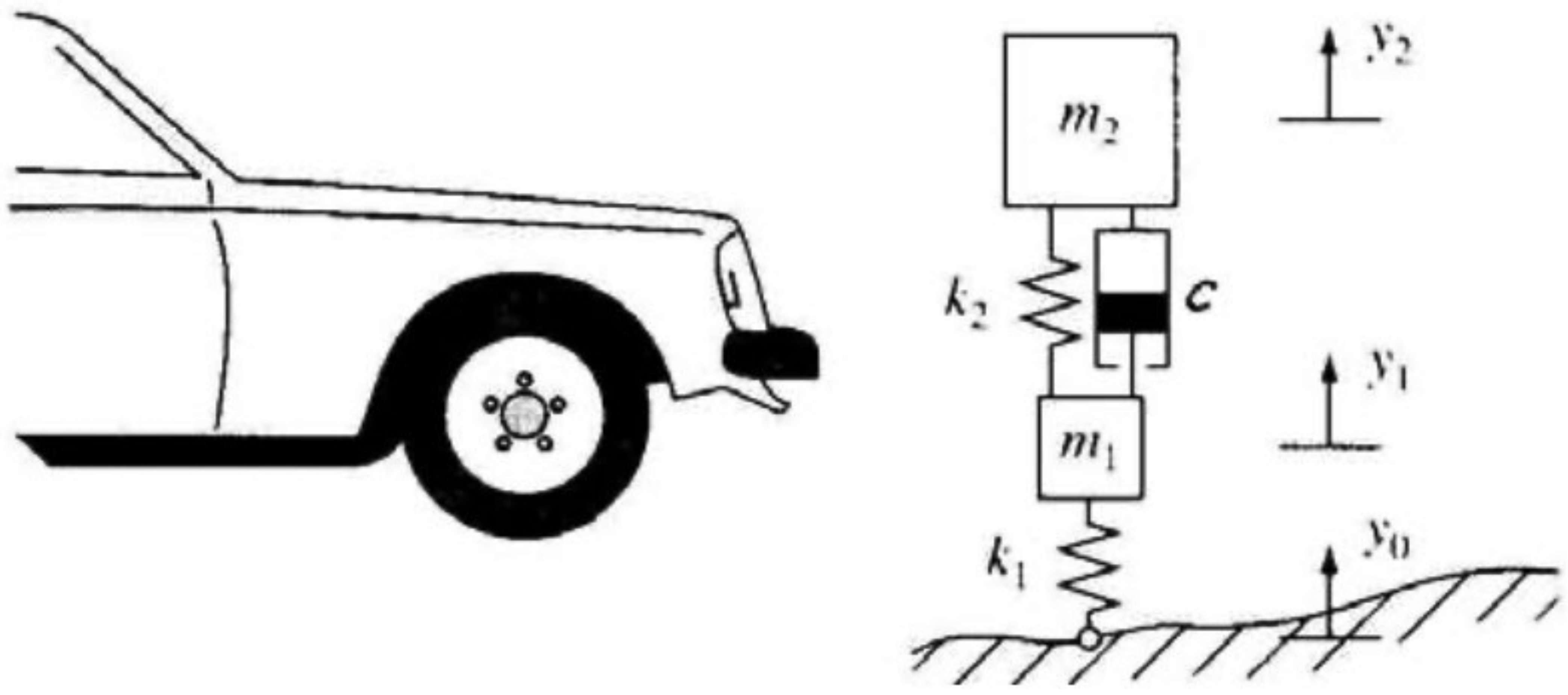
A figura (b) pode ser usado para o estudo do comportamento esperado do veículo quando conduzido numa estrada irregular, servindo como base para o projeto da suspensão do carro.

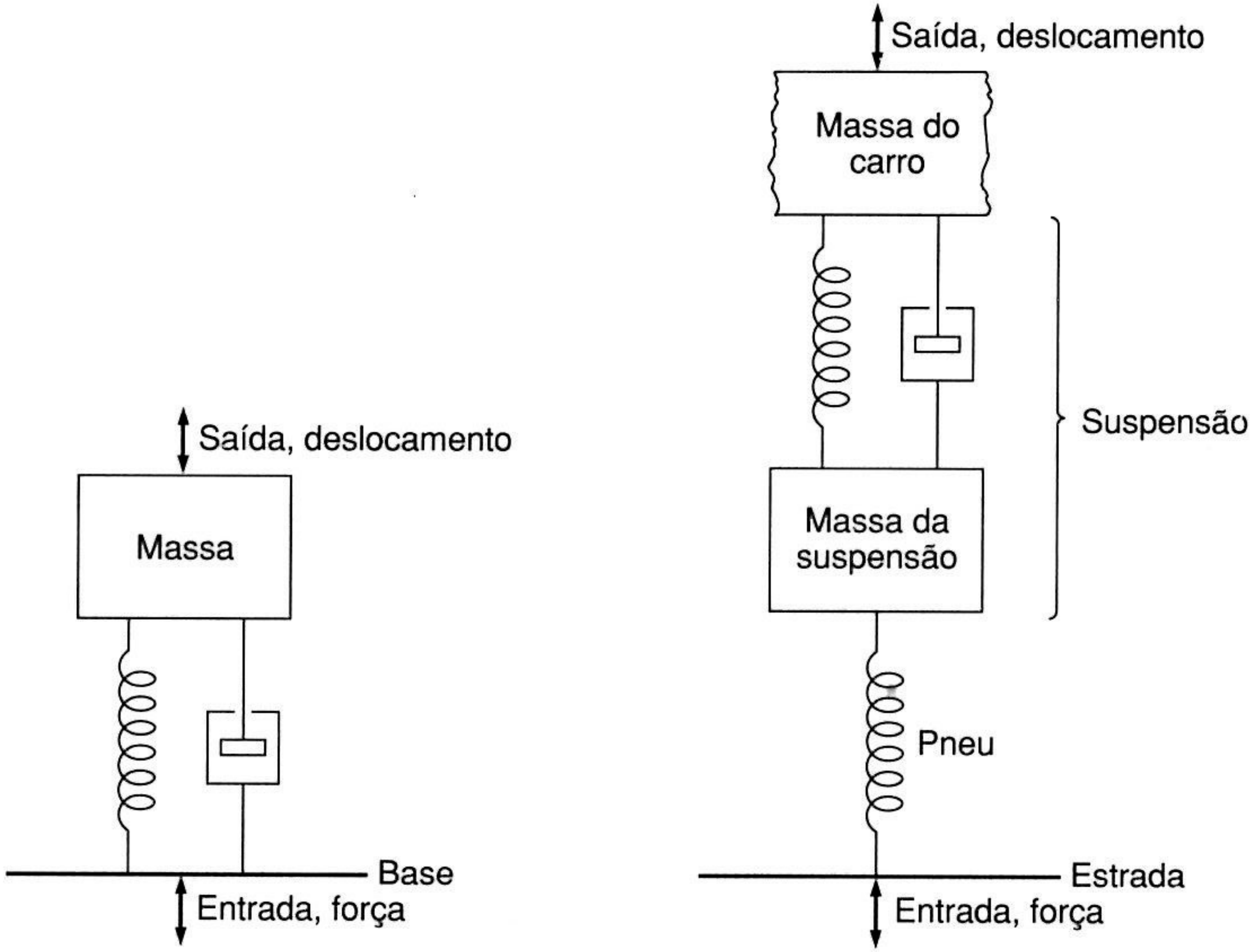
O procedimento adotado para análise de tais modelos é o mesmo esboçado anteriormente.

Um diagrama de corpo livre é desenhado para cada massa no sistema; tal diagrama mostra cada massa independentemente e as forças que agem sobre elas. Então, a resultante das forças que agem em cada massa é igual ao produto da massa pela aceleração.

MODELANDO SISTEMAS MECÂNICOS

➤ **Ex_6**: Suspensão de um veículo.



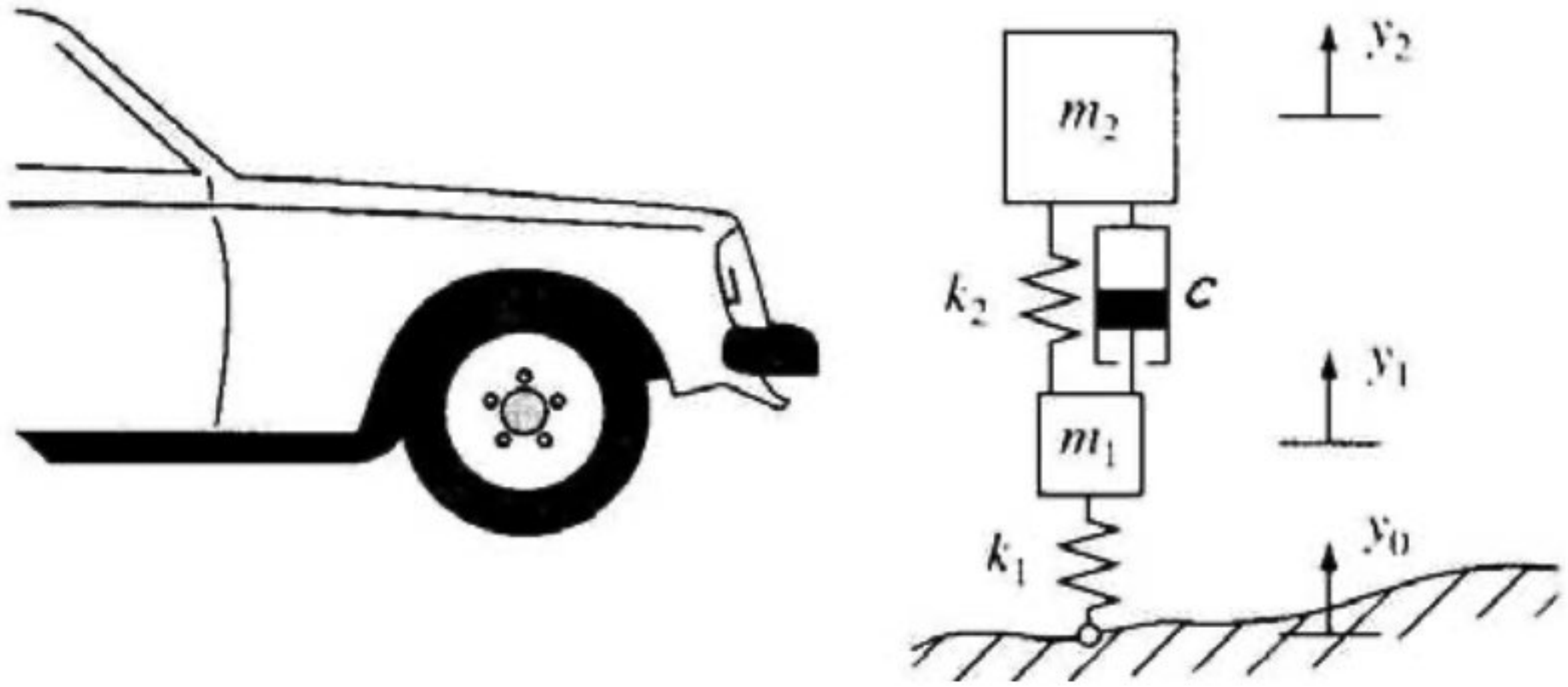


(*a*) (*b*)

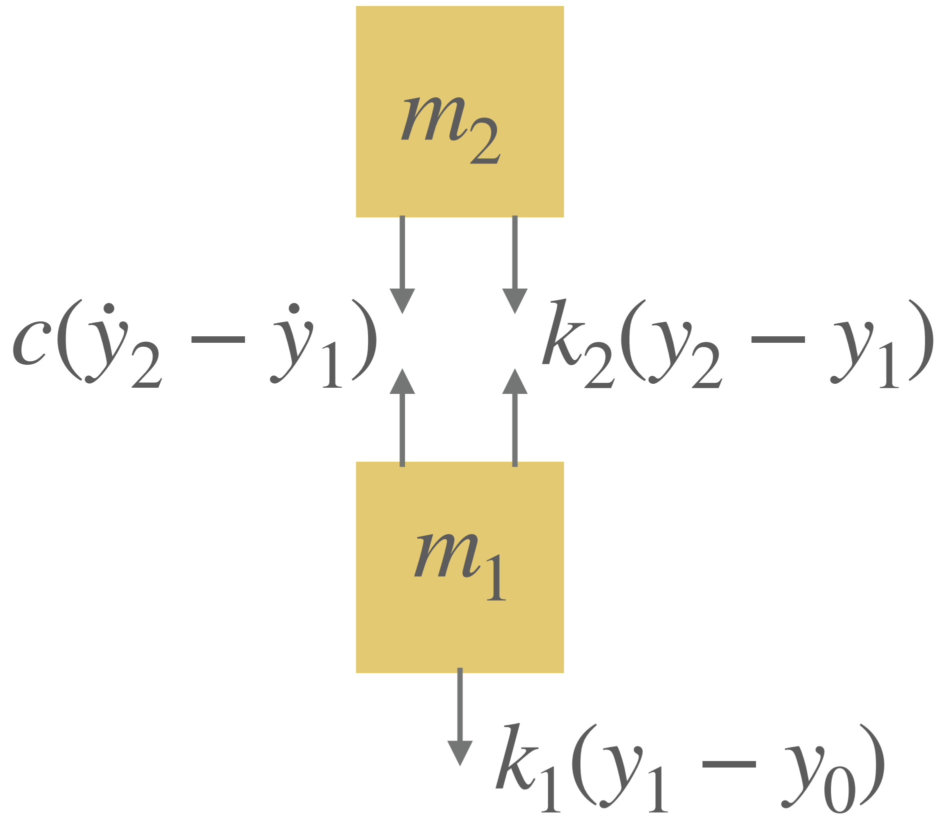
Comentários:

A rigidez do pneu é modelada pela mola k_1. As massas do pneu, roda, eixo e demais peças não suspensas, são modeladas pela massa m_1. O coeficiente de amortecimento do amortecedor viscoso e a rigidez da mola da suspensão são modelados, respectivamente, por c e k_2. Já a massa suspensa distribuída àquele 1/4 de suspensão é modelada pela massa m_2. Foram adotadas as coordenadas y_1 e y_2, medidas a partir da posição de equilíbrio estático do sistema, para descreverem os movimentos das massas m_1 e m_2, respectivamente. A coordenada y_0 servirá para descrever o movimento do solo, devido às irregularidades do terreno.

MODELANDO SISTEMAS MECÂNICOS



- **Ex_6**: Suspensão de um veículo.
- Diagrama do corpo livre:



- Aplicando 2a-lei de Newton à massa 1:

$$\sum F_{y_1} = m_1 \cdot \ddot{y}_1$$

$$-k_1(y_1 - y_0) + k_2(y_2 - y_1) + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = m_1\ddot{y}_1$$

- Aplicando 2a-lei de Newton à massa 2:

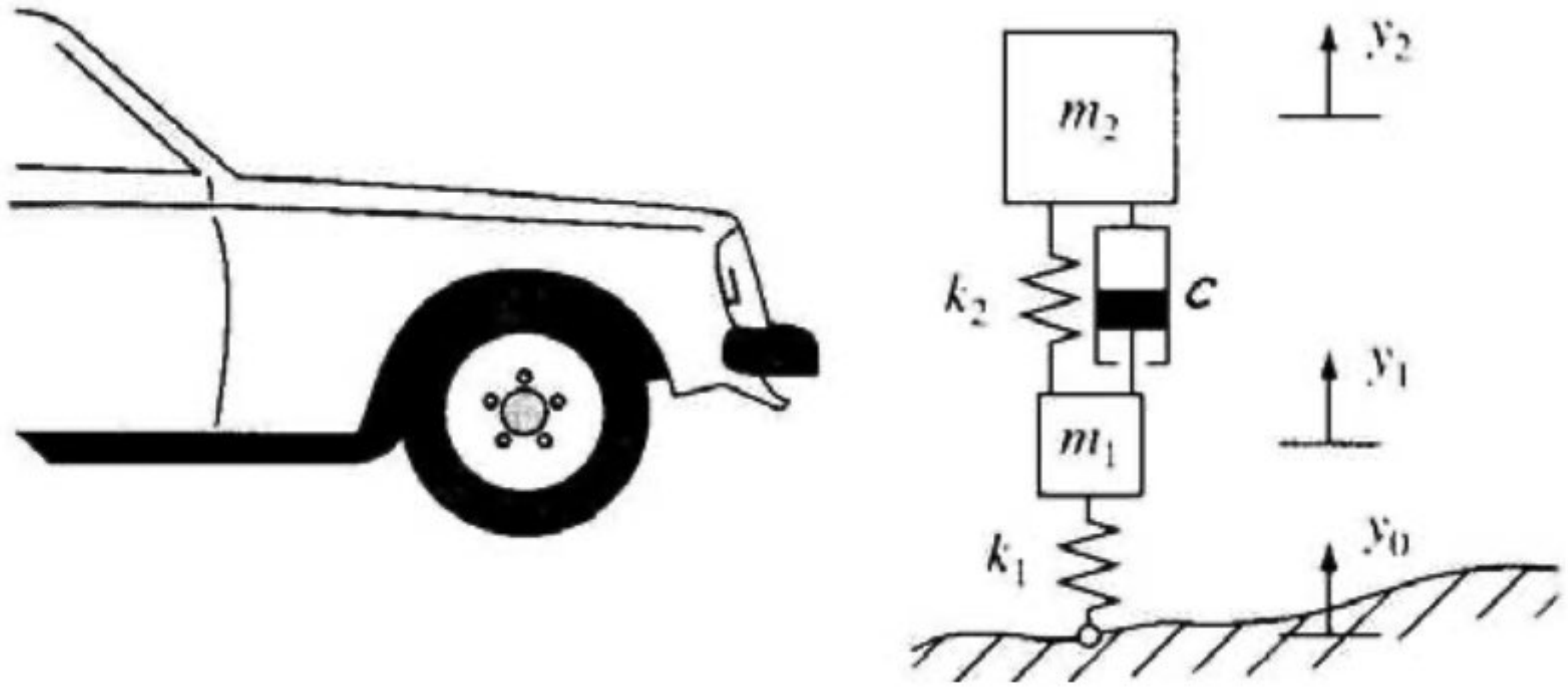
$$\sum F_{y_2} = m_2 \cdot \ddot{y}_2$$

$$-k_2(y_2 - y_1) - c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = m_2\ddot{y}_2$$

Comentários:

A rigidez do pneu é modelada pela mola k_1. As massas do pneu, roda, eixo e demais peças não suspensas, são modeladas pela massa m_1. O coeficiente de amortecimento do amortecedor viscoso e a rigidez da mola da suspensão são modelados, respectivamente, por c e k_2. Já a massa suspensa distribuída àquele 1/4 de suspensão é modelada pela massa m_2. Foram adotadas as coordenadas y_1 e y_2, medidas a partir da posição de equilíbrio estático do sistema, para descreverem os movimentos das massas m_1 e m_2, respectivamente. A coordenada y_0 servirá para descrever o movimento do solo, devido às irregularidades do terreno.

MODELANDO SISTEMAS MECÂNICOS



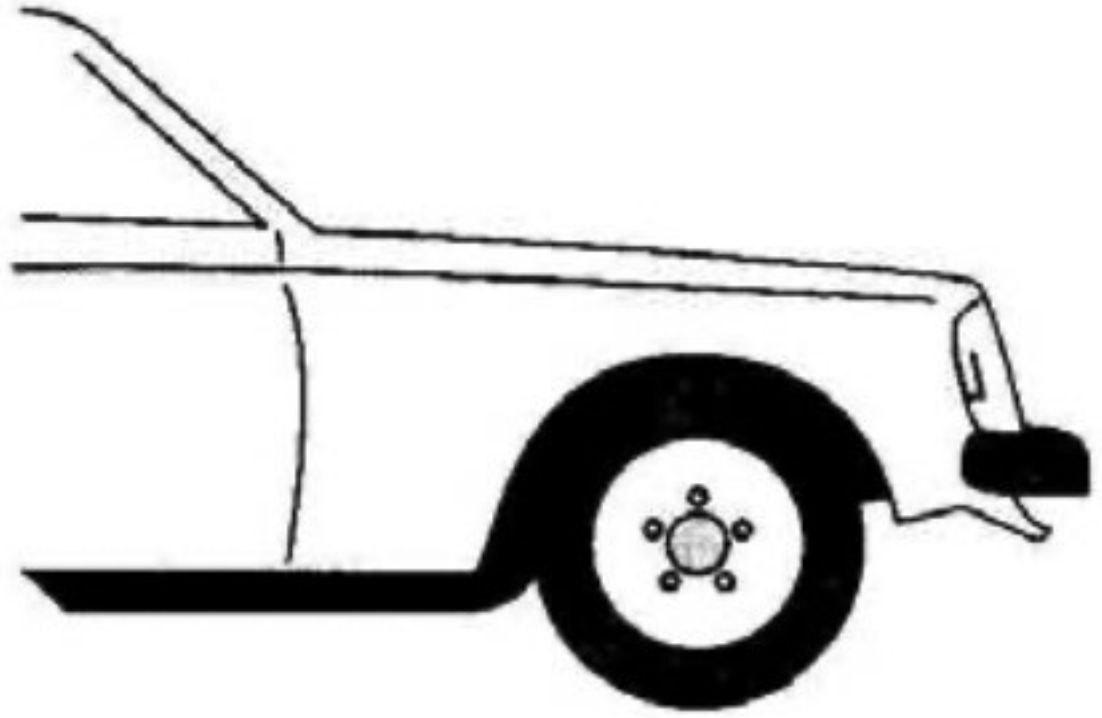
- **Ex_6**: Suspensão de um veículo.
- Aplicando 2a-lei de Newton à massa 1:
  $$\sum F_{y_1} = m_1 \cdot \ddot{y}_1$$
  $$-k_1(y_1 - y_0) + k_2(y_2 - y_1) + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = m_1\ddot{y}_1$$
- Aplicando 2a-lei de Newton à massa 2:
  $$\sum F_{y_2} = m_2 \cdot \ddot{y}_2$$
  $$-k_2(y_2 - y_1) - c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = m_2\ddot{y}_2$$
- Juntando as equações (formando um sistema de equações):
  $$m_1\ddot{y}_1 + c\dot{y}_1 - c\dot{y}_2 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2y_2 = k_1y_0$$
  $$m_2\ddot{y}_2 - c\dot{y}_1 + c\dot{y}_2 - k_2y_1 + k_2y_2 = 0$$

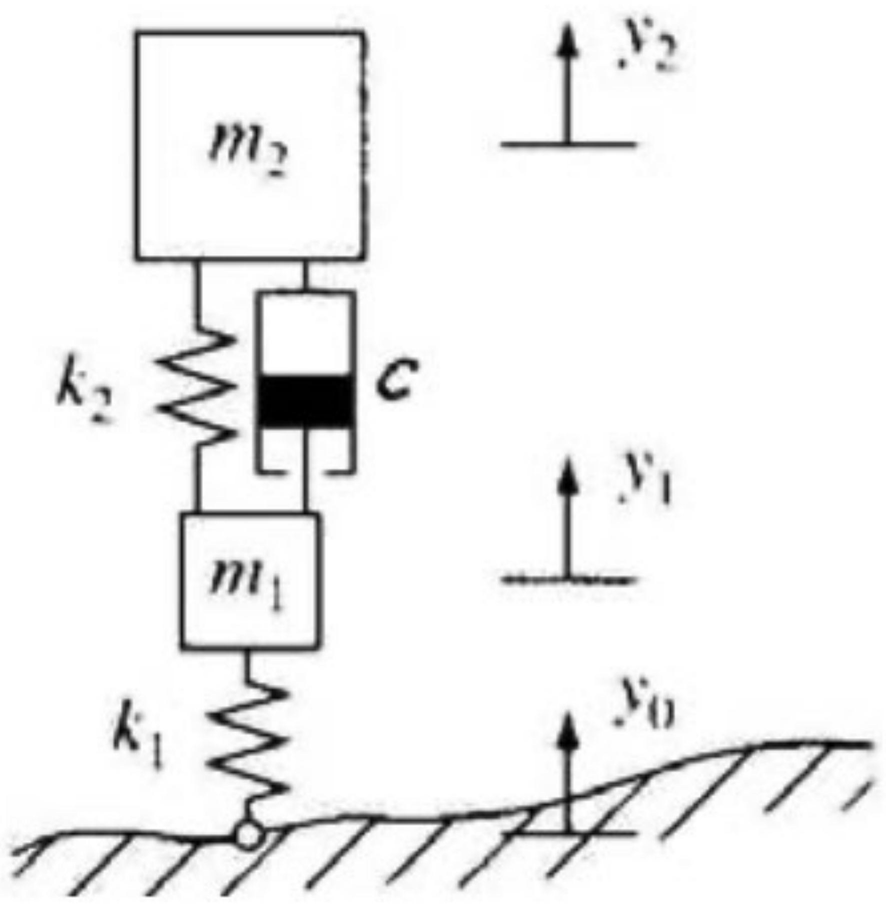
Comentários:
A rigidez do pneu é modelada pela mola k_1. As massas do pneu, roda, eixo e demais peças não suspensas, são modeladas pela massa m_1. O coeficiente de amortecimento do amortecedor viscoso e a rigidez da mola da suspensão são modelados, respectivamente, por c e k_2. Já a massa suspensa distribuída àquele 1/4 de suspensão é modelada pela massa m_2. Foram adotadas as coordenadas y_1 e y_2, medidas a partir da posição de equilíbrio estático do sistema, para descreverem os movimentos das massas m_1 e m_2, respectivamente. A coordenada y_0 servirá para descrever o movimento do solo, devido às irregularidades do terreno.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = k_1 \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MODELANDO SISTEMAS MECÂNICOS

➤ **Ex_6**: Suspensão de um veículo:





$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = k_1 \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vetor excitação (entrada)

Vetor deslocamento (saída)

Matriz rigidez

Vetor velocidade

Matriz amortecimento

Vetor aceleração

Matriz massa (ou inércia)

Comentários:

A rigidez do pneu é modelada pela mola k_1. As massas do pneu, roda, eixo e demais peças não suspensas, são modeladas pela massa m_1. O coeficiente de amortecimento do amortecedor viscoso e a rigidez da mola da suspensão são modelados, respectivamente, por c e k_2. Já a massa suspensa distribuída àquele 1/4 de suspensão é modelada pela massa m_2. Foram adotadas as coordenadas y_1 e y_2, medidas a partir da posição de equilíbrio estático do sistema, para descreverem os movimentos das massas m_1 e m_2, respectivamente. A coordenada y_0 servirá para descrever o movimento do solo, devido às irregularidades do terreno.

MODELANDO SISTEMAS MECÂNICOS

Sistemas Rotativos:

- Para determinar a relação entre o torque e deslocamento para um sistema deste tipo, devemos considerar um bloco de massa rotacional e os torques agindo sobre esta massa.
- Quando vários torques agem sobre um corpo simultaneamente, sua resultante equivalente simples pode ser determinada somando-se, em cada direção, os torques em questão.
- Num sistema envolvendo torque sendo gerado para girar uma massa na extremidade de um eixo (figura (a)) pode ser representado pelo bloco rotacional mostrado na figura (b). O que dá origem à equações como:

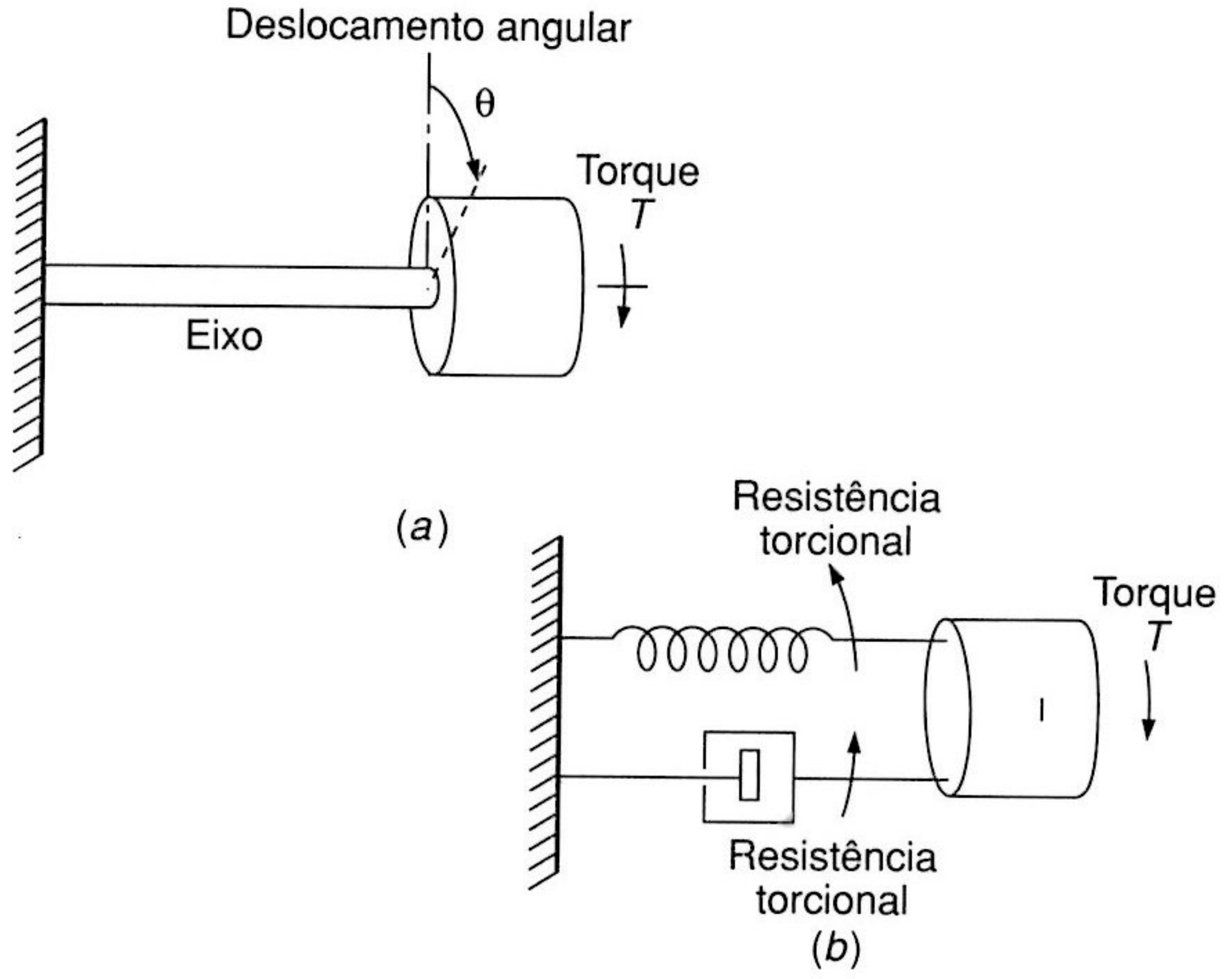
$$I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}+c\,\frac{d\theta}{dt}+k\,\theta=T$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}\,\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\,\frac{d\theta}{dt}+\theta=\frac{T}{k}$$

onde ω_n = frequência natural de oscilação angular e ζ = fator amortecimento para o movimento angular:

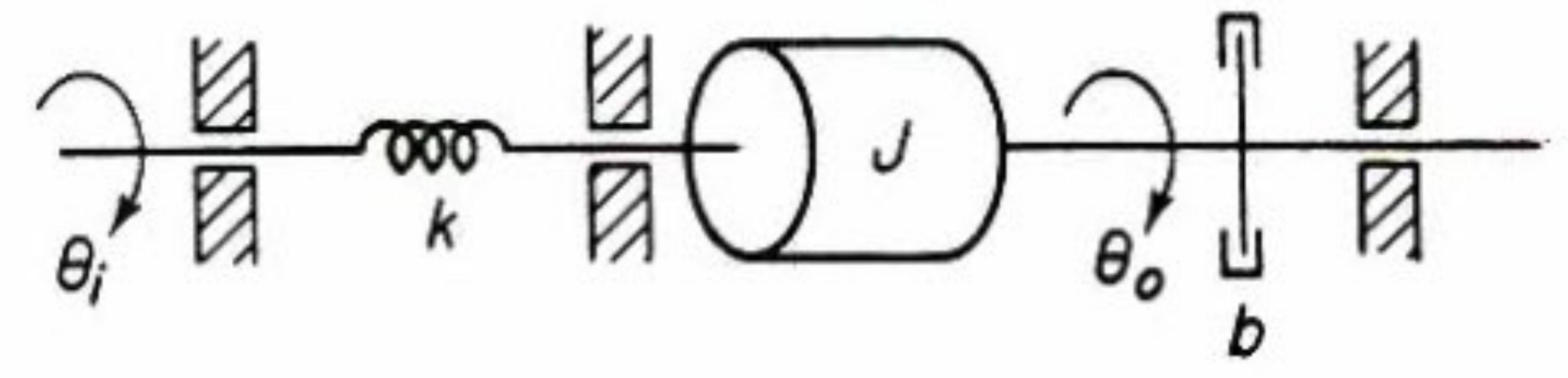
$$\omega_n=\sqrt{(k/I)}$$

$$\zeta=\frac{c}{2\sqrt{(Ik)}}$$

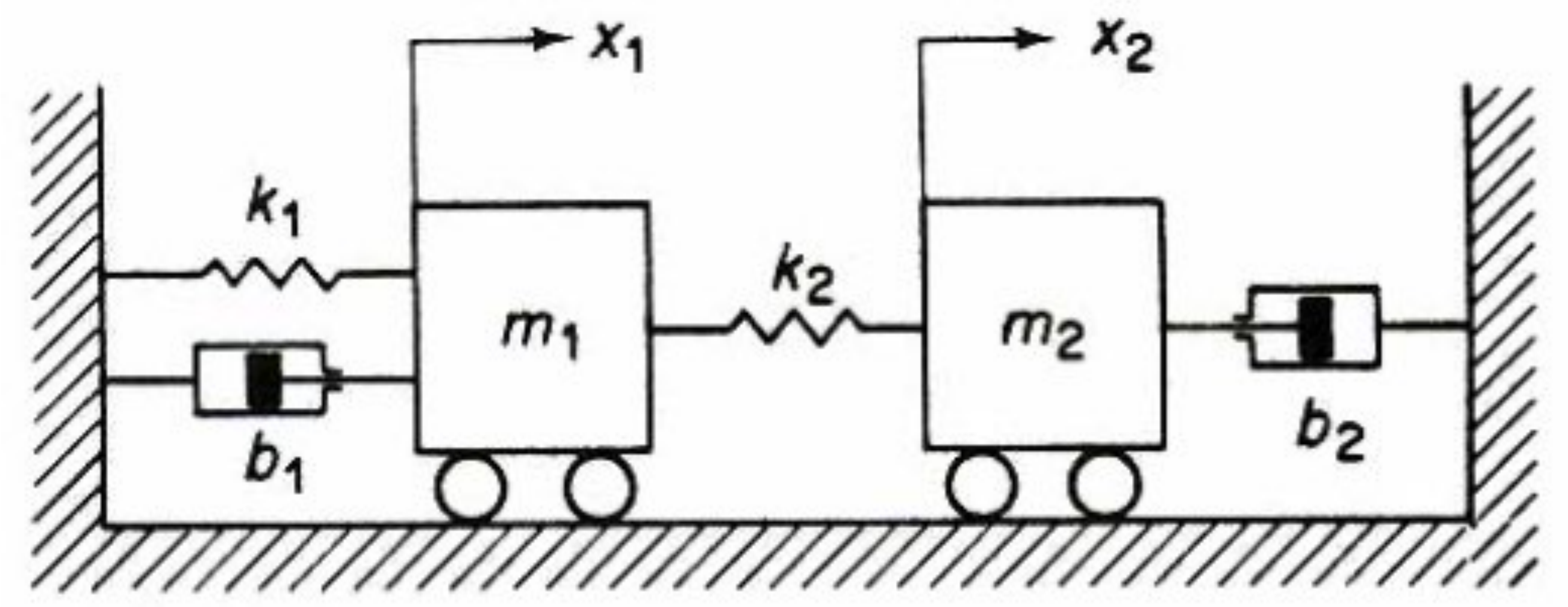


EXEMPLOS:

- Modelar os sistemas abaixo (encontrar suas equações diferenciais):



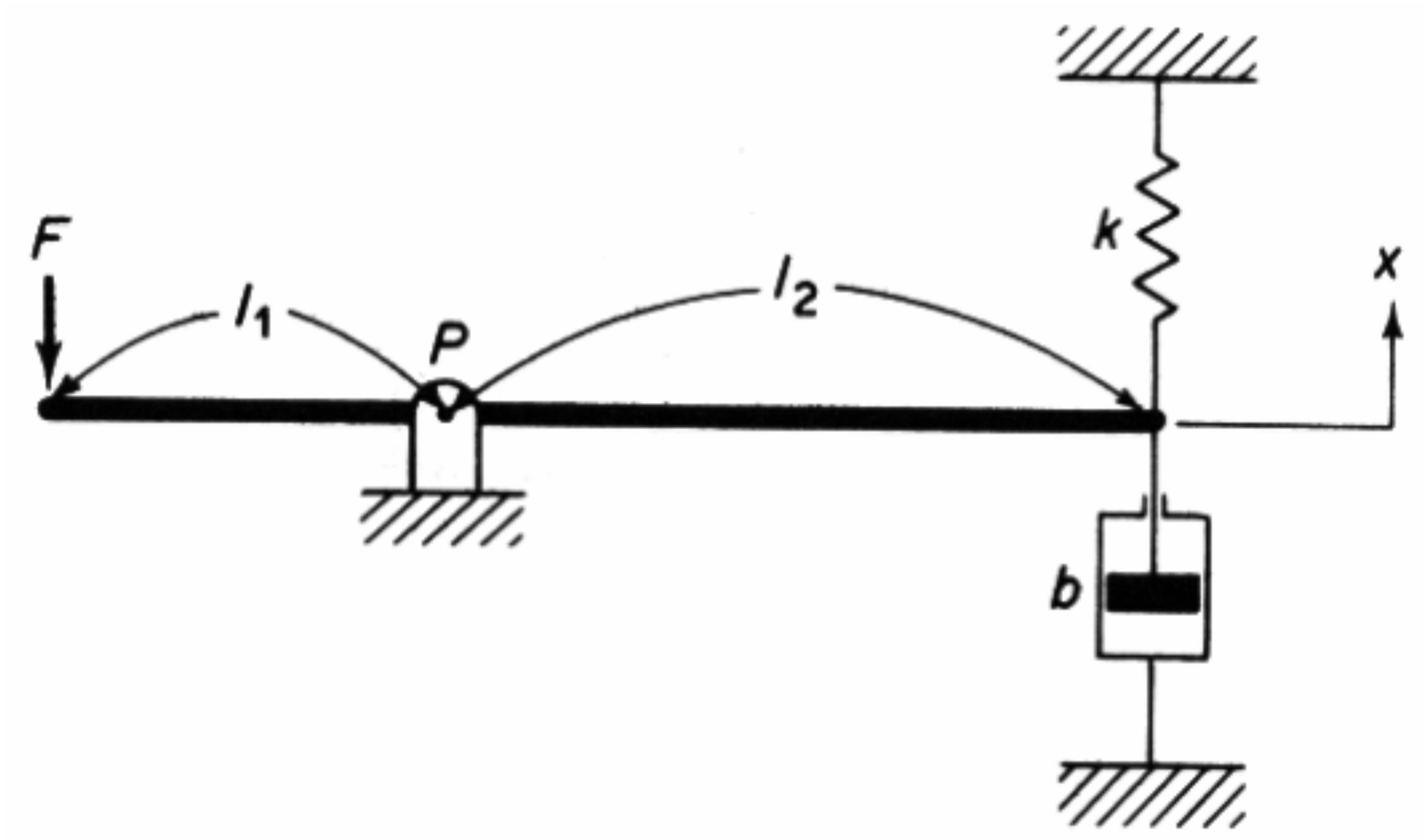
$$J.\ddot{\theta}_0 + b.\dot{\theta}_0 + k.\theta = k.\theta_i$$



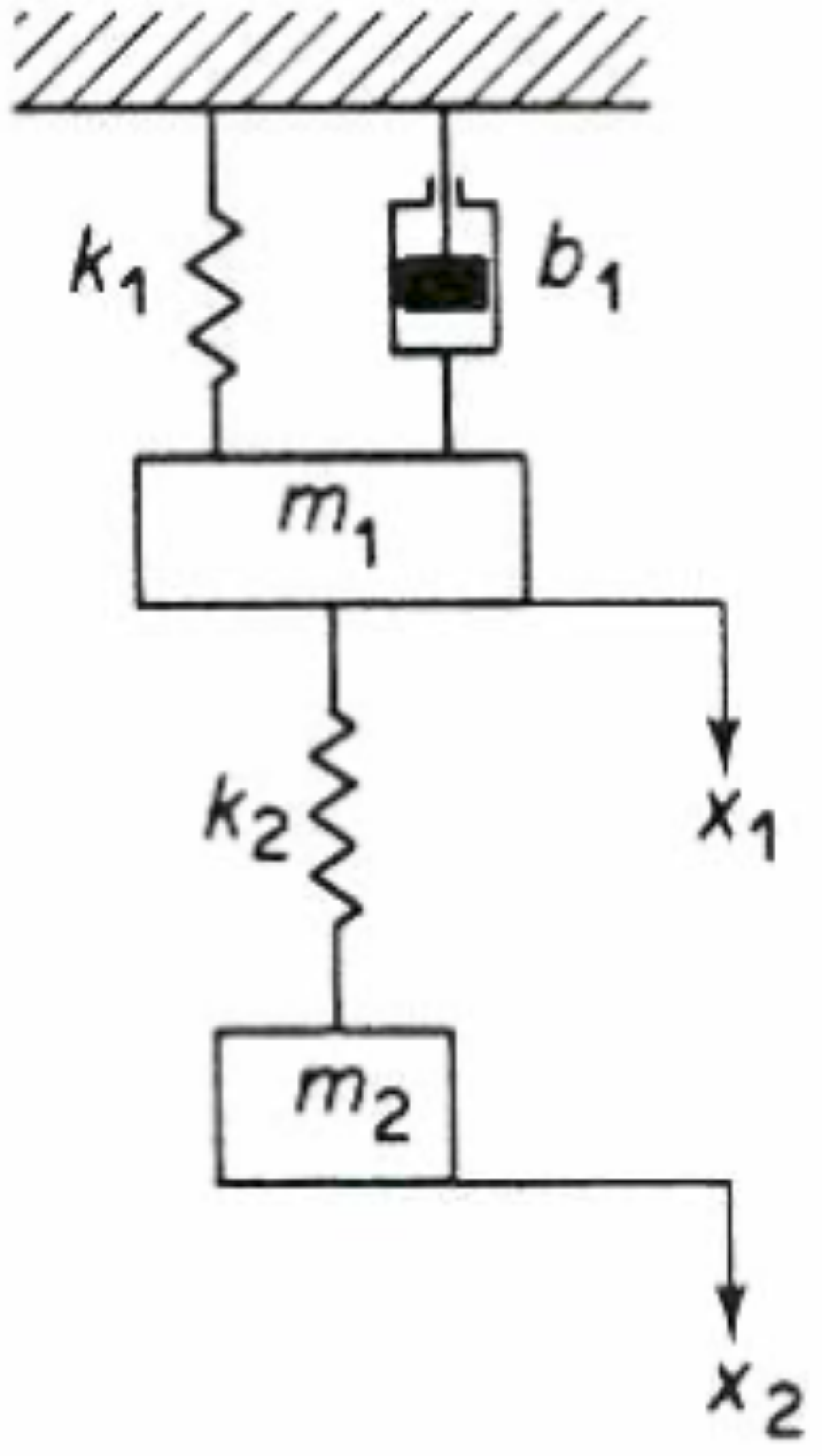
$$m_1.\ddot{x}_1 + b_1.\dot{x}_1 + (k_1 + k_2).x_1 = k_2.x_2$$
$$m_2.\ddot{x}_2 + b_2.\dot{x}_2 + k_2.x_2 = k_2.x_1$$

EXEMPLOS:

- Modelar os sistemas abaixo (encontrar suas equações diferenciais):



$$F.\frac{l_1}{l_2} = b.\dot{x} + k.x$$



$$m_1.\ddot{x}_1 + b_1.\dot{x}_1 + (k_1 + k_2).x_1 = k_2.x_2$$
$$m_2.\ddot{x}_2 + k_2.x_2 = k_2.x_1$$